

ISFA 2^o année
Processus Stochastiques
Contrôle continu du 24 novembre 2004
Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Questions de cours

- Donner la définition d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur un espace d'états E et de probabilités de transition $(p(x, y))_{x, y \in E}$. Quelle est sa mesure initiale ? Comment caractérise-t-on une mesure stationnaire pour cette chaîne de Markov ?
- Énoncer le théorème d'arrêt (ou théorème optionnel) de Doob.

Exercice 1 : Le temps au pays d'Oz

Au pays d'Oz, le temps ne peut prendre que 3 formes : Beau temps (B), Pluvieux (P), ou Neigeux (N). Les règles d'évolution du temps sont immuables et ne souffrent aucune exception.

- S'il fait beau, il ne fera pas beau le lendemain, et il y a autant de chances qu'il pleuve ou qu'il neige le lendemain.
- S'il pleut ou s'il neige, il y a une chance sur deux qu'il fasse le même temps le lendemain, et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.

1. Modélisez cette situation par une chaîne de Markov, et justifiez ce choix. Donnez son graphe et sa matrice de transition.
2. Cette chaîne est-elle irréductible ? Quelle est la nature des états ? leur période ?
3. Donnez, s'il en existe, la ou les mesures stationnaires de cette chaîne.
4. Quelle est, à long terme, la probabilité qu'il fasse beau ? qu'il neige ?
5. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau après-demain sachant qu'il fait beau aujourd'hui ? Quelle est la probabilité qu'il neige deux jours de suite en trois jours ?
6. En moyenne, combien de jours faut-il pour que le beau temps revienne ?

Exercice 2 : Dactylographe

1. Un père a eu le tort de laisser son enfant de 3 ans jouer avec son ordinateur, qui n'a plus que 3 touches à son clavier : le p , le a et le z . L'enfant tape au hasard des lettres, et le père attend avec impatience de voir celui-ci taper "papa" à l'écran. Quel nombre de lettres doit taper celui-ci en moyenne avant d'arriver à ce résultat ?

Pour cela, on pourra considérer une chaîne de Markov sur l'espace d'états E donné par $E = \{\{\emptyset\}, \{p\}, \{pa\}, \{pap\}, \{papa\}\}$, qui correspondent aux derniers caractères écrits. On est dans l'état vide si les derniers caractères ne sont pas $\{p\}$, $\{pa\}$, $\{pap\}$, ou $\{papa\}$, et on passe de $\{\emptyset\}$ à $\{p\}$ avec une probabilité $1/3$, de $\{\emptyset\}$ à $\{\emptyset\}$ avec une probabilité $2/3$, etc... (il faut regarder en détail le résultat de la frappe d'une touche sur les dernières lettres pour décrire la chaîne de Markov entièrement, selon que la lettre suivante est un p , un a ou un z).

On aura intérêt à imposer une transition de $\{papa\}$ vers $\{\emptyset\}$ avec probabilité 1, et à regarder l'espérance du temps de retour de $\{papa\}$ vers lui-même.

2. Reprendre le problème ci-dessus avec un clavier de N lettres, et une chaîne de Markov sur le même espace d'états. Remarquer que la probabilité de transition de $\{\emptyset\}$ vers $\{p\}$ dans ce cadre est $1/N$, celle de $\{\emptyset\}$ vers lui-même étant $(N - 1)/N$...

3. Très fier des exploits de son fils, le père se donne un mot formé de q lettres **distinctes**, avec $q < N$. Au bout de combien de lettres en moyenne le mot sera-t-il écrit ? (*Indication : utiliser le même raisonnement que plus haut en remarquant que, si les lettres sont distinctes, la matrice de transition prend une forme simple*).

Exercice 3 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, pas nécessairement indépendantes, bornées par une constante K et vérifiant $\mathbf{E}(X_n) = 0$.

On note $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$. On suppose que (S_n, \mathcal{F}_n) forme une martingale. Pour $a \in \mathbb{R}^+$ et $N \in \mathbb{N}^*$ fixés, on note

$$\tau = \inf\{n \geq 1, S_n > a\} \quad (\text{où } \inf \emptyset = +\infty \text{ par convention}) \quad \text{et} \quad \tau_N = \min(\tau, N).$$

On notera également, pour tout réel y , y^+ la partie positive de y : $y^+ = \max(0, y)$.

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt.
2. Montrer que, pour tout $N \geq 1$ fixé, τ_N est un temps d'arrêt borné.
3. Vérifier que l'on peut appliquer le théorème d'arrêt de Doob à la martingale $(S_n)_n$ entre les instants 0 et τ_N et écrire le résultat obtenu.
4. En déduire $\mathbf{E}(S_{\tau_N})$.
5. Montrer que $\mathbf{E}(|S_{\tau_N}|) = 2\mathbf{E}(S_{\tau_N}^+)$.
6. Montrer que $S_{\tau_N}^+ \leq a + X_{\tau_N}^+$.
7. En déduire que $\sup_N \mathbf{E}|S_{\tau_N}| < \infty$.
8. En déduire que $(S_{\tau_N})_N$ converge presque sûrement dans \mathbb{R} .
9. On note $\Omega_a = \{\omega \in \Omega; \sup_n S_n(\omega) \leq a\}$. Montrer que, pour presque tout $\omega \in \Omega_a$, la suite $(S_n(\omega))$ converge dans \mathbb{R} .
10. On note $\Omega_\infty = \cup_a \Omega_a$. Montrer que la suite $(S_n(\omega))$ converge pour presque tout $\omega \in \Omega_\infty$.
11. Montrer, en considérant la martingale $M_n = -S_n$, que la suite $(S_n(\omega))$ converge pour presque tout ω tel que $\inf_n S_n(\omega) > -\infty$.
12. Une application : On se donne des événements $A_n \in \mathcal{F}$, $n \geq 1$ et on note $\mathcal{F}_n = \sigma\{A_1, \dots, A_n\}$. On pose $Z_n = \mathbf{1}_{A_n}$, $Z'_n = \mathbf{E}(Z_n | \mathcal{F}_{n-1})$, $X_n = Z_n - Z'_n$, puis $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On note

$$B_1 = \left\{ \sum_{n \geq 1} Z_n = +\infty \right\} \quad \text{et} \quad B_2 = \left\{ \sum_{n \geq 1} Z'_n = +\infty \right\}.$$

- (a) Montrer que les X_n sont des variables aléatoires intégrables, d'espérance nulle, bornées par 1.
- (b) Vérifier que (S_n) est une \mathcal{F}_n -martingale.
- (c) Montrer, que si $\omega \notin B_1$, $\sup_n S_n(\omega)$ est fini et en déduire à l'aide de la question 10, que $(S_n(\omega))$ converge pour presque tout $\omega \notin B_1$, puis que, toujours pour presque tout $\omega \notin B_1$, $\sum Z'_n(\omega)$ converge.
- (d) Montrer également que si $\omega \notin B_2$, $\inf_n S_n(\omega) > -\infty$ et en déduire, à l'aide de la question 11, que $(S_n(\omega))$ converge pour presque tout $\omega \notin B_2$, puis que, toujours pour presque tout $\omega \notin B_2$, $\sum Z_n(\omega)$ converge.
- (e) Déduire de (c) et (d) que $\mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}(B_2)$.
- (f) Retrouver le lemme de Borel-Cantelli : si les (A_n) sont des événements indépendants tels que $\sum_n \mathbf{P}(A_n) = +\infty$, $\mathbf{P}(\cap_N \cup_{n \geq N} A_n) = 1$.