

Partiel 1 Analyse IV

Theresia Eisenkölbl

Date : 7 mars 2017

Durée : 60 minutes

Pas de documents autorisés. Pas de calculatrices autorisées. Justifier vos réponses.

- Exercice 1** (6 points). **a.** Donner la définition d'un ensemble ouvert dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. (1,5 pt)
- b.** Donner l'énoncé du théorème de caractérisation séquentielle d'un ensemble fermé. (1,5 pt)
- c.** Donner la définition de la convergence normale d'une série de fonctions. (1,5 pt)
- d.** Donner deux autres types de convergence qui sont des conséquences de la convergence normale (sans justification). (1,5 pt)

Exercice 2 (3 points). Soit $E = \mathbb{R}^2$. Les fonctions suivantes, sont-elles des normes sur E ? Justifier vos réponses.

- a.** $N_2(x, y) = |x + y|$ (1 pt)
- b.** $N_1(x, y) = |x + y| + |x - y|$ (2 pt)

Exercice 3 (3,5 points). Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $N_1(P) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |P(x)|$ et soient $N_2(P) = N_1(P) + N_1(P')$.

- a.** On admet que N_1 est une norme. Montrer que N_2 est une norme. (1,5 pt)
- b.** Calculer $N_2(x^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. (1 pt)
- c.** En conclure que la suite $(x^n)_{n \geq 0}$ ne converge pas vers 0. (1 pt)

Exercice 4 (4,5 points). Décider si les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^2 sont fermés ou non et justifier votre réponse.

- a.** $\{(x, x^2) | x \in \mathbb{R}\}$ (1,5 pt)
- b.** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < y\}$ (1,5 pt)
- c.** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ (1,5 pt)

Exercice 5 (3 points). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et soient $x, y \in E$.

Montrer que $\{x, y\}$ est un ensemble fermé et borné.