

**Exercice 1 : Partie A.**

1. Au choix :
  - $\langle M \rangle_t$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable si  $t \leq s$  et l'événement  $\{\tau(u) \leq s\}$  ne fait intervenir  $\langle M \rangle_t$  qu'en des instants  $t \leq s$ .
  - $\langle M \rangle_t$  est croissante donc  $\{\tau(u) \leq s\} = \{\langle M \rangle_s \geq u\}$  qui appartient à  $\mathcal{F}_s$  car  $\langle M \rangle_s$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable.
2.  $\langle M \rangle$  tend vers  $+\infty$  par hypothèse.
3. C'est la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement croissante.
4.  $u \rightarrow X_u$  est la composée de deux fonctions continues, donc c'est une fonction continue.
5. On applique le théorème d'arrêt de Doob à  $M$  aux instants  $\tau(v)$  et  $\tau(u)$  pour  $u \geq v$ . On obtient

$$\mathbf{E}(M_{\tau(u)} \mathbf{1}_{\tau(u) \geq \tau(v)} | \mathcal{F}_{\tau(v)}) = M_{\tau(v)} \mathbf{1}_{\tau(u) \geq \tau(v)}$$

c'est-à-dire  $\mathbf{E}(X_u | \mathcal{F}_{\tau(v)}) = X_v$ .

6. On utilise ici que  $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)_t$  est une martingale et on applique le théorème d'arrêt de Doob entre les instants  $\tau(v)$  et  $\tau(u)$  pour  $u \geq v$ . On obtient

$$\mathbf{E}(M_{\tau(u)}^2 \mathbf{1}_{\tau(u) \geq \tau(v)} | \mathcal{F}_{\tau(v)}) = M_{\tau(v)}^2 \mathbf{1}_{\tau(u) \geq \tau(v)}$$

c'est-à-dire  $\mathbf{E}(X_u^2 - u | \mathcal{F}_{\tau(v)}) = X_v^2 - v$ .

7.  $(X_u)_u$  est une martingale continue de variation quadratique  $u$  et  $X_0 = 0$  donc  $(X_u)$  est un mouvement brownien.

**Partie B.**

1. La variation quadratique de  $X_s$ , tout comme celle de  $Y_s$ , est égale à  $s$  et  $\langle X_s, Y_s \rangle = 0$  car  $X$  et  $Y$  sont indépendants. On a donc

$$\begin{aligned} f(X_t, Y_t) &= f(X_0, Y_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) dY_s + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(X_s, Y_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(X_s, Y_s) ds. \end{aligned}$$

La variation quadratique de  $f(X_t, Y_t)$  est égale à celle de

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) dY_s$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \langle f(X, Y) \rangle_t &= \int_0^t \left( \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s) \right)^2 d\langle X \rangle_s + \int_0^t \left( \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) \right)^2 d\langle Y \rangle_s + \\ &\quad 2 \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s) \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) d\langle X, Y \rangle_s \\ &= \int_0^t \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s) \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) \right)^2 \right) ds \end{aligned}$$

2. On applique le résultat de la question précédente avec  $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ . On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

On a donc

$$\frac{1}{2} \ln(X_t^2 + Y_t^2) = 0 + \int_0^t \frac{X_s}{X_s^2 + Y_s^2} dX_s + \int_0^t \frac{Y_s}{X_s^2 + Y_s^2} dY_s.$$

3. En utilisant les résultats des deux question précédentes :

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle_t &= \int_0^t \left( \left( \frac{X_s}{X_s^2 + Y_s^2} \right)^2 + \left( \frac{Y_s}{X_s^2 + Y_s^2} \right)^2 \right) ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{X_s^2 + Y_s^2} ds \end{aligned}$$

4. Le problème pour appliquer la formule de Itô est que l'on ne peut pas écrire  $Z_t = \arctan(Y_t/X_t)$ , puisque cette expression n'est pas définie lorsque  $X_t$  s'annule, alors que l'argument du processus  $X_t + iY_t$  peut lui être correctement défini. Néanmoins, sur les intervalles de temps pendant lequel  $X_t$  ne s'annule pas, cette égalité a bien lieu à condition de choisir la bonne détermination de l'argument. Comme  $\tilde{Z}_t$  est continu, il suffit de prouver que sur les intervalles où  $X_t$  ne s'annule pas, on a bien l'égalité. Posons donc  $f(x, y) = \arctan(y/x)$ . On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Sur un intervalle de temps  $[t_0, t]$  sur lequel  $X_s$  ne s'annule pas, on a donc

$$\arctan\left(\frac{Y_t}{X_t}\right) = \arctan\left(\frac{Y_{t_0}}{X_{t_0}}\right) + \int_{t_0}^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{X_s^2 + Y_s^2}.$$

5.

$$\langle Z \rangle_t = \int_0^t \frac{X_s^2 + Y_s^2}{(X_s^2 + Y_s^2)^2} ds = \int_0^t \frac{1}{X_s^2 + Y_s^2} ds = \langle \rho \rangle_t$$

6. Par définition  $\langle \rho, Z \rangle_t = \frac{1}{2} (\langle \rho + Z \rangle - \langle \rho \rangle - \langle Z \rangle)$ .

$$\rho_t + Z_t = \int_0^t \frac{X_s - Y_s}{X_s^2 + Y_s^2} dX_s + \int_0^t \frac{X_s + Y_s}{X_s^2 + Y_s^2} dY_s$$

donc

$$\begin{aligned}\langle \rho + Z \rangle_t &= \int_0^t \left( \frac{X_s - Y_s}{X_s^2 + Y_s^2} \right)^2 ds + \int_0^t \left( \frac{X_s + Y_s}{X_s^2 + Y_s^2} \right)^2 ds + 0 \\ &= 2 \int_0^t \frac{X_s^2 + Y_s^2}{(X_s^2 + Y_s^2)^2} ds \\ &= 2 \int_0^t \frac{1}{X_s^2 + Y_s^2} ds\end{aligned}$$

On obtient donc  $\langle \rho, Z \rangle_t = 0$ .

7. Les  $\sigma_k$  forment une suite croissante de temps d'arrêt. La propriété de Markov signifie que, si  $\tau$  est un temps d'arrêt,  $(X_{s+\tau} - X_\tau, Y_{s+\tau} - Y_\tau)_{s \geq 0}$  est indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_t$  au et que ce processus est un mouvement brownien. En prenant pour temps d'arrêt successifs  $\tau = \sigma_2, \sigma_4, \dots, \sigma_{2n}$ , on montre à la fois que les variables aléatoires  $\sigma_3 - \sigma_2, \sigma_5 - \sigma_4, \dots, \sigma_{2n+1} - \sigma_{2n}$  sont indépendantes et suivent la même loi. On a en effet toujours  $R_{\sigma_{2k}} = 1/2$ .
8. Entre un instant  $\sigma_{2n}$  et un instant  $\sigma_{2n+1}$ , on a toujours  $R_s \leq 1$  donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{R_s^2} ds &\geq \sum_{n \geq 1} \int_{\sigma_{2n}}^{\sigma_{2n+1}} \frac{1}{R_s^2} ds \\ &\geq \sum_{n \geq 1} \int_{\sigma_{2n}}^{\sigma_{2n+1}} 1 ds \\ &= \sum_{n \geq 1} (\sigma_{2n+1} - \sigma_{2n})\end{aligned}$$

9. Les variables aléatoires  $\sigma_{2n+1} - \sigma_{2n}$  sont strictement positives, indépendantes, identiquement distribuées et de même loi. En appliquant la loi forte des grands nombres, on obtient (même si elles ne sont pas intégrables!) que leur somme tend vers  $+\infty$ , donc  $\langle \rho \rangle_t$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .
10. D'après la question B6),  $\langle \rho, Z \rangle_t = 0$ , donc  $\langle \rho, Z \rangle_{\tau(u)} = 0$ . On en déduit alors que  $\langle W^{(1)}, W^{(2)} \rangle_u = 0$ . C'est en fait une application du théorème d'arrêt de Doob à la martingale  $\rho Z - \langle \rho, Z \rangle$ .
11. Le processus  $(W_u^{(1)}, W_u^{(2)})_{u \geq 0}$  est un couple formé par deux mouvements browniens, dont la variation quadratique croisée  $\langle W^{(1)}, W^{(2)} \rangle$  est nulle. Cela suffit pour prouver leur indépendance.

### Exercice 2 :

1.  $\mathbf{E}(Z_n) = n\mathbf{E}(Y_1) = n/\lambda$  et, puis que les  $Y_k$  sont indépendantes,  $\mathbf{var}(Z_n) = n\mathbf{var}(Y_1) = n/\lambda^2$ . On obtient  $\mathbf{E}(Z_n^2) = \mathbf{var}(Z_n) + (\mathbf{E}(Z_n))^2 = (n + n^2)/\lambda^2$ .
2.  $Z_n$  suit une loi  $\Gamma$  de paramètres  $(n, \lambda)$ . Sa densité est

$$t \rightarrow \lambda^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{t \geq 0}$$

3. Pour une fonction  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne et bornée, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(h(Z_1, Z_2)) &= E(h(Y_1, Y_1 + Y_2)) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} h(x, x+y) \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dx dy \\ &= \int_{0 \leq x \leq z} h(x, z) \lambda^2 e^{-\lambda z} dx dz.\end{aligned}$$

La densité du couple  $(Z_1, Z_2)$  est donc égale à

$$(x, z) \rightarrow \lambda^2 e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{0 \leq x \leq z}.$$

Ces deux variables aléatoires ne sont évidemment pas indépendantes (comparer avec le produit de la densité de  $Z_1$  et de la densité de  $Z_2$ .)

4. Soit  $x \geq 0$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z_1 < x \leq Z_2) &= \mathbf{P}(Z_2 \geq x) - \mathbf{P}(Z_2 \geq Z_1 \geq x) \\
&= \mathbf{P}(Z_2 \geq x) - \mathbf{P}(Z_1 \geq x) \\
&= \int_x^{+\infty} \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt - \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= [-\lambda t e^{-\lambda t}]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt - \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \lambda x e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

On peut aussi écrire

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z_1 < x \leq Z_2) &= \int_{y \leq x \leq z} \lambda^2 e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{0 \leq y \leq z} dy dz \\
&= \left( \int_0^x dy \right) \left( \int_x^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda z} dz \right) \\
&= x \lambda e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

5. Soit  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne bornée.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(h(Z_k, Z_{k+1})) &= E(h(Z_k, Z_k + Y_{k+1})) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} h(x, x+y) \lambda^{k+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda(x+y)} dx dy \\
&= \int_{0 \leq x \leq z} h(x, z) \lambda^{k+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda z} dx dz.
\end{aligned}$$

On écrit comme ci-dessus

$$\mathbf{P}(Z_k < x \leq Z_{k+1}) = \mathbf{P}(Z_{k+1} \geq x) - \mathbf{P}(Z_{k+1} \geq Z_k \geq x) = \mathbf{P}(Z_{k+1} \geq x) - \mathbf{P}(Z_k \geq x)$$

et une intégration par partie permet d'obtenir le résultat.

6. Soit  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne et bornée.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(h(Z_k, Z_{k+1}, Z_N)) &= \mathbf{E}(h(Z_k, Z_k + Y_{k+1}, Z_k + Y_{k+1} + \dots + Y_N)) \\
&= \int_{(r,y,z) \in \mathbb{R}_+^3} h(r, r+y, r+y+z) \lambda^k \frac{r^{k-1}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda y} \lambda^{N-k-1} \frac{z^{N-k-2}}{(N-k-2)!} \\
&\quad e^{-\lambda(r+y+z)} dr dy dz \\
&= \int_{0 \leq r \leq s \leq t} h(r, s, t) \frac{\lambda^N}{(k-1)!(N-k-2)!} r^{k-1} (t-s)^{N-k-2} e^{-\lambda t} dr ds dt
\end{aligned}$$

La densité de  $(Z_k, Z_{k+1}, Z_N)$  est donc bien la fonction annoncée.

7. On a, en effectuant une intégration par rapport à  $R \in [0, x]$  puis par rapport à  $s \in [x, t]$  :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z_k < x \leq Z_{k+1} \text{ et } Z_N \leq x+y) &= \int_{0 \leq r \leq x \leq s \leq t \leq x+y} \frac{\lambda^N}{(k-1)!(N-k-2)!} r^{k-1} \\
&\quad (t-s)^{N-k-2} e^{-\lambda t} dr ds dt \\
&= \frac{\lambda^N}{(k-1)!(N-k-2)!} \frac{x^k}{k} \int_{x \leq s \leq t \leq x+y} (t-s)^{N-k-2} e^{-\lambda t} ds dt \\
&= \frac{\lambda^N}{k!(N-k-2)!} x^k \int_{x \leq t \leq x+y} \left( \int_{x \leq s \leq t} (t-s)^{N-k-2} ds \right) e^{-\lambda t} dt \\
&= \frac{\lambda^N}{k!(N-k-1)!} x^k \int_{x \leq t \leq x+y} (t-x)^{N-k-1} e^{-\lambda t} dt
\end{aligned}$$

Il reste à effectuer un changement de variables pour retrouver la loi de  $Z_{N-k}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_k < x \leq Z_{k+1} \text{ et } Z_N \leq x + y) &= \frac{\lambda^N}{k!(N-k-1)!} x^k e^{-\lambda x} \int_0^y u^{N-k-1} e^{-\lambda u} du \\ &= \frac{\lambda^N}{k!(N-k-1)!} x^k e^{-\lambda x} \mathbf{P}(Z_{N-k} \leq y) \end{aligned}$$

8. On a

$$\mathbf{P}(Z_k < x \leq Z_{k+1} \text{ et } Z_N \geq x + y) = \mathbf{P}(Z_k < x \leq Z_{k+1}) - \mathbf{P}(Z_k < x \leq Z_{k+1} \text{ et } Z_N \leq x + y),$$

d'où le résultat.

9. On utilise l'indépendance de  $(X_1, X_2)$  et du processus  $(Z_p)_p$  :

$$\mathbf{P}(Z_k < X_1 \leq Z_{k+1} \text{ et } Z_N \geq X_1 + X_2) = \iint \mathbf{P}(Z_k < x \leq Z_{k+1} \text{ et } Z_N \geq x + y) d(X_1, X_2)(\mathbf{P})(x, y)$$

ce qui fournit le résultat annoncé.

10. Le processus  $(R_u)_{u \geq 0}$  est indépendant de  $Z_p$  donc l'égalité est bien vérifiée.

11. Les  $Y_k$  sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, positives et intégrables. On a donc, par le théorème du renouvellement,

$$\mathbf{E}(R(u)) \sim \frac{u}{\mathbf{E}(X_1)}.$$

Puisque  $Z_p$  est intégrable, on en déduit alors que  $V_p$  est également intégrable.

12. Même principe que pour la question 9) : on utilise le résultat de la question 8) et l'indépendance des  $(X_i)$  et des  $Z_p$ , avant de sommer sur  $n$ .

13. On utilise la définition de  $m(1)$  et la question 10) :

$$\begin{aligned} m(1) &= \mathbf{E}(V_1) \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbf{E}(R_u) \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbf{E} \left( \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{X_1 + \dots + X_n \leq u} \right) \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbf{E} \left( \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{X_1 + \dots + X_n \leq u} \lambda e^{-\lambda u} du \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbf{E} \left( \int_{X_1 + \dots + X_n}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbf{E} (e^{-\lambda(X_1 + \dots + X_n)}) \\ &= \sum_{n \geq 1} (\mathbf{E}(e^{-\lambda X_1}))^n \\ &= \frac{\mathbf{E}(e^{-\lambda X_1})}{1 - \mathbf{E}(e^{-\lambda X_1})} \end{aligned}$$

14. Le résultat s'obtient immédiatement en sommant l'égalité de la question 12) pour  $k$  entre 0 et  $N-1$ . On a en effet

$$\begin{aligned} m(N) = \mathbf{E}(V_N) &= \sum_{n \geq 1} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{X_1 + \dots + X_n \leq Z_N}) \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n \leq Z_N) \end{aligned}$$

$$\text{et } \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n \leq Z_N) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(Z_k < X_1 \leq Z_{k+1} \text{ et } Z_N \geq X_1 + \dots + X_n)$$