Corrigé Partiel 1 Analyse $\underline{IV}$
SP 2017

exo 1 a) $A \subseteq E$ est un ensemble ouvert si $\forall x \in A\ \exists r > 0$ tq $\mathring{B}(x,r) \subseteq A$.

b) Soit $F \subseteq E$.
F est fermé ssi chaque suite convergente dans F converge vers un point dans F.

c) Soient $f_n : X_n \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ des fonctions.
La série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalement si $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ converge

d) La convergence normale implique la convergence absolue est la convergence uniforme.

exo 2 a) $(1,-1) \neq (0,0)$ et $N_2(1,-1) = |1-1| = 0$
$\Rightarrow N_2$ n'est pas une norme.

b) On va montrer que N_1 est une norme.

$\boxed{\text{Positivité}}$: N_1 est positif comme somme de deux termes positifs. Si $N_1(x,y) = 0 \Rightarrow |x+y| = |x-y| = 0$
$\Rightarrow (x+y) \pm (x-y) = 0 \Rightarrow x = y = 0$

$\boxed{\text{Homogénéité:}}$ $N_1(\lambda x, \lambda y) = |\lambda x + \lambda y| + |\lambda x - \lambda y| = |\lambda| \left(|x+y| + |x-y|\right)$
$= |\lambda| N_1(x,y)$

$\boxed{\text{Inégalité triangulaire}}$

$$N_1(x+x', y+y') = |x+x'+y+y'| + |x+x'-y-y'| \overset{(*)}{\leq} |x+y| + |x'+y'| + |x-y| + |x'-y'|$$
$$= N_1(x,y) + N_1(x',y')$$

(*) par l'inégalité triangulaire pour $|\cdot|$

exo3

a) <u>Positivité</u>: $N_1(P) \geq 0$ et $N_1(P') \geq 0 \Rightarrow N_2(P) \geq 0$

Si $P \neq 0 \Rightarrow N_1(P) > 0$ et $N_1(P') \geq 0 \Rightarrow N_2(P) > 0$

<u>Homogénéité</u>: $N_2(\lambda P) = N_1(\lambda P) + N_1(\lambda P') = |\lambda| N_1(P) + |\lambda| N_1(P')$
$= |\lambda| N_2(P)$

<u>Inégalité triangulaire</u>:

$N_2(P+Q) = N_1(P+Q) + N_1(P'+Q') \leq N_1(P) + N_1(Q) + N_1(P') + N_1(Q')$
$= N_2(P) + N_2(Q)$

---

b) $N_2(x^n) = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |x^n| + \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |nx^{n-1}| = 1 + n$

(parce que les deux fonctions sont croissantes et prennent donc leur maximum à $x = 1$)

---

c) Si $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} N_2(x^n) = 0$

mais $\lim\limits_{n \to \infty} N_2(x^n) = \lim\limits_{n \to \infty} (1+n) \neq 0$

Donc, $\lim x^n = 0$ n'est pas possible.

---

exo 4 a) $A = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Il suffit de montrer que pour chaque suite $(x_n, y_n) \in A$ tq $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$, on a $(x, y) \in A$.

Soit $(x_n, y_n) \in A$ et $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$

$\Rightarrow y_n = x_n^2 \rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} x_n^2 = (\lim\limits_{n \to \infty} x_n)^2 = x^2$

$\Rightarrow (x, y) = (x, x^2) \in A$

Donc, A est bien fermé.

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$

$(1, 1+\frac{1}{n}) \in B$, $\lim\limits_{n\to\infty} (1, 1+\frac{1}{n}) = (1,1) \notin B$

$\Rightarrow$ B n'est $\boxed{\text{pas fermé.}}$

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$

Soit $f(x,y) = x^2+y^2$. Cette fonction est continue et $C = f^{-1}(\{1\})$. Or, $\{1\}$ est un ensemble fermé, donc le préimage C par une fonction continue est aussi $\boxed{\text{fermé.}}$

---

ex05 On va montrer que le complementaire est ouvert. Soit $z \in E \setminus \{x,y\}$.

$\Rightarrow B^\circ(z, \min(\|z-x\|, \|z-y\|)) \subseteq E \setminus \{x,y\}$

(parce que $\|x-z\| \nless \min(\|z-x\|, \|z-y\|)$ et $\|y-z\| \nless \min(\|z-x\|, \|z-y\|)$)

Donc, $\{x,y\}$ est bien fermé.

Comme $\{x,y\} \subseteq B(0, \max(\|x\|, \|y\|))$, $\{x,y\}$ est borné.
