Fiche 5 : Séries de fonctions - Entraînement

Exercice 1. Montrer que les séries suivantes ne convergent pas normalement en montrant que $\sum ||f_n||_\infty$ diverge.
$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n+x^n}$ pour $x \in [1,2]$, $\sum_{n=0}^\infty \frac{\sin nx}{n}$ pour $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^\infty e^{-nx^2}$ sur $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Montrer que les séries suivantes ne convergent pas normalement en trouvant $(x_n)_n$ tel que $f_n(x_n)$ ne tend pas vers 0.
$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{xn^2}$ pour $x \in]0,\infty[$, $\sum_{n=0}^\infty 2^{-n/x}$ pour $x \in]0,\infty[$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{n+x^2}{n^4+x^2}$ pour $x \in [0,\infty[$.
(Heuristique : Si le dénominateur est la somme de deux termes positifs, l'argument x_n est souvent la valeur où les deux termes sont egaux.)

Exercice 3. Montrer que les séries suivantes ne convergent pas normalement en trouvant $(x_n)_n$ tel que $\sum |f_n(x_n)|$ diverge.
$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ pour $]0,\infty[$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{n+x^3}{n^4+x^4}$ pour $x \in [0,\infty[$.

Exercice 4. Montrer que les séries suivantes convergent normalement en montrant que $\sum ||f_n||_\infty$ converge.
$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2 x}$ pour $x \in [1,2]$, $\sum \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ pour $x \in [1,\infty[$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{n+x^2}{n^4+x^2}$ pour $x \in [0,1]$.

Exercice 5. Montrer que les séries suivantes convergent normalement en trouvant $(a_n)_n$ tel que $|f_n(x)| \leq a_n \forall x$ et $\sum a_n$ converge.
$\sum_{n=1}^\infty \frac{n+x}{n^4+x^2}$ pour $x \in [0,\infty[$, $\sum_{n=0}^\infty e^{-n(x^2+1)} + e^{-n((x+1)^2+1)}$ pour $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}$ pour $x \in [0,a]$, $a < 1$.
(Heuristique : Si le dénominateur est la somme de deux termes positifs, on trouve souvent deux majorations pour deux parties de l'intervalle en supprimant un de deux termes en faisant la différence si x est plus grand ou plus pétit que la valeur où les deux termes sont egaux.)

Exercice 6. Montrer que les séries suivantes convergent uniformement en utilisant la règle d'Abel uniforme = théorème d'Abel-Dirichlet.
$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{x+\sqrt{n}}$ pour $x \geq 0$, $\sum_{n=0}^\infty \frac{\sin(nx)}{x^2+n+1}$ pour $x \in [\pi/2,\pi]$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{ixn}}{nx}$ pour $x \in [1,\pi]$, $\sum \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ pour $x \in [0,\infty[$.

Exercice 7. Montrer que les séries suivantes ne convergent pas uniformement en trouvant $(x_n)_n$ tel que $f_n(x_n)$ ne converge pas vers 0.
$\sum_{n=0}^\infty n^2 x^n$ pour $x \in [0,1[$, $\sum_{n=0}^\infty e^{-nx}$ pour $x \in]0,\infty[$.

Exercice 8. Énoncer les conditions des théorèmes du cours qui impliqueraient les identités et propositions suivantes et déterminer si elles sont vérifiées :
$(\sum x^n)' = \sum nx^{n-1}$ sur $]-1,1[$, $(\sum \frac{\sin(nx)}{n^2})' = \sum \frac{\cos(nx)}{n}$ sur $\mathbb{R}$, $(\sum \frac{\sin(nx)}{n^3})' = \sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$ sur $\mathbb{R}$, $\int \sum x^n dx = \sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ pour $]-1,1[$, $\sum e^{-xn}$ continue pour $]0,\infty[$.

Exercice 9. C'est exercice regroupe les séries de la page précédente dans l'ordre randonné.

1. Déterminer si les séries suivantes convergent normalement.

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{xn^2}$ pour $x \in]0, \infty[$,
   $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2}$ sur $x \in \mathbb{R}$,
   $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ pour $]0, \infty[$,
   $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/x}$ pour $x \in]0, \infty[$,
   $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ pour $x \in \mathbb{R}$,
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x^3}{n^4+x^4}$ pour $x \in [0, \infty[$,
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ pour $x \in [0, a]$, $a < 1$,
   $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ pour $x \in [0, 1[$,
   $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ pour $x \in]0, \infty[$,
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x^2}{n^4+x^2}$ pour $x \in [0, \infty[$,
   $\sum \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ pour $x \in [1, \infty[$,
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x}{n^4+x^2}$ pour $x \in [0, \infty[$,
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^n}$ pour $x \in [1, 2]$,
   $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(x^2+1)} + e^{-n((x+1)^2+1)}$ pour $x \in \mathbb{R}$,
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x}$ pour $x \in [1, 2]$,
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x^2}{n^4+x^2}$ pour $x \in [0, 1]$.

2. Déterminer si les séries suivantes convergent uniformement.

   $\sum \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ pour $x \in [0, \infty[$,
   $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{x^2+n+1}$ pour $x \in [\pi/2, \pi]$,
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ pour $x \in [0, a]$, $a > 1$,
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x^2}{n^4+x^2}$ pour $x \in [0, 1]$,
   $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(x^2+1)} + e^{-n((x+1)^2+1)}$ pour $x \in \mathbb{R}$,
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ixn}}{nx}$ pour $x \in [1, \pi]$,
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x}$ pour $x \in [1, 2]$,
   $\sum \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ pour $x \in [1, \infty[$,
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+x}{n^4+x^2}$ pour $x \in [0, \infty[$,
   $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$ pour $x \in]0, \infty[$,
   $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ pour $x \in [0, 1[$,
   $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+\sqrt{n}}$ pour $x \geq 0$.