Pôle de Mathématiques

Département Génie Électrique – 3ème année

TP 1 en Analyse numérique : Sensibilisation à l'erreur numérique

Exercice 1 (A propos de ϵ)**.**

1) Tracer à l'aide de la commande `plot` la fonction

$$f(x) = \frac{(1+x)-1}{x}$$

sur l'intervalle $[0, 10^{-10}]$ en utilisant 10^5 points (on pourra utiliser la commande `linspace`). Observation ?
2) Ecrire un algorithme qui permet de déterminer le plus petit nombre réel de la forme $x = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{rd}(1+x) > 1$. Ici rd est la fonction qui associe à un nombre réel le nombre machine le plus proche.

Exercice 2 (Une suite d'Archimède)**.**
En 250 av. J.-C. Archimède de Syracuse a estimé le nombre π en déterminant les périmètres p_n des polygônes réguliers à 2^n cotés inscrits dans un cercle de diamètre 1. En particulier, $p_2 = 2\sqrt{2}$ correspond au périmètre du carré inscrit et la relation de récurrence suivante

$$p_{n+1} = 2^n \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - (p_n/2^n)^2}\right)},$$

permet de calculer de manière itérative les p_n pour tout $n > 2$.

1) Calculer et tracer les p_n, pour $n = 1, \ldots, 60$. Explication !
2) Pour stabiliser l'algorithme, il suffit de remarquer que :

$$p_{n+1} = 2^n \sqrt{r_{n+1}} \quad \text{avec} \quad r_{n+1} = 2\left(1 - \sqrt{1 - (p_n/2^n)^2}\right),$$

où r_{n+1} vérifie

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{2 + \sqrt{4 - r_n}}, \quad \text{et} \quad r_3 = 2/(2+\sqrt{2}).$$

Calculer et tracer les p_n avec cette nouvelle approche.

Exercice 3 (Un calcul d'intégrale)**.**
On souhaite maintenant estimer l'intégrale suivante

$$I_N = \int_0^1 x^N e^x dx, \qquad \text{pour} \quad N = 20.$$

1) Trouver une formule de récurrence entre I_N et I_{N-1}. En déduire une estimation numérique de I_{20}

2) A partir du développement en série entière de e^x, montrer que

$$I_{20} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(21+n)}.$$

En déduire un nouvelle approximation numérique de I_{20} en tronquant cette série.

3) Quel est la bonne estimation numérique de I_{20} ?

Exercice 4 (Une suite qui converge ?)**.**
On considère la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = 111 - \frac{(1130 - \frac{3000}{u_{n-1}})}{u_n}.$$

dont les solutions générales s'expriment sous la forme

$$u_n = \frac{\alpha 100^{n+1} + \beta 6^{n+1} + \gamma 5^{n+1}}{\alpha 100^n + \beta 6^n + \gamma 5^n}.$$

A noter que les coefficients (α, β, γ) dépendent du choix des conditions initiales u_0 et u_1.

1) On choisit le triplet $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 1)$. En déduire la limite de u_n.

3) Déterminer u_0 et u_1 puis calculer la limite de u_n obtenue numériquement à partir de la formule de récurrence. Conclusion ?