Fiche 8

Continuité

Exercice 1 (Normes dans les espaces produits) Soient (E, N_E), (F, N_F) et (G, N_G) des espaces vectoriels normés et soient $f : E \to F$ et $g : E \to G$ des fonctions continues.

1. Soit $F \times G$ l'espace vectoriel normé muni de la norme $N_P(x, y) = N_F(x) + N_G(y)$. Montrer qu'il s'agit bien d'une norme.
2. Montrer que la fonction $h(x) = (f(x), g(x))$ est une fonction continue.

Exercice 2 (Applications linéaires en dimension infinie) Soit $(\mathbb{R}[X], || \ ||)$ l'espace vectoriel des polynômes réels muni de la norme $||P(x)|| = \sup_{0<x<1} |P(x)|$.

Soit $D : R[X] \to R[X]$ l'application linéaire définie par $D(x^n) = nx^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Décider si D est une fonction continue.

Exercice 3 (Applications linéaires en dimension infinie) Soit $(E, || \ ||)$ l'espace vectoriel de suites réelles telles que $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2$ converge. On définit alors $||(x_n)_n|| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2}$. Soit $f : E \to E$ la fonction $f(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une norme
2. Décider si la fonction f est continue.

Exercice 4 (Fonctions Lipschitziennes) Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit $f : E \to F$. On dit que f est Lipschitizienne s'il existe $K > 0$ tel que l'on ait pour tout x_1, $x_2 \in E$,

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_F \leq K\|x_1 - x_2\|_E.$$

1. Montrer que la composée de deux applications Lipschitziennes est Lipschitzienne.
2. Montrer qu'une application Lipschitzienne est uniformément continue mais la réciproque n'est pas vraie (considérer sur $[0, \frac{1}{2}]$ la fonction $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$).

Exercice 5 (Formes linéaires) Soient E un espace vectoriel muni d'une norme $\| \ \|$ et f une forme linéaire sur E.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $x \longrightarrow \|x\| + |f(x)|$ définit une norme sur E.
2. Montrer que f est continue dans cette norme.

Exercice 6 (Normes d'opérateurs) Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt$.

1. Pour $c \in [0, 1]$, on définit l'application δ_c par

$$\begin{array}{cccc} \delta_c & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f & \longmapsto & f(c) \end{array} .$$

Montrer que δ_c est une forme lináire sur E, mais qu'elle n'est pas continue.

2. Soit $\begin{array}{cccc} \mu & : & E & \longrightarrow & E \\ & & f & \longmapsto & \mu(f) \end{array}$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, on ait $\mu(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$.

   (a) Montrer que μ est bien définie et que μ est une application linéaire continue de E dans lui-même.

   (b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par $f_n(t) = n(1-t)^{n-1}$ pour tout $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|$ et $\|\mu(f_n)\|$ et en déduire la norme de μ qu'on définit comme $\sup\{\|\mu(f)\| \mid f \in E, \|f\| = 1\}$.

   (c) Montrer que l'ensemble des applications linéaires continues sur E muni de la "norme" du point précédent est effectivement un espace vectoriel normé.

   (d) Montrer que $\sup\{\|\mu(f)\| \mid f \in E, \|f\| = 1\} = \sup\{\frac{\|\mu(f)\|}{\|f\|} \mid f \in E \setminus \{0\}, \|f\| \leq 1\}$.

Exercice 7 (Distance à un ensemble) Soient $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E. On considére l'application distance à A, $d_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $d_A(x) = \inf\{\|x-a\| \mid a \in A\}$.

1. Montrer que d_A est continue.
2. On suppose désormais que A est une partie compacte de E. Si $x \in E$, alors montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x - a\|$.

Calcul différentiel

Exercice 8 (Produit scalaire) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on définit

$$\begin{array}{ccccc} B & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & B(x,y) = \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Montrer que la différentielle de B au point (x, y) est donnée par l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{ccccc} dB & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & dB(x,y)(h,k) = \langle x, k\rangle + \langle y, h\rangle \end{array} .$$

Exercice 9 (Compositions de fonctions)

I. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$. On définit en utilisant f, les fonctions $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$: $u(x) = f(x, -x)$ et $v(x, y) = f(y, x)$. Déterminer leurs différentielles.

II. Calculer de deux manières différentes la dérivée par rapport à t de la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$, où :

1. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2$, et $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$;
2. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, et $x(t) = e^{-t}$, $y(t) = e^t$.

III. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Exprimer au moyen de f' les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $g :]0, \infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
2. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y, z) = f(z \sin x)$.

IV. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. On pose $h(u, v) = f(\sin u + \cos v)$. Montrer que

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) \ \sin v \ + \ \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) \ \cos u \ = \ 0 \ .$$

Exercice 10 (Dérivées et directions)

I. Calculer la dérivée directionnelle de la fonction $f(x,y) = xy^2$ au point $(2,1)$, le long de la direction parallèle à la droite $y = -2x$.

II. On définit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

– Vérifier que f est continue en $(0,0)$ et de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

– Vérifier que f admet en $(0,0)$ dérivées partielles dans toutes les directions. Établir si f est différentiable dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11 (Extrema locaux/globaux) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extrema locaux de la fonction f.
2. La fonction f possède-t-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$?
3. Représenter le segment de droite L défini par

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -2 \leq x \leq 0, \ y = x+1\}$$

et déterminer les extrema globaux de la restriction de f à L en précisant en quels points de L ils sont atteints.

Exercice 12 (Extrema locaux/globaux) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. A l'aide des coordonnées polaires, vérifier que $f(x,y) \leq 2r^2 - \frac{r^4}{4}$ où $r^2 = x^2 + y^2$. En déduire que $f(x,y) \leq 4$.
3. Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.
4. Y a-t-il un minimum global ?

Exercice 13 (Extrema liés) On définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} h : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & e^{(x^2+y^2-4)^2} \end{array}.$$

1. Déterminer les points critiques de la fonction h ainsi que la nature de ces points.
2. On considère le domaines D de $\mathbb{R}^2$ défini par la relation

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\} .$$

Montrer que le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 2 est inclus dans D, puis déterminer les extrema de h sur le domaine D.