

# Partiel 1 Analyse IV

Theresia Eisenkölbl

Date : 7 mars 2017

Durée : 60 minutes

*Pas de documents autorisés. Pas de calculatrices autorisées. Justifier vos réponses.*

- Exercice 1** (6 points).    **a.** Donner la définition d'un ensemble ouvert dans un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ . (1,5 pt)
- b.** Donner l'énoncé du théorème de caractérisation séquentielle d'un ensemble fermé. (1,5 pt)
- c.** Donner la définition de la convergence normale d'une série de fonctions. (1,5 pt)
- d.** Donner deux autres types de convergence qui sont des conséquences de la convergence normale (sans justification). (1,5 pt)

**Exercice 2** (3 points). Soit  $E = \mathbb{R}^2$ . Les fonctions suivantes, sont-elles des normes sur  $E$ ? Justifier vos réponses.

- a.**  $N_2(x, y) = |x + y|$  (1 pt)
- b.**  $N_1(x, y) = |x + y| + |x - y|$  (2 pt)

**Exercice 3** (3,5 points). Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $N_1(P) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |P(x)|$  et soient  $N_2(P) = N_1(P) + N_1(P')$ .

- a.** On admet que  $N_1$  est une norme. Montrer que  $N_2$  est une norme. (1,5 pt)
- b.** Calculer  $N_2(x^n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . (1 pt)
- c.** En conclure que la suite  $(x^n)_{n \geq 0}$  ne converge pas vers 0. (1 pt)

**Exercice 4** (4,5 points). Décider si les sous-ensembles suivants de  $\mathbb{R}^2$  sont fermés ou non et justifier votre réponse.

- a.**  $\{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$  (1,5 pt)
- b.**  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < y\}$  (1,5 pt)
- c.**  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$  (1,5 pt)

**Exercice 5** (3 points). Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé de dimension finie et soient  $x, y \in E$ .

Montrer que  $\{x, y\}$  est un ensemble fermé et borné.