Processus stochastiques : fiche n° 5

Un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$ est un d-uplet formé de d mouvements browniens réels indépendants.

Exercice 1 : *Temps de sortie d'un anneau*

1. Soit $B_t = (X_t, Y_t)$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^2$, issu de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On notera $\mathcal{F}_t$ sa filtration naturelle. Pour tous $0 \leq r < R$, on notera

$$S_r = \inf\{t \geq 0, \|B_t\| = r\} \text{ et } S_R = \inf\{t \geq 0, \|B_t\| = R\}.$$

   On pose encore $T = \min(S_r, S_R)$.
   (a) Montrer que T est un temps d'arrêt.
   (b) En utilisant la formule de Itô, montrer que le processus $\log(X_t^2 + Y_t^2)$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes la valeur de $\mathbf{P}_x(S_r \leq S_R)$.
   (d) Qu'obtient-on lorsque $R \to \infty$?
2. On considère maintenant un mouvement brownien (B_t) sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, issu de $x \in \mathbb{R}^d$. On notera à nouveau S_r le premier temps d'atteinte de la sphère de centre 0 et de rayon r. Reprendre les questions précédentes, en remplaçant la deuxième par : montrer que $\|B_t\|^{2-d}$ est une martingale. Que conclut-on maintenant ?

Exercice 2 : *Une autre formule de Itô.* Soit $X = M + A$ est une semi-martingale dont la partie martingale est M. On notera $Y_t = \langle X \rangle_t$. On rappelle que $\langle X \rangle_t = \langle M \rangle_t$, et qu'il en va de même pour les crochets croisés de deux semi-martingales.

1. Calculer $\langle Y \rangle_t$ et $\langle X, Y \rangle_t$.
2. En utilisant la formule de Itô pour les semi-martingales, montrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$\begin{aligned} f(X_t, \langle X \rangle_t) &= f(X_0, 0) + \int_0^t D_1 f(X_s, \langle X \rangle_s)\, dX_s + \int_0^t D_2 f(X_s, \langle X \rangle_s)\, d\langle X \rangle_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t D_{11} f(X_s, \langle X \rangle_s)\, d\langle X \rangle_s \end{aligned}$$

3. Montrer que si (B_t) est un mouvement brownien issu de 0, $(B_t^2 - t)$, $(B_t^3 - 3tB_t)$, $(B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2)$ sont des martingales.
4. Pour un réel non nul a fixé, on note $\tau = \inf\{t \geq 0, |B_t| = a\}$. Calculer $\mathbf{E}_0(\tau)$ et $\mathbf{E}_0(\tau^2)$ à l'aide du théorème de Doob.
5. Soit (X_t) une martingale continue. Montrer, avec la formule de Itô que $\exp(X_t - \langle X \rangle_t / 2)$ est une martingale.
6. Qu'obtient-on dans le cas où (X_t) est un mouvement brownien réel (B_t), ou encore lorsque $(X_t) = (\lambda B_t)$? Retrouver ce résultat directement.
7. Soit $T_a = \inf\{t, B_t = a\}$, où (B_t) est un mouvement brownien issu de 0. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\mathbf{E}_0 \exp(-\lambda T_a) = \exp(-a\sqrt{2\lambda})$
8. On note $\psi_a(\lambda) = \mathbf{E}_0(\exp(-\lambda T_a))$ (avec les mêmes notations que dans les questions précédentes).
   (a) En utilisant la propriété de Markov forte, montrer que

$$\mathbf{E}_0 \exp(-\lambda T_a) = \mathbf{E}_0(\exp(-\lambda \tau) \mathbf{1}_{B_\tau = a}) + \mathbf{E}_0(\exp(-\lambda \tau) \psi_{2a}(\lambda) \mathbf{1}_{B_\tau = -a}).$$

   (b) Montrer que τ et B_τ sont indépendants.

(c) En déduire que $\psi_a(\lambda) = (1 + \psi_{2a}(\lambda))\mathbf{E}_0(\exp(-\lambda\tau))/2$.

(d) En déduire la valeur de $\mathbf{E}_0 \exp(-\lambda\tau)$.

Exercice 3 : Partie A. Soit $(M_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue, de carré intégrable et vérifiant $M_0 = 0$ p.s.. On suppose que sa variation quadratique de $(M_t)_t$, notée comme d'habitude $\langle M\rangle_t$, est strictement croissante et que $\lim_{t\to\infty}\langle M\rangle_t = \infty$. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe un mouvement brownien réel (X_t) tel que $M_t = X_{\langle M\rangle_t}$.

1. On note, pour tout $u \geq 0$, $\tau(u) = \inf\{t \geq 0, \langle M\rangle_t \geq u\}$. Expliquer pourquoi $\tau(u)$ est un temps d'arrêt pour tout u fixé.
2. Montrer que, pour tout $u > 0$ fixé, $\mathbf{P}(\tau(u) < \infty) = 1$.
3. Montrer que, presque sûrement, la fonction $u \to \tau(u)$ est continue et strictement croissante.
4. On pose, pour tout $u \geq 0$, $X_u = M_{\tau(u)}$. Déduire de la question précédente que, presque sûrement, $(X_u)_{u\geq 0}$ est un processus continu.
5. On suppose que les hypothèses du théorème de Doob sont remplies. En déduire que $\mathbf{E}(X_u|\mathcal{F}_{\tau(v)}) = X_v$, pour tous $0 \leq v \leq u$.
6. Montrer de même (sans vérifier les hypothèses nécessaires) que $(X_u^2 - u)_{u\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_{\tau(u)}$–martingale.
7. Conclure que $(X_u)_{u\geq 0}$ est un mouvement brownien réel.

Partie B. Soit $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^2$, tel que $(X_0, Y_0) = (1, 0)$. On écrit (X_t, Y_t) sous forme polaire, c'est-à-dire que l'on note $R_t = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2}$ et on définit le processus angulaire Z_t par $Z_0 = 0$ et $Z_t = \arctan(Y_t/X_t)$, où on choisit une détermination continue de l'angle. On aura alors $X_t = R_t \cos Z_t$ et $Y_t = R_t \sin Z_t$. On note ensuite $\rho_t = \ln R_t = \frac{1}{2}\ln(X_t^2 + Y_t^2)$. L'événement $\{\exists t \in \mathbb{R}^+, X_t = Y_t = 0\}$ étant de probabilité nulle, les processus $(\rho_t)_{t\geq 0}$ et $(Z_t)_{t\geq 0}$ sont bien définis et sont continus.

On rappelle que la dérivée de $\arctan u$ est égale à $u'/(1 + u^2)$.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Écrire la formule de Itô pour $f(X_t, Y_t)$. En déduire une forme intégrale de $\langle f(X_., Y_.)\rangle$.
2. En déduire que $(\rho_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.
3. Donner une forme intégrale de $\langle \rho\rangle_t$.
4. Montrer que $\widetilde{Z}_t = \int_0^t \dfrac{X_s\, dY_s - Y_s\, dX_s}{X_s^2 + Y_s^2}$ coïncide avec Z_t. En déduire que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.
5. Montrer que $\langle \rho\rangle_t = \langle Z\rangle_t$.
6. Calculer $\langle \rho, Z\rangle_t$.
7. On considère les instants σ_k définis par $\sigma_1 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,
$$\sigma_{2n} = \inf\{t \geq \sigma_{2n-1}, R_t \leq 1/2\} \text{ et } \sigma_{2n+1} = \inf\{t \geq \sigma_{2n}, R_t \geq 1\}.$$
On rappelle que les instants σ_k sont tous presque sûrement finis. Montrer en utilisant la propriété de Markov que les variables aléatoires $(\sigma_{2n+1} - \sigma_{2n})_{n\geq 1}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.
8. Montrer que $\int_0^{+\infty} ds/R_s^2 \geq \sum_{n\geq 1}(\sigma_{2n+1} - \sigma_{2n})$.
9. En déduire que $\lim_{t\to\infty}\langle \rho\rangle_t = +\infty$ p.s..
10. On note $\tau(u) = \inf\{t, \langle \rho\rangle_t \geq u\}$ et $W_u^{(1)} = \rho_{\tau(u)}$, $W_u^{(2)} = Z_{\tau(u)}$. La partie A (question 7) permet d'affirmer que les processus $W_u^{(1)}$ et $W_u^{(2)}$ sont des mouvements browniens. D'après la question B6), que vaut $\langle W_.^{(1)}, W_.^{(2)}\rangle_u$?
11. Conclure que le processus $(W_u^{(1)}, W_u^{(2)})_{u\geq 0}$ est un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^2$.