ISFA 2$^{\text{e}}$ année
Processus Stochastiques
Examen du 19 janvier 2005

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Les deux parties de l'exercice 1 sont indépendantes et l'exercice 2 est indépendant de l'exercice 1.

Questions de cours

1. Énoncer le théorème central limite.
2. Soient $(M_t)_{t\geq 0}, (N_t)_{t\geq 0}$ deux martingales continues de carrés intégrables.
   - Soient g et h deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Écrire $g(M_t)$ à l'aide de la formule de Itô. Quelle est la partie martingale ? Quelle est la partie à variations bornées ? Donner une expression intégrale de $\langle g(M)\rangle_t$ et de $\langle g(M), h(N)\rangle_t$.
   - Soit maintenant $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Énoncer la formule de Itô appliquée à $f(M_t, N_t)$. Écrire $\langle f(M,N)\rangle_t$ comme une intégrale faisant intervenir $d\langle M\rangle_s$, $d\langle N\rangle_s$ et $d\langle M, N\rangle_s$.

Exercice 1 : **Partie A**. Soit $(M_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue, de carré intégrable et vérifiant $M_0 = 0$ p.s.. On suppose que sa variation quadratique de $(M_t)_t$, notée comme d'habitude $\langle M\rangle_t$, est strictement croissante et que $\lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t = \infty$. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe un mouvement brownien réel (X_t) tel que $M_t = X_{\langle M\rangle_t}$.

1. On note, pour tout $u \geq 0$, $\tau(u) = \inf\{t \geq 0, \langle M\rangle_t \geq u\}$. Expliquer pourquoi $\tau(u)$ est un temps d'arrêt pour tout u fixé.
2. Montrer que, pour tout $u > 0$ fixé, $\mathbf{P}(\tau(u) < \infty) = 1$.
3. Montrer que, presque sûrement, la fonction $u \to \tau(u)$ est continue et strictement croissante.
4. On pose, pour tout $u \geq 0$, $X_u = M_{\tau(u)}$. Déduire de la question précédente que, presque sûrement, $(X_u)_{u\geq 0}$ est un processus continu.
5. On suppose que les hypothèses du théorème de Doob sont remplies. En déduire que $\mathbf{E}(X_u|\mathcal{F}_{\tau(v)}) = X_v$, pour tous $0 \leq v \leq u$.
6. Montrer de même (sans vérifier les hypothèses nécessaires) que $(X_u^2 - u)_{u\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_{\tau(u)}$–martingale.
7. Conclure que $(X_u)_{u\geq 0}$ est un mouvement brownien réel.

Partie B. Soit $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^2$, tel que $(X_0, Y_0) = (1, 0)$. On écrit (X_t, Y_t) sous forme polaire, c'est-à-dire que l'on note $R_t = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2}$ et on définit le processus angulaire Z_t par $Z_0 = 0$ et $Z_t = \arctan(Y_t/X_t)$, où on choisit une détermination continue de l'angle. On aura alors $X_t = R_t \cos Z_t$ et $Y_t = R_t \sin Z_t$. On note ensuite $\rho_t = \ln R_t = \frac{1}{2}\ln(X_t^2 + Y_t^2)$. L'événement $\{\exists t \in \mathbb{R}^+, X_t = Y_t = 0\}$ étant de probabilité nulle, les processus $(\rho_t)_{t\geq 0}$ et $(Z_t)_{t\geq 0}$ sont bien définis et sont continus.

On rappelle que la dérivée de $\arctan u$ est égale à $u'/(1 + u^2)$.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Écrire la formule de Itô pour $f(X_t, Y_t)$. En déduire une forme intégrale de $\langle f(X_., Y_.)\rangle$.
2. En déduire que $(\rho_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.
3. Donner une forme intégrale de $\langle \rho\rangle_t$.

4. Montrer que $\widetilde{Z}_t = \int_0^t \dfrac{X_s\, dY_s - Y_s\, dX_s}{X_s^2 + Y_s^2}$ coïncide avec Z_t. En déduire que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.
5. Montrer que $\langle \rho \rangle_t = \langle Z \rangle_t$.
6. Calculer $\langle \rho, Z \rangle_t$.
7. On considère les instants σ_k définis par $\sigma_1 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$\sigma_{2n} = \inf\{t \geq \sigma_{2n-1}, R_t \leq 1/2\} \text{ et } \sigma_{2n+1} = \inf\{t \geq \sigma_{2n}, R_t \geq 1\}.$$

   On rappelle que les instants σ_k sont tous presque sûrement finis. Montrer en utilisant la propriété de Markov que les variables aléatoires $(\sigma_{2n+1} - \sigma_{2n})_{n\geq 1}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
8. Montrer que $\int_0^{+\infty} ds/R_s^2 \geq \sum_{n\geq 1}(\sigma_{2n+1} - \sigma_{2n})$.
9. En déduire que $\lim_{t\to\infty} \langle \rho \rangle_t = +\infty$ p.s..
10. On note $\tau(u) = \inf\{t, \langle \rho \rangle_t \geq u\}$ et $W_u^{(1)} = \rho_{\tau(u)}$, $W_u^{(2)} = Z_{\tau(u)}$. La partie A (question 7) permet d'affirmer que les processus $W_u^{(1)}$ et $W_u^{(2)}$ sont des mouvements browniens. D'après la question B6), que vaut $\langle W_\cdot^{(1)}, W_\cdot^{(2)} \rangle_u$?
11. Conclure que le processus $(W_u^{(1)}, W_u^{(2)})_{u\geq 0}$ est un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On suppose que les (X_n) sont positives et intégrables.

On se donne également une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi exponentielle d'espérance $1/\lambda$. Pour tout $n \geq 1$, on notera $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z_n ; en déduire $\mathbf{E}(Z_n^2)$.
2. Quelle est la loi de Z_n ? Donner sa densité.
3. Donner la densité du couple (Z_1, Z_2). Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
4. En déduire que pour tout $x \geq 0$, $\mathbf{P}(Z_1 < x \leq Z_2) = \lambda x e^{-\lambda x}$.
5. Expliciter la loi du couple (Z_k, Z_{k+1}) et en déduire que, pour tout $x \geq 0$,

$$\mathbf{P}(Z_k < x \leq Z_{k+1}) = \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}$$

6. Établir que, pour tout $k \leq N - 1$, le triplet (Z_k, Z_{k+1}, Z_N) admet pour densité

$$(r, s, t) \to \frac{\lambda^N}{(N-k-2)!(k-1)!} r^{k-1}(t-s)^{N-k-2} e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{0\leq r\leq s\leq t}.$$

7. En déduire que, pour tout $1 \leq k \leq N - 1$ et pour tous nombres réels positifs x et y,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_k < x \leq Z_{k+1} \text{ et } Z_N \leq x + y) &= \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} \int_0^y \frac{\lambda^{N-k} t^{N-k-1}}{(N-k-1)!} e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} \mathbf{P}(Z_{N-k} \leq y). \end{aligned}$$

8. En déduire que, pour tout $1 \leq k \leq N - 1$ et pour tous nombres réels positifs x et y, on a

$$\mathbf{P}(Z_k < x \leq Z_{k+1} \text{ et } Z_N \geq x + y) = \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda k} \mathbf{P}(Z_{N-k} \geq y)$$

9. Déduire de la question précédente que

$$\mathbf{P}(Z_k < X_1 \leq Z_{k+1} \text{ et } Z_N \geq X_1 + X_2) = \mathbf{E}\left(\frac{(\lambda X_1)^k}{k!} e^{-\lambda X_1}\right) \mathbf{P}(Z_{N-k} \geq X_1)$$

et

$$\mathbf{P}(Z_k < X_1 \leq Z_{k+1} \text{ et } Z_N \geq X_1 + \cdots + X_n) = \mathbf{E}\left(\frac{(\lambda X_1)^k}{k!} e^{-\lambda X_1}\right) \mathbf{P}(Z_{N-k} \geq X_1 + \cdots + X_{n-1}).$$

10. On note

$$R(t) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{[0,t]}(X_1 + \cdots + X_n) \quad \text{et} \quad V_p = R(Z_p).$$

Montrer que

$$\mathbf{E}(V_p) = \int_0^{+\infty} \mathbf{E}(R_u) \; d(Z_p(\mathbf{P}))(u).$$

11. En appliquant le théorème du renouvellement, montrer que $\mathbf{E}(V_p)$ est finie.
12. On note $m(p) = \mathbf{E}(V_p)$. Montrer que, pour tout $N \geq 2$ et tout $1 \leq k \leq N-1$, on a

$$\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(Z_k < X_1 \leq Z_{k+1} \text{ et } Z_N \geq X_1 + \cdots + X_n) = (1 - m(N-k))\mathbf{E}\left(\frac{(\lambda X_1)^k}{k!} e^{-\lambda X_1}\right).$$

13. Montrer que $m(1) = \mathbf{E}(\exp(-\lambda X_1))/(1 - \mathbf{E}(\exp(-\lambda X_1)))$.
14. Montrer, en utilisant la question 11), que pour tout $N \geq 2$,

$$m(N) = \sum_{k=0}^{N-1} (1 - m(N-k))\mathbf{E}\left(\frac{(\lambda X_1)^k}{k!} e^{-\lambda X_1}\right).$$