Pôle de Mathématiques 2013-2014

Département Génie Électrique – 3ème année

TP d'Analyse numérique : Méthode numérique pour la résolution de l'équation de la chaleur

L'objectif de ce TP est l'approximation numérique de l'équation de la chaleur avec un terme source f :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) + f(x) & \text{pour } (x,t) \in (0,1) \times [0,T], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \text{pour } t \in [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{pour } x \in (0,1), \end{cases}$$

Par la suite, nous utiliserons comme terme source la fonction $f(x) = 1$ et comme condition initiale la fonction

$$u_0(x) = 0.1 \sin(\pi x).$$

(a) Déterminer la limite

$$u_\infty = \lim_{t \to \infty} u(x,t).$$

Nous allons nous intéresser en particulier aux méthodes d'Euler explicite et implicite couplées avec une discrétisation spatiale par différences finies.

On note (u_i^k) l'approximation de la solution $u(x,t)$ au noeuds $(x_i, t_k) \in [0,1] \times [0,T]$ avec

$$\begin{cases} x_i = ih, & \text{pour } i = 0,1,\cdots N, \text{ et } h = 1/N, \\ t_k = k\delta_t, & \text{pour } k = 0,1,\cdots M, \text{ et } \delta_t = T/M, \end{cases}$$

On note aussi $U^{(k)} = (u_1^{(k)}, \ldots, u_{n-1}^{(k)})^t \in \mathrm{R}^{N-1}$, B le vecteur de R^{N-1} défini par $(B)_i = f(x_i)$ pour $i = 1, 2, \cdots N-1$ et A la matrice de taille $N-1$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & & \\ \ldots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \ldots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Ecrire une fonction `A = Mass(N)` qui prend en argument un entier N et qui renvoie la matrice A de taille $N-1$ décrite ci-dessus.
On pourra utiliser les commandes `eye` *et* `diag` *de* *MATLAB*

Méthode d'Euler explicite

On rappelle que la méthode d'Euler explicite conduit au système d'équations

$$U^{k+1} = \left(1 - \frac{\delta t}{h^2} A\right) U^k + \delta t B, \qquad \text{pour } k = 0 : M - 1,$$

où 1 est la matrice identité de taille $N - 1$.

(c) Déterminer une approximation de la solution de l'équation de la chaleur avec les paramètres de discrétisation suivants :

$$N = 50, T = 1 \text{ et } M = 5000.$$

On affichera l'approximation de la solution toutes les 100 *itérations.*

(d) Refaire la question précédentes avec $M = 4950$. Remarques ?

Méthode d'Euler implicite

On rappelle que la méthode d'Euler implicite conduit au système d'équations

$$\left(1 + \frac{\delta t}{h^2} A\right) U^{k+1} = U^k + \delta t B, \qquad \text{pour } k = 0 : M - 1.$$

(e) Refaire les deux questions précédentes en utilisant l'algorithme d'Euler implicite. Remarques ?