L1 MASS, UE25 - UCBL - 2007-2008

Correction de l'examen de probabilités du 2 juin 2008.

Questions de cours

1. Définition 23 p. 19
2. Définition 40 p. 48
3. Définition 50 p. 81
4. La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbf{N}$ et on a pour tout $n \in N$,

$$\mathbf{P}(X = n) = \sum_{k \in \mathbf{N}} p_{nk}.$$

La vairable aléatoire $X + Y$ est à valeurs dans $\mathbf{N}$ et on a, pour tout $j \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{P}(X + Y = j) = \sum_{n=0}^{j} \mathbf{P}(X = n, Y = j - n) = \sum_{n=0}^{j} p_{n,j-n}.$$

On a également

$$\mathbf{P}(X + Y = j) = \sum_{k=0}^{j} \mathbf{P}(X = j - k, Y = k) = \sum_{k=0}^{j} p_{j-k,k}.$$

5. Définition 63 p. 96
6. On a

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{2} \mathbb{1}[0,2](x)\ dx = \int_0^2 x\ dx = 1.$$

On a également

$$\mathbf{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{2} \mathbb{1}[0,2](x)\ dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2\ dx = \frac{4}{3}.$$

On obtient donc

$$\mathrm{var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = 1/3.$$

On a

$$\mathbf{P}(1 \leq Z \leq 3) = \int_1^3 \frac{1}{2} \mathbb{1}[0,2](x)\ dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\ dx = \frac{1}{2}.$$

Exercice 1

1. Les X_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/4$. Si le candidat répond totalement au hasard aux 40 questions, les X_i sont indépendantes. On est donc dans le cadre d'un schéma de Bernoulli.

2. On a
$$S = \sum_{i=1}^{4} 0X_i.$$
Le nombre S de bonnes réponses suit donc une loi binomiale de paramètres $(40, 0.25)$. On a
$$\mathbf{P}(S = k) = \binom{40}{k} 0.25^k 0.75^{40-k} = \binom{40}{k} 0.25^{40} 3^{40-k}.$$

3.
$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S \geq 38) &= \mathbf{P}(S = 38) + \mathbf{P}(S = 39) + \mathbf{P}(S = 40) \\ &= 0.25^{40} \left(\frac{40 \times 39}{2} 3^2 + 40 \times 3 + 1 \right) \\ &= 0.25^{40} \times 7141 \simeq 5.91 \times 10^{-21} \end{aligned}$$

4. L'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson est bonne si $n \geq 50$, $p \leq 0.1$, $np \leq 10$. Les conditions ne sont pas ici réalisées.

Exercice 2.

1. Une fois fixé le nombre de poissons pêchés dans la journée, on est dans le cadre d'un schéma de Bernoulli : les tailles des Poissons sont indépendantes les unes des autres, donc leurs rejets aussi. Si on note Z_i=1 si le i^{e} poisson pêché est de taille suffisante, les Z_i sont des variables aléatoires indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre 0.7. Le nombre de poissons non rejetés, sachant que n ont été pêchés, suit donc une loi binomiale de paramètre (n, p).
2. D'après la question précédente, on a pour tout (k, n) vérifiant $0 \leq k \leq n$,
$$\mathbf{P}(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} 0.7^k 0.3^{n-k}.$$
et on sait que cette probabilité est nulle si $k > n$ ou si $k < 0$. Puisque
$$\mathbf{P}(Y = k, X = n) = \mathbf{P}(Y = k | X = n)\mathbf{P}(X = n),$$
on aura $\mathbf{P}(Y = k, X = n) = 0$ si $k < 0$ ou si $k > n$, ou si $n < 0$.
3. On utilise la formule des probabilités totales : les événements $(\{X = n\})_{n \geq 0}$ constituent une partition de Ω donc
$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y = k) &= \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(Y = k | X = n)\mathbf{P}(X = n) \\ &= \sum_{n < k} \mathbf{P}(Y = k | X = n)\mathbf{P}(X = n) + \sum_{n \geq k} \mathbf{P}(Y = k | X = n)\mathbf{P}(X = n) \end{aligned}$$
La première somme est nulle (cf question précédente) et on utilise le fait que X suit

une loi de Poisson d'espérance (et donc de paramètre) 15 :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y=k) &= 0+\sum_{n\geq k}\binom{n}{k}0.7^k 0.3^{n-k}e^{-15}\frac{15^n}{n!}\\
&= \frac{e^{-15}}{k!}\sum_{n\geq k}\frac{1}{(n-k)!}0.7^k 0.3^{n-k}15^k 15^{n-k}\\
&= \frac{e^{-15}}{k!}0.7^k 15^k \sum j\geq 0\frac{4.5^j}{j!}\\
&= \frac{e^{-15}}{k!}10.5^k e^{4.5}\\
&= e^{-10.5}\frac{10.5^k}{k!}
\end{aligned}
$$

Le nombre de poissons conservés suit donc une loi de Poisson de paramètre 10.5. On a donc $\mathbf{E}(Y)=\mathrm{var}(Y)=10.5$.

4. X et Y ne sont pas indépendantes. On a par exemple

$$\mathbf{P}(X=0,Y=0)=\mathbf{P}(X=0)=e^{-15}$$

et

$$\mathbf{P}(X=0)\times\mathbf{P}(Y=0)=e^{-15}\times e^{-10.5},$$

donc $\mathbf{P}(X=0,Y=0)\neq\mathbf{P}(X=0)\times\mathbf{P}(Y=0)$.

Exercice 3. 1. Une densité est une fonction positive dont l'intégrale sur $\mathbf{R}$ est égale à 1. Le réel a est donc déterminé par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ax(x-2)\mathbb{1}_{[0,2]}(x)\ dx=1.$$

On découpe l'intégrale en trois intervalles : $]-\infty,0[$, $[0,2]$ et $]2,+\infty[$. La fonction f étant nulle sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx=\int_0^2 ax(x-2)\ dx=a\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2=-a\frac{4}{3}.$$

On a donc $a=-3/4$. La fonction f est bien positive sur $[0,2]$.
2. et 3. La fonction de répartition de X est

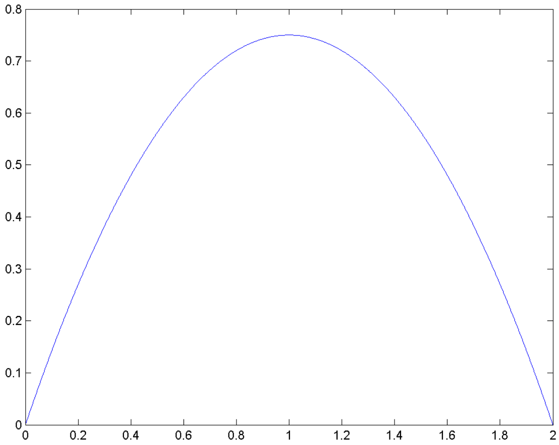
$$F(x)=\mathbf{P}(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt.$$

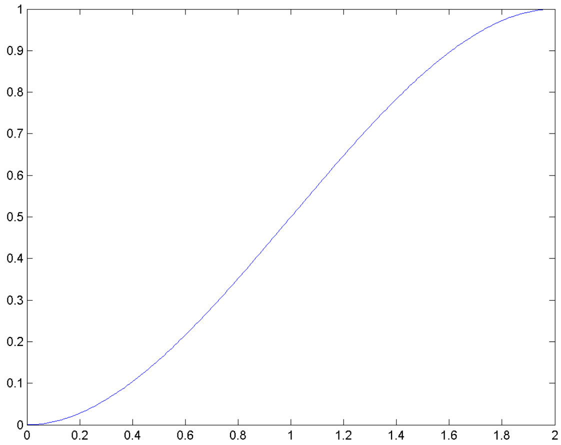
La fonction F est donc nulle sur $]-\infty,0[$; si $x\in[0,2]$, on a

$$F(x)=\frac{3}{4}\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)$$

et elle vaut 1 si $x\geq 2$.

Tracés de la densité et de la fonction de répartition sur $[0, 2]$.





4. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \\
&= \int_0^2 \frac{3}{4} x^2 (2-x)\, dx \\
&= \frac{3}{4}\Big[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big]_0^2 = 1
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx \\
&= \int_0^2 \frac{3}{4} x^3 (2-x)\, dx \\
&= \frac{3}{4}\Big[\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5}\Big]_0^2 = \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{var}(X) = 1/5$.
e) $\mathbf{P}(X \leq 1/2) = F(1/2) = 5/32 \simeq 0.156$ et

$$\mathbf{P}\Big[\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{4}{3}\Big] = F\left(\frac{4}{3}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$