Université Claude Bernard Lyon–I
L1 MASS UE 25 - Probabilités
Année 2007-2008

Correction du devoir maison n°2

Exercice 1 :

Sur un espace Ω, on note
- M l'événement « la personne testée est malade »,
- S l'événement « la personne n'est pas malade (i.e. est saine) »,
- Po l'événement « le test est positif »,
- N l'événement « le test est négatif ».

L'énoncé fournit les probabilités suivantes :

$$\mathbf{P}(Po|M) = 0,999 \qquad \mathbf{P}(Po|S) = 0,01 \qquad \mathbf{P}(M) = 0,05.$$

La probabilité à calculer est $\mathbf{P}(M|Po)$. On utilise pour cela la formule de Bayes :

$$\mathbf{P}(M|Po) = \frac{\mathbf{P}(Po|M)\mathbf{P}(M)}{\mathbf{P}(Po|M)\mathbf{P}(M) + \mathbf{P}(Po|S)\mathbf{P}(S)} = \frac{0.999 \times 0.05}{0.999 \times 0.05 + 0.01 \times 0.95} = \frac{0.04995}{0.05945} \simeq 0.840$$

La probabilité que la personne soit malade sachant que son test est positif est donc de 84%.

Exercice 2 :
Partie A : tirage avec remise

1. La composition de l'urne ne change pas d'un tirage à l'autre, on suppose que chaque tirage est bien uniforme parmi les boules ; on est donc dans le cas d'une expérience répétée de façon indépendante : c'est un schéma de Bernoulli.
2. On a

$$\mathbf{P}\{\text{tirer au moins une boule verte parmi les } n \text{ premiers tirages}\} =$$
$$= 1 - \mathbf{P}\{\text{tirer uniquement des boules blanches parmi les } n \text{ premiers tirages}\}$$

   Or la probabilité de tirer une boule blanche au k^{e} tirage est égale à $B/(B+3)$ et les tirages sont indépendants. La probabilité de tirer uniquement des boules blanches au cours des n premiers tirages est donc égale à $(B/(B+3))^n$. On a donc

$$\mathbf{P}\{\text{tirer au moins une boule verte parmi les } n \text{ premiers tirages}\} = 1 - \left(\frac{B}{B+3}\right)^n.$$

3. Pour tout entier $k \geq 1$, la probabilité de tirer pour la première fois une boule verte au k^{e} tirage est égale à la probabilité de tirer des boules blanches au cours des $k-1$ premiers tirages, puis une boule verte au k^{e} tirage. On a donc, en utilisant l'indépendance des tirages :

$$\mathbf{P}(X = k) = \left(\frac{B}{B+3}\right)^{k-1} \frac{3}{B+3}.$$

   X suit une loi géométrique de paramètre $p = 3/(B+3)$. D'après le cours, on a

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p} = 1 + \frac{B}{3}.$$

En effet, en notant $p = 3/(B+3)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{k\in X(\Omega)} k\mathbf{P}(X=k)\\
&= \sum_{k\geq 1} k(1-p)^{k-1}p\\
&= p\left(-\frac{d}{dp}\sum_{k\geq 1}(1-p)^k\right)\\
&= -p\frac{d}{dp}\left(\frac{1-p}{1-(1-p)}\right)\\
&= -p\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}-1\right)\\
&= \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Partie B : tirage sans remise

1. La composition de l'urne pour le k^{e} tirage dépend de la couleur des boules qui ont été tirées précédemment. Par exemple, on a

$$\mathbf{P}(\text{tirer une boule blanche au } 2^{\text{e}} \text{ tirage}|\text{on a tiré une boule blanche au } 1^{\text{er}} \text{ tirage}) = \frac{B-1}{B+2}$$

$$\mathbf{P}(\text{tirer une boule blanche au } 2^{\text{e}} \text{ tirage}|\text{on a tiré une boule verte au } 1^{\text{er}} \text{ tirage}) = \frac{B}{B+2}$$

donc le résultat du deuxième tirage dépend du résultat du premier tirage.

2. L'espace Ω est muni de la probabilité uniforme : les tirages sont équiprobables. Le cardinal de Ω est le nombre de façons de placer 3 boules vertes indistinguables parmi $B+3$ boules. On a

$$\text{card}\{\Omega\} = \binom{B+3}{3} = \frac{(B+3)!}{3!\,B!} = \frac{(B+1)(B+2)(B+3)}{6}.$$

3. La première boule verte est tirée au plus tard au $(B+1)^{\text{e}}$ tirage. On a donc $Y(\Omega) = \{1,\ldots,B+1\}$. L'événement $\{Y=n\}$ est constitué des $(B+3)$-uplets commençant par $n-1$ boules blanches puis une boule verte (l'ordre des dernières coulleurs est libre). L'événement $\{Y=n\}$ est constitué des $(B+3)$-uplets commençant par $n-1$ boules blanches, les couleurs des dernières boules restant libres.

4. Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, B+1\}$. Fixons un entier $1 \geq n \leq B+1$. La probabilité étant uniforme sur Ω, il faut calculer card$\{Y=n\}$. On en déduira aisément $\mathbf{P}(Y=n)$. Le cardinal de $\{Y=n\}$ est le nombre de façons de placer 2 boules vertes parmi les $(B+3-n)$ dernières boules. on a donc

$$\text{card}\{Y=n\} = \binom{B+3-n}{2} = \frac{(B+3-n)!}{2!(B+1-n)!} = \frac{(B+3-n)(B+2-n)}{2}$$

On en déduit

$$\mathbf{P}(Y=n) = \frac{\text{card}\{Y=n\}}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3(B+3-n)(B+2-n)}{(B+1)(B+2)(B+3)}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{n=1}^{B+1} n\mathbf{P}(Y=n)\\
&= \frac{3}{(B+1)(B+2)(B+3)}\sum_{n=1}^{B+1}(n^3-(2B+5)n^2+(B+2)(B+3)n)
\end{aligned}$$

On utilise alors les formules donnant la somme des k premiers entiers, de leurs carrés et de leurs cubes (cf devoir n°1) :

$$\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2} \qquad \sum_{n=1}^{k} n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad \sum_{n=1}^{k} n^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

On obtient

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{B+4}{4}.$$

5. On a

$$\mathbf{P}(Y = n | Y \geq n) = \frac{\mathbf{P}(Y = n, Y \geq n)}{\mathbf{P}(Y \geq n)} = \frac{\mathbf{P}(Y = n)}{\mathbf{P}(Y \geq n)}.$$

Or l'événement $\{Y \geq n\}$ est constitué des $(B+3)$-uplets commençant par $n-1$ boules blanches. Le nombre de tels $(B+3)$-uplets est donc le nombre de façons de placer 3 boules vertes parmi les $B+4-n$ dernières boules, c'est-à-dire : $\binom{B+4-n}{3}$ On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y \geq n) &= \frac{\text{card}\{Y = n\}}{\text{card}(\Omega)} \\
&= \frac{(B+4-n)(B+4-n-1)(B+4-n-2)}{6} \times \frac{6}{(B+1)(B+2)(B+3)} \\
&= \frac{(B+4-n)(B+3-n)(B+2-n)}{(B+1)(B+2)(B+3)}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y = n | Y \geq n) &= \frac{3(B+3-n)(B+2-n)}{(B+1)(B+2)(B+3)} \times \frac{(B+1)(B+2)(B+3)}{(B+4-n)(B+3-n)(B+2-n)} \\
&= \frac{3(B+3-n)(B+2-n)}{(B+4-n)(B+3-n)(B+2-n)}
\end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. Prenons un schéma de Bernoulli de taille $n+m$: on repète $n+m$ fois de façon indépendante la même expérience dont le succès est de probabilité p. X représente le nombre de succès parmi les n premières tentatives et Y représente le nombre de succès parmi les m dernières tentatives. X et Y suivent des lois binomiales de paramètre respectivement (n, p) et (m, p). De plus, ces deux variables aléatoires sont bien indépendantes car on a pris soin de ne pas utiliser deux fois la même tentative. La somme de X et Y est alors le nombre total de succès : puisque nous sommes dans un schéma de Bernoulli, $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n+m, p)$.
2. W est une variable aléatoires prenant ses valeurs parmi les nombres entiers pairs (et inférieurs à $2n$) : ce n'est donc pas une variable aléatoire de loi binomiale. W est bien la somme de deux variables binomiales, mais elles ne sont pas indépendantes. On a, pour tout $k \leq n$

$$\mathbf{P}(W = 2k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

et $\mathbf{P}(W = j) = 0$ si $j \notin \{0, 2, 4, \ldots, 2n\}$.

Exercice 4 :

1. Il suffit de vérifier que les valeurs données dans le tableau sont toutes positives et que leur somme est égale à 1, ce qui est immédiat.
2. On obtient les lois marginales de X et Y en sommant en ligne (respectivement en colonne). La dernière colonne du tableau ci-dessous contient la loi de X et la dernière ligne celle de Y.

$X\backslash Y$	1	2	3	4	Loi de **X**
-2	0.1	0.1	0.1	0.1	**0.4**
-1	0.05	0	0	0.05	**0.1**
1	0.05	0	0	0.05	**0.1**
2	0.1	0.1	0.1	0.1	**0.4**
Loi de **Y**	**0.3**	**0.2**	**0.2**	**0.3**	

On a
$$\mathbf{E}(X) = -2 \times 0.4 - 1 \times 0.1 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.4 = 0$$
et
$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = 4 \times \times 0.4 + 1 \times 0.1 + 1 \times 0.1 + 4 \times 0.4 - 0 = 3.4\,.$$
Puis
$$\mathbf{E}(Y) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.3 = 2.5$$
et
$$\mathbf{Var}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - (\mathbf{E}(Y))^2 = 1 \times 0.3 + 4 \times 0.2 + 9 \times 0.2 + 16 \times 0.3 - 2.5^2 = 7.7 - 6.25 = 1.45\,.$$

3. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car, par exemple $\mathbf{P}(X = -2, Y = 1) \neq \mathbf{P}(X = -2) \times \mathbf{P}(Y = 1)$.
4. On a
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(XY) &= \sum_{x \in \{\pm 1, \pm 2\}, y \in \{1,\ldots,4\}} xy\mathbf{P}(X = x, Y = y) \\ &= 1(-2 \times 0.1 - 1 \times 0.05 + 1 \times 0.05 + 2 \times 0.1) + 2(-2 \times 0.1 + 0 + 0 + 2 \times 0.1) \\ &\quad +3(-2 \times 0.1 + 0 + 0 + 2 \times 0.1) + 4(-2 \times 0.1 - 1 \times 0.05 + 1 \times 0.05 + 2 \times 0.1) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Pour calculer $\mathbf{Var}(X+Y)$, on calcule d'une part $\mathbf{E}(X+Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = 2.5$ et d'autre part $\mathbf{E}((X+Y)^2)$:
$$\begin{aligned}\mathbf{E}((X+Y)^2 &= \sum_{x \in \{\pm 1, \pm 2\}, y \in \{1,\ldots,4\}} (x+y)^2\mathbf{P}(X = x, Y = y) \\ &= 11.1\end{aligned}$$

On a donc
$$\mathbf{Var}(X+Y) = 11.1 - 2.5^2 = 4.85 = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y).$$
On a également $\mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = 0$.
5. Si des variables aléatoires sont indépendantes, on a $\mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = 0$ et $\mathbf{Var}(X+Y) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y)$, mais ces résultats peuvent être vérifiés par deux variables aléatoires non indépendantes, ce qui est le cas ici.

6. On calcule $\mathbf{E}(X^2Y)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X^2Y) &= \sum_{x\in\{\pm1,\pm2\},y\in\{1,\ldots,4\}} x^2y\mathbf{P}(X=x,Y=y)\\ &= 8.5\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(XY^2) &= \sum_{x\in\{\pm1,\pm2\},y\in\{1,\ldots,4\}} xy^2\mathbf{P}(X=x,Y=y)\\ &= 0\end{aligned}$$

7. X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1,-2,1,2\}$. Pour déterminer la loi de X sachant $\{Y=1\}$, il faut donc calculer $\mathbf{P}(X=k|Y=1)$ pour $k\in\{\pm1,\pm2\}$. On sait que $\mathbf{P}(Y=1)=0.3$ On obtient

$$\mathbf{P}(X=-2|Y=1)=\frac{1}{3}\qquad \mathbf{P}(X=-1|Y=1)=\frac{1}{6}\qquad \mathbf{P}(X=1|Y=1)=\frac{1}{6}\qquad \mathbf{P}(X=2|Y=1)=\frac{1}{3}$$

Exercice 5 :

a) Une densité est une fonction positive dont l'intégrale sur $\mathbf{R}$ est égale à 1. Le réel a est donc déterminé par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ax(x-2)\mathbb{1}_{[0,2]}(x)\,dx = 1.$$

On découpe l'intégrale en trois intervalles : $]-\infty,0[$, $[0,2]$ et $]2,+\infty[$. La fonction f étant nulle sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 ax(x-2)\,dx = a\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2 = -a\frac{4}{3}.$$

On a donc $a=-3/4$. La fonction f est bien positive sur $[0,2]$.

b) et c) La fonction de répartition de X est

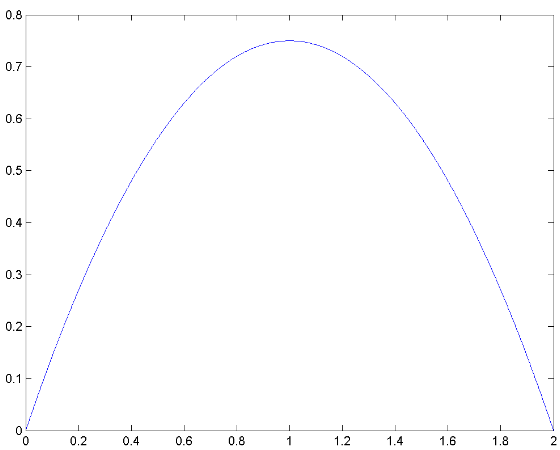
$$F(x)=\mathbf{P}(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

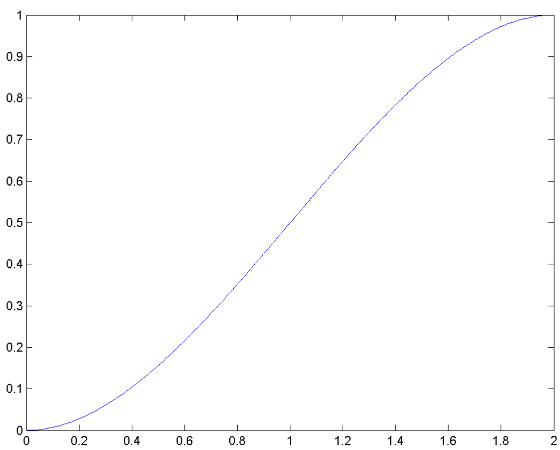
La fonction F est donc nulle sur $]-\infty,0[$; si $x\in[0,2]$, on a

$$F(x)=\frac{3}{4}\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)$$

et elle vaut 1 si $x\ge 2$.

Tracés de la densité et de la fonction de répartition sur $[0,2]$.





d) On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \\
&= \int_0^2 \frac{3}{4} x^2 (2-x)\, dx \\
&= \frac{3}{4}\Big[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big]_0^2 = 1
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx \\
&= \int_0^2 \frac{3}{4} x^3 (2-x)\, dx \\
&= \frac{3}{4}\Big[\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5}\Big]_0^2 = \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

On a donc $\mathbf{Var}(X) = 1/5$.
e) $\mathbf{P}(X \leq 1/2) = F(1/2) = 5/32 \simeq 0.156$ et

$$\mathbf{P}\Big[\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{4}{3}\Big] = F\left(\frac{4}{3}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$