
Fiche 4

Exercice 1 (Convergence simple et normale) Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$.
2. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$, sur $[0,+\infty[$ puis sur $[0,a]$ avec $a > 0$.
3. $f_n(x) = \dfrac{x}{n^3+x^{3/2}}$ sur $[0,+\infty[$ puis sur $[0,a]$ avec $a > 0$.

Exercice 2 (Convergence uniforme) Reprendre les fonctions et les ensembles de l'exercice 1 et étudier la convergence uniforme.

Exercice 3 (Convergence simple, uniforme et normale) On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$.

1. Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle elle converge normalement.

Exercice 4 (Classe $\mathcal{C}^\infty$) On pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5 (Série de fonctions : intégrale et dérivée) On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que sa somme $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une fonction continue.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$.
4. Montrer que $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 (Règle d'Abel uniforme) On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n+x}$ pour $x \in [-\pi, -\pi/2]$.

1. En utilisant la règle d'Abel uniforme, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[-\pi, -\pi/2]$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[-\pi, -\pi/2]$.