L1 MASS, UE25 - UCBL - 2007-2008

Correction du contrôle continu de probabilités du 8 avril 2008.

Questions de cours

1. *Donner la définition d'un événement.*
2. *Donner la définition d'une probabilité sur un ensemble Ω.*
3. *Énoncer le théorème de Bayes.*
4. *Donner la définition de la loi d'une variable aléatoire discrète.*
5. *Donner la définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.*

Les références sont celles du poly du cours.

1. Définition 22 p.15
2. Définition 23 p.19
3. Proposition 34 p.34
4. Définition 42 p.52
5. Définition 46 p.76

Exercice 1. *Une loterie comporte 500 billets dont deux seulement sont gagnants. Combien doit-on acheter de billets pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit supérieure ou égale à 0.5 ?*

Voir exercice 10 du TD 2. Attention, il ne s'agit pas de tirages indépendants.

Exercice 2. *Pourquoi votre alarme anti-intrusion se déclenche-t-elle la plupart du temps pour rien ?*
On considère l'espace des possibles $\Omega = \{ac, at, nc, nt\}$ où
- a signifie que l'alarme s'est déclenchée au moins une fois pendant vos vacances estivales,
- n signifie qu'elle ne s'est pas déclenchée,
- c signifie que des cambrioleurs ont effectivement tenté de s'introduire dans votre domicile,
- t signifie que personne n'a rien tenté de semblable (t pour tranquillité).
On donne les probabilités suivantes : la probabilité d'être victime d'un cambriolage pendant vos vacances est de 1%, la probabilité que votre alarme se déclenche sachant que des cambrioleurs sont présents est de 99% et la probabilité que l'alarme se déclenche sans raison est de 5%.

a) Donner la probabilité de chaque événement élémentaire.

b) Votre alarme se déclenche. Quelle est la probabilité que ce soit pour rien ?

Voir exercice 8 du TD 3. Attention, lorsque l'on dit « la probabilité que l'alarme se déclenche sans raison est de 5% », il s'agit d'une probabilité d'intersection : l'alarme se déclenche et il n'y a pas de cambriolage.

Exercice 3. *Une urne contient $n \geq 4$ boules rouges et une boule verte. On effectue un tirage sans remise. On considère comme espace Ω l'ensemble de tous les résultats possibles, c'est-à-dire l'ensemble des $(n+1)$-uplets formés des lettres R et V et comportant exactement un V.*

1. *Déterminer la probabilité d'un $(n+1)$-uplet appartenant à Ω.*

2. *On note X le numéro du tirage de la boule verte. De quel(s) événement(s) élémentaire(s) l'événement $\{X = k\}$ est-il constitué ?*
3. *Déterminer la loi de X et donner son espérance (sans faire le calcul si vous connaissez le résultat du cours !).*
4. *Calculer $\mathbf{P}(X = 3|X \leq 4)$ et $\mathbf{P}(X = 3|X \geq 2)$.*

1. Ω est constitué des $(n+1)$-uplets de R et V (c'est-à-dire des suites finies de longueurs $n+1$), comportant exactement un V. Dans Ω, il y a autant d'éléments que de façons de placer une boule verte parmi n boules rouges indistingables, ou encore une boule verte parmi $n+1$ emplacements possibles. Le cardinal de Ω est donc $n+1$. Les tirages sont équiprobables, donc Ω est muni de la probabilité uniforme. La probabilité d'un $(n+1)$-uplet est par conséquent $1/(n+1)$.
2. X est une variable aléatoire sur Ω, puisque c'est une fonction définie sur Ω. Pour tout entier k entre 1 et $n+1$, l'événement $\{X = k\}$ est constitué du $(n+1)$-uplet comportant, dans l'ordre : $k-1$ "R", puis un "V", puis $n+1-k$ "R". C'est un événement élémentaire.
3. La variable aléatoire X est à valeurs dans l'ensemble des entiers compris entre 1 et $n+1$. Pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq n+1$, l'événement $\{X = k\}$ étant constitué d'un unique événement élémentaire, dont la probabilité est $1/(n+1)$, on a, $\mathbf{P}(X = k) = 1/(n+1)$. X suit donc la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n+1\}$. Son espérance est égale à $(n+2)/2$.
4. $$\mathbf{P}(X = 3|X \leq 4) = \frac{\mathbf{P}(\{X = 3\} \cap \{X \leq 4\})}{\mathbf{P}(X \leq 4)} = \frac{\mathbf{P}(X = 3)}{\mathbf{P}(X \leq 4)} = \frac{1/(n+1)}{4/(n+1)} = \frac{1}{4}$$

   car $\mathbf{P}(X \leq 4) = \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 4)$, et $4 \leq n+1$, donc ces quatre événements sont de probabilité $1/(n+1)$.

   $$\mathbf{P}(X = 3|X \geq 2) = \frac{\mathbf{P}(\{X = 3\} \cap \{X \geq 2\})}{\mathbf{P}(X \geq 2)} = \frac{\mathbf{P}(X = 3)}{\mathbf{P}(X \geq 2)} = \frac{1/(n+1)}{n/(n+1)} = \frac{1}{n}$$

   car $\mathbf{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbf{P}(X = 1) = 1 - 1/(n+1) = n/(n+1)$.