Partiel 2 Analyse IV

Theresia Eisenkölbl

Date : 10 avril 2017
Durée : 60 minutes

Pas de documents autorisés. Pas de calculatrices autorisées. Justifier vos réponses.

Exercice 1 (6 points). **a.** Donner la définition de la convergence uniforme d'une série de fonctions. *(1,5 pts)*

b. Donner l'énoncé du théorème du cours qui permet la dérivation terme par terme d'une série de fonctions. *(1,5 pts)*

c. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière. *(1,5 pts)*

d. Donner deux formules pour calculer le rayon de convergence d'une série entière. *(1,5 pts)*

Exercice 2 (6 points). Déterminer si les séries suivantes convergent normalement. Justifier vos réponses.

a. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/x}$ sur $]0, \infty[$. *(1,5 pts)*

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ sur $\mathbb{R}$. *(1,5 pts)*

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^3+x^3}$ sur $[0, \infty[$. *(1,5 pts)*

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^3+x^3}$ sur $[0, 1]$. *(1,5 pts)*

Exercice 3 (4,5 points). Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes. Justifier vos réponses.

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$. *(1,5 pts)*

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n$. *(1,5 pts)*

c. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3n}$. *(1,5 pts)*

Exercice 4 (3,5 points). Montrer que la série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n}$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Justifier soigneusement votre réponse.