Université Claude Bernard Lyon 1
ISFA 2° année
Année 2005-2006

Processus stochastiques : fiche n° 1

Exercice 1 : On considère la chaîne de Markov sur l'espace d'états $\{1,2\}$ dont la matrice de transition est la suivante :

$$\Pi = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

où $p, q \in [0,1]$ sont fixés.

1. Dans quel cas cette chaîne n'est-t-elle pas irréductible ?
2. Déterminer la (ou les) mesures stationnaires.
3. On note $a_n = \mathbf{P}(X_n = 1)$ et $b_n = \mathbf{P}(X_n = 2)$. Écrire une relation de récurrence pour les couples (a_n, b_n), et la résoudre.
4. Étudier alors le comportement asymptotique de $\mathbf{P}(X_n = 1)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 2 : Soit X_n une chaîne de Markov homogène sur l'ensemble $E_4 = \{1,2,3,4\}$ de matrice de transition Π_1

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Est-ce une chaîne de Markov irréductible ?
2. Déterminer les éléments de E transients ou récurrents pour cette chaîne et la période de chacun de ces points.
3. Déterminer la ou les mesures stationnaires de cette chaîne.

Exercice 3 : Répondre aux mêmes questions que dans l'exercice précédent pour les chaînes de Markov suivantes

- sur $E_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$ de matrice de transition Π_2

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- sur E_6 toujours, de matrice de transition Π_3

$$\Pi_3 = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

– sur $E_5 = \{1,2,3,4,5\}$, de matrice de transition Π_4

$$\Pi_4 = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Soit $Y_k\colon (\Omega, \Sigma, \mathbf{P}) \to \{-1,+1\}$ une suite de vaiid vérifiant $\mathbf{P}(Y_k = 1) = p$, et $\mathbf{P}(Y_k = -1) = q = 1-p$. On note $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ pour tout $n \geq 1$ et $X_0 = 0$.
On considère τ le premier instant d'attaiente de -1 : $\tau = \inf\{n, X_n = -1\}$.
On note $\phi_n = \mathbf{P}(\tau = n)$ et $\Phi(s) = \sum \phi_n s^n$.

1. Montrer que $\phi_1 = q$, $\phi_2 = 0$ et pour tout $n \geq 3$, on a :

$$\phi_n = p(\phi_1\phi_{n-2} + \phi_2\phi_{n-3} + \cdots + \phi_{n-2}\phi_1).$$

   On pourra décomposer l'événement $\{\tau = n\}$, pour tout $n > 1$ en :
   – X_1 vaut 1,
   – on met $m-1$ coups pour revenir à l'équilibre,
   – on met ensuite $n-m$ coups pour atteindre -1.
2. En déduire que Φ vérifie : $\Phi(s) = qs + ps\Phi^2(s)$ et résoudre l'équation.
3. Montrer que si $q \geq p$, $\Phi(1) = 1$ et si $q < p$, $\Phi(1) = q/p$.
4. Calculer ϕ_{2k} et ϕ_{2k-1}.
5. Retrouver que, pour un jeu équitable ($p = q$), l'instant moyen du premier gain (ou de la première perte) est infini.
6. On note, pour tout entier $k > 0$, τ_k le premier instant de passage de X_n par $-k$, $\phi_n^{(k)} = \mathbf{P}(\tau_k = n)$ et $\Phi^{(k)}(s) = \sum \phi_n^{(k)} s^n$. Montrer que $\Phi^{(k)}(s) = (\Phi(s))^k$.