Fiche 7

Exercice 1 (Série entières et équation différentielles) On considère l'équation différentielle

$$f''(x) - 4f(x) = 0. \tag{1}$$

On cherche f sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et vérifiant les conditions $f(0) = 4$ et $f'(0) = 0$.

Montrer que la seule solution est $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^{p+1}}{(2p)!} x^{2p}$, et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 2 (Série entières et équation différentielles) On cherche le développement en série entière de $f(x) = (1+x)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, par la "méthode de l'équation différentielle".

1. Montrer que f est solution de l'équation différentielle
$$\alpha f(x) - (1+x)f'(x) = 0. \tag{2}$$
(Auriez-vous pu déterminer vous-même cette équation différentielle ?)
2. Déterminer les solutions de (2) développables en séries entières et calculer leur rayon de convergence.
3. Montrer que si g est solution de l'équation (2) sur un intervalle I ne contenant pas -1 alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $g(x) = C(1+x)^\alpha$.

Exercice 3 (Séries de Taylor) Donner un exemple de fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ mais dont la série de Taylor ne converge pas sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Séries de Taylor) Exemple classique (mais un peu lourd) : la série de Taylor converge, mais **pas vers la fonction !**

On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \tag{3}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n(x)$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp(-1/x^2)$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.
3. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 5 (Séries entières et rayon de convergence) Développer en série entière et déterminer les rayons de convergence : $\frac{1}{x-5}$, $\frac{1}{1+9x^2}$, $\frac{1}{(1+x)^2}$, $\ln(5-x)$.

Exercice 6 (Série entière et rayon de convergence) Développer en série entière et déterminer les rayons de convergence : $\frac{1}{(2+x)^3}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{32-x}}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 7 (Série entière de ln autour de 1) Développer $\ln(x)$ en série entière <u>autour de 1</u>.