

**Exercice 1** : Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien réel issu de  $x$ . On se donne deux nombres réels  $a$  et  $b$  vérifiant  $a < x < b$  et on note  $T = \inf\{t > 0, B_t = a \text{ ou } B_t = b\}$ .

1. Montrer que, pour tout  $y > 0$  fixé,  $\mathbf{P}(|B_t| \leq y)$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .
2. En déduire que  $T < \infty$  p.s.
3. Expliquer pourquoi  $T$  est un temps d'arrêt.
4. Quelles sont les valeurs prises par  $B_T$  ?
5. Calculer  $\mathbf{E}_x(B_T)$  en appliquant le théorème d'arrêt de Doob. En déduire que  $\mathbf{P}_x(B_T = a) = (b - x)/(b - a)$  et  $\mathbf{P}_x(B_T = b) = (x - a)/(b - a)$ .
6. En faisant tendre  $a$  vers  $-\infty$ , montrer que  $\mathbf{P}_x(\exists t, B_t = b) = 1$ .

**Exercice 2** : Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien réel standard issu de 0. On fixe  $a > 0$  et on note  $T_a = \inf\{s \geq 0, B_s \geq a\}$ . On rappelle (cf exercice 1) que  $T_a$  est un temps d'arrêt presque sûrement fini.

1. Quelle est la loi de  $B_{T_a+s}$  ?
2. Montrer que  $T_{2a} - T_a$  et  $T_a$  sont deux variables aléatoires indépendantes et de même loi.
3. Montrer que

$$\mathbf{P}_0(T_a \leq t, B_t < a) = \frac{1}{2}\mathbf{P}_0(T_a \leq t).$$

4. En écrivant  $\{T_a \leq t\} = \{B_t \geq a\} \cup \{T_a \leq t, B_t < a\}$ , montrer que  $\mathbf{P}_0(T_a \leq t) = 2\mathbf{P}_0(B_t \geq a)$ .
5. En déduire que  $T_a$  admet une densité que l'on précisera.
6. Vérifier et expliquer pourquoi  $T_a$  et  $a^2 T_1$  sont de même loi.

**Exercice 3** :

1. Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$  est une martingale. Que vaut  $\langle B \rangle_t$  ?
2. Soit maintenant  $(\bar{B}_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien sur  $\mathbb{R}^d$ . Montrer que  $(\|\bar{B}_t\|^2 - dt)_{t \geq 0}$  est une martingale.
3. On fixe  $r > 0$  et on note  $T = \inf\{t \geq 0, \|\bar{B}_t\| = r\}$ . Utiliser le théorème d'arrêt de Doob pour montrer que  $E_x(T) = (r^2 - \|x\|^2)/d$ .
4. Pour  $(B_t)$  un mouvement réel standard et  $\theta$  un réel fixé, vérifier que  $\exp(\theta B_t - \theta^2 t/2)$  est une martingale et en déduire l'expression de  $\mathbf{E}(\exp(-\lambda t))$ .