Université Claude Bernard Lyon 1
ISFA 2° année
Année 2005-2006

Processus stochastiques : fiche n° 3

Exercice 1 : Soient (X, Y) un couple gaussien centré de v.a.. On suppose que $\mathbf{E}X^2 = \mathbf{E}Y^2 = 1$ et $\mathbf{E}XY = \cos\alpha$ avec $|\cos\alpha| \neq 1$.

1. Donner la densité du couple (X, Y) par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\mathbf{E}(X|Y)$.
3. Expliciter la densité de la loi conditionnelle $\mathbf{P}(X \in . \,|Y = y)$.

Exercice 2 : Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de moyenne $m = (a, b, c)$ et de matrice de covariance

$$C = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } 0 < t_1 < t_2 < t_3.$$

1. Calculer $\mathbf{E}(X_1|X_2, X_3)$.
2. Expliciter la densité de la loi conditionnelle $\mathbf{P}((X_1, X_3) \in . \,|X_2 = u)$, où u est un réel fixé.

Exercice 3 :

1. Soit $\overline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance
$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
La loi du vecteur $\overline{X}$ est-elle absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$? Montrer que l'on a p.s. $X_3 \equiv X_1$ et donner la mesure image $\overline{X}(P)$. Calculer les espérances conditionnelles $\mathbf{E}(X_1|X_2)$ et $\mathbf{E}(X_1|X_3)$.
2. Plus généralement, montrer que si la matrice de covariance Γ d'un vecteur gaussien $\overline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ n'est pas inversible, il existe des réels non tous nuls $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ tels que
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \equiv 0 \text{ p.s. }.$$
Ce résultat est-t-il encore vrai si le vecteur $\overline{X}$ n'est pas gaussien ?

Exercice 4 :

1. Montrer que la matrice Γ ci–dessous est une matrice symétrique définie positive.
$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
2. Soit $\overline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de moyenne $\overline{m} = (1, 1, -1)$ et de matrice de covariance Γ.
   (a) Expliciter les espérances conditionnelles $\mathbf{E}(X_2|X_1, X_3)$ et $\mathbf{E}(X_1, X_2|X_3)$.
   (b) Expliciter les probabilités conditionnelles
   $$\begin{aligned} &\mathbf{P}(X_2 \in \;. \,|X_1 = X_3 = 0) \\ \text{et} \quad &\mathbf{P}((X_1, X_2) \in \;. \,|X_3 = 1). \end{aligned}$$
   Ces lois sont-elles absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue (respectivement sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$) ? Si oui, donner leurs densités.