

Exercice 1 :

1. Soient $(X_n)_{n \geq 0}$ une \mathcal{F}_n -martingale et $p \geq 1$. On suppose que pour tout n , $X_n \in L^p$. Montrer que $(|X_n|^p)_{n \geq 0}$ est une sous-martingale.
2. On considère une martingale (X_n) par rapport à une filtration \mathcal{F}_n et N un temps d'arrêt pour cette filtration. Montrer que $(X_{N \wedge n})_{n \geq 0}$ est une martingale.
3. On suppose que (X_n) et (Y_n) sont deux \mathcal{F}_n -surmartingales et que N est un temps d'arrêt vérifiant p.s. : $X_N \geq Y_N$. Montrer que $Z_n = X_n \mathbf{1}_{N > n} + Y_n \mathbf{1}_{N \leq n}$ est une surmartingale.

Exercice 2 : Inégalité de Doob-Kolmogorov. Soit (M_n) une \mathcal{F}_n -martingale à valeurs réelles et de carré intégrable. Montrer, pour tout $\varepsilon > 0$ l'inégalité suivante :

$$\mathbf{P}(\max_{k \leq n} |M_k| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E}M_n^2.$$

Exercice 3 : Une urne contient une boule noire et une boule rouge. À chaque tirage, on tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée d'une boule de la même couleur et on recommence. On note R_n le nombre de boules rouges après le $n^{\text{ième}}$ tirage.

1. Montrer que $R_n/(n+2)$ est une martingale (on précisera pour quelle filtration).
2. En déduire que le quotient du nombre de boules rouges et du nombre de boules noires converge presque sûrement.
3. Soit T le nombre de boules rouges tirées avant de tirer la première boule noire. Montrer que $T+1$ est un temps d'arrêt et en déduire que $\mathbf{E}(1/(T+3)) = 1/4$.

Exercice 4 : Soit $X_n : (\Omega, \Sigma, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de v.a.i.i. intégrables. On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $T_n = S_n/n$ et $\mathcal{F}_n = \sigma\{S_{n+1}, S_{n+2}, \dots\}$. Montrer que $\mathbf{E}(T_n | \mathcal{F}_n) = T_{n+1}$. (On dit alors que T_n est une martingale rétrograde.)

Exercice 5 : Soit $(X_n)_{\{n \geq 0\}}$ une sous-martingale par rapport à une filtration \mathcal{F}_n . On se donne deux nombres réels a et b , $a < b$, et on note

$$N_0 \equiv 1 \text{ p.s.}$$

$$\text{et pour } k \geq 1, \quad N_{2k-1} = \inf\{m > N_{2k-2}, X_m \leq a\}$$

$$N_{2k} = \inf\{m > N_{2k-1}, X_m \geq b\}$$

1. Montrer que les N_j , s'ils sont p.s. finis, forment une famille de temps d'arrêt.
2. Montrer que $Y_n = (X_n - a)^+$ est une \mathcal{F}_n -sous-martingale.
3. On note U_n le nombre de "traversées" de l'intervalle $[a, b]$ par X_k avant l'instant n , c'est-à-dire,

$$U_n = \sup\{k, N_{2k} \leq n\}.$$

Montrer que U_n représente également le nombre de traversée de l'intervalle $[0, b-a]$ par Y_k avant l'instant n .

4. On définit, pour tout $m \geq 0$, H_m par : $H_m = 1$ s'il existe un entier k tel que $N_{2k-1} < m \leq N_{2k}$ et $H_m = 0$ sinon. On note

$$Z_n = \sum_{m=1}^n H_m (Y_m - Y_{m-1}).$$

Montrer que $(b-a)U_n \leq Z_n$.

5. Montrer que $Y_n - Z_n$ est une sous-martingale et conclure que $(b-a)\mathbf{E}U_n \leq \mathbf{E}(X_n - a)^+ - \mathbf{E}(X_0 - a)^+$.
6. On suppose de plus que $\sup \mathbf{E}X_n^+ < \infty$. Montrer que $U = \lim U_n$ existe et est presque sûrement fini. En déduire que pour tous réels $a < b$, on a

$$\mathbf{P}(\liminf X_n \leq a < b \leq \limsup X_n) = 0.$$

7. Conclure finalement que X_n converge presque sûrement.