Corrigé Partiel 2

exo 1

a) Soient $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ des fonctions.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformément vers f

si $\lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=0}^{n} f_k - f\|_\infty = 0$

b) Soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ et soient $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x)$ converge uniformément sur $[a,b]$ et $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(a)$ converge

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge vers une fonction $f(x)$ et

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x).$$

c) Le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est $R = \sup\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge}\}$.

d) $$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$ si la limite existe.

exo2

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/x}$ sur $]0,\infty[$

On pose $x_n = n \Rightarrow \sum f_n(x_n) = \sum 2^{-1}$ ne converge pas

$\Rightarrow$ pas de convergence normale

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ sur $\mathbb{R}$

$\left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann avec exposante $3>1 \Rightarrow$ converge

$\Rightarrow$ la série est majorée par une série numérique convergente, donc convergence normale

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^3+x^3}$ sur $[0,\infty[$

On pose $x_n = n \Rightarrow f_n(x_n) = \frac{1}{2n}$

$\sum \frac{1}{2n}$ ne converge pas (série harmonique)

$\Rightarrow$ pas de convergence normale.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^3+x^3}$ sur $[0,1]$

$\frac{x^2}{n^3+x^3} \leq \frac{x^2}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$, $\sum \frac{1}{n^3}$ cv. (série de Riemann) avec exp. $3>1$

$\Rightarrow$ cv. normale

exo3

a) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(2n+2)!\,(n!)^2}{(n+1)!^2\,(2n)!}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)\,(n+1)}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4}{1} = 4 \qquad \Rightarrow R = \frac{1}{4}$

b) $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty$

c) $\omega = z^3 \Rightarrow$ cv. si $|\omega| \leq 1$ (série géom)

$\Rightarrow$ cv si $|z|^3 \leq 1 \Rightarrow R = 1.$

---

exo4 $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$

Règle d'Abel uniforme :

$\varepsilon_n = \frac{1}{x^2+n}, \quad V_n = (-1)^n$

On vérifie : $\lim \varepsilon_n = 0$ ✓, ε_n suite décroissante ✓

$\varepsilon_n \geq 0$ ✓ $\quad \frac{1}{x^2+n} \leq \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow$ cv. uniformement ✓

$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n = \begin{cases} 0 \text{ si } N \text{ impair} \\ 1 \text{ si } N \text{ pair} \end{cases} \Rightarrow \left|\sum_{n=0}^{N} (-1)^n\right| \leq 1 \quad \forall N$

$\Rightarrow f(x)$ est la limite uniforme d'une série de fonctions continues, donc f est bien continue.
