Université Claude Bernard Lyon 1

L2 - Graphes, Automates, Langages

CC2 du 25 novembre 2009 - 1h15 minutes

Exercice 1.

a) **Donner la définition d'un graphe connexe.**

Un graphe est connexe si chaque paire de sommets différents est liée par une chaîne élémentaire.

b) **On rappelle qu'un arbre est un graphe connexe et sans cycle.**

Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) T **est un arbre**

ii) T **est sans boucles et, entre deux sommets différents, il existe une chaîne élémentaire unique.**

$(i) \Rightarrow (ii)$: L'arbre T est un graphe sans cycle, donc il n'y a pas de boucle. Il est aussi connexe, il existe donc une chaîne élémentaire entre chaque paire de sommets.

Supposons par l'absurde qu'il y ait deux chaînes élémentaires C_1 et C_2 entre deux sommets u et v et prenons les u, v, C_1 et C_2 tels que la longueur de C_1 soit minimale. À part u et v, les deux chaînes n'ont pas de sommets communs, parce que un tel sommet serait un choix pour v avec C_1 plus courte.

La concatenation de C_1 de u à v et de C_2 de v à u donne donc un cycle. Contradiction.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Le graphe T est bien connexe, parce qu'il existe une chaîne entre toute paire de deux sommets distincts. Il ne contient pas de boucle et un autre cycle donnerait deux chaînes élémentaires entre deux sommets du cycle. Le graphe T et donc un arbre.

Exercice 2. On considère le graphe G en Figure 1.

a) **Donner les définitions de chaîne simple et chaîne élémentaire dans un graphe.**

Une chaîne simple est une suite alternée $v_0e_1v_1 \dots e_kv_k$ de sommets et arêtes dont toutes les arêtes sont distinctes.

Une chaîne élémentaire est une suite alternée $v_0e_1v_1 \dots e_kv_k$ de sommets et arêtes dont tous les sommets sont distincts.

b) **Donner un exemple d'une chaîne simple de longueur 4 dans le graphe G.**

Un exemple est XaXbZcXdZ.

c) **Existe-t-il une chaîne élémentaire de longueur 4 dans le graphe G ?**

Non, une telle chaîne contient cinq sommets distincts, mais ici il n'y a que trois sommets.

d) **Calculer le nombre de chaînes de longueur 3 de X à X, de X à Y et de X à Z, dans G .**

La matrice d'adjacence M (avec l'ordre X, Y, Z de sommets) est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 22 & 13 & 33 \\ 13 & 4 & 6 \\ 33 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Il y a donc 22 chaînes de X à X, 13 chaînes de X à Y et 33 chaînes de X à Z.

(Remarque : Il suffit de calculer les premières lignes de M^2 et M^3.)

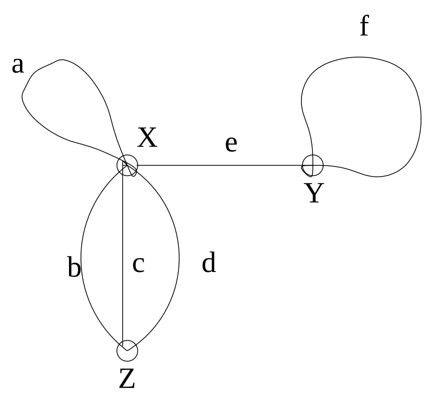


Figure 1: Le graphe G

Exercice 3. Cocher toutes les réponses correctes.

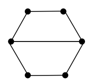
a) **Un arbre est toujours**
- [x] **connexe**
- [x] **planaire**
- [x] **bipartite.**

b) **Si G est**
- [x] **un arbre**
- [x] **connexe**
- [ ] **bipartite**
- [ ] **un graphe complet**

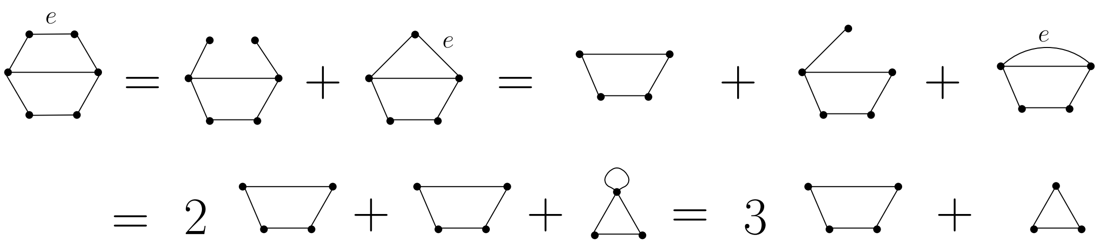
et e une arête de G, alors $G \cdot e$ a la même propriété.

c) **Le graphe complet K_n, $n \geq 1$ n'est jamais**
- [ ] **connexe**
- [ ] **bipartite**
- [ ] **planaire.**

Exercice 4. a) **Calculer le nombre des arbres couvrants**

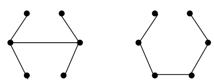
$\tau($  $)$

On utilise la formule $\tau(G) = \tau(G/e) + \tau(G \cdot e)$ et le fait que le nombre d'arbres couvrants de cycle de longueur n et n. On peut toujours éliminer des arêtes pendantes et des boucles. Dans le calcul suivant le dessin d'un graphe represente le nombre de ses arbres couvrants.



$$= 3 \cdot 4 + 3 = 15$$

b) **Donner deux arbres couvrants de ce graphe qui ne sont pas isomorphes. Justifier.**



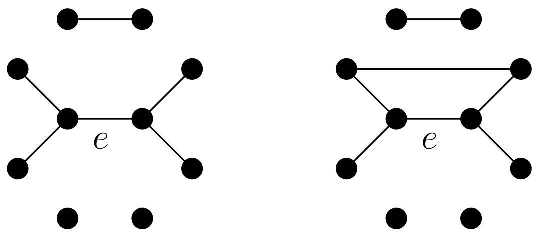
Ces deux arbres couvrants sont bien non-isomorphes, parce que le premier contient un sommet à degré 3, mais pas le deuxième.

Exercice 5. a) **Soit G un graphe simple tel que $\omega(G) = 4$.**

Quelles sont les valeurs possibles pour $\omega(G \setminus e)$ et $\omega(G \cdot e)$?

Donner un exemple pour chaque valeur possible.

On a toujours $\omega(G \cdot e) = \omega(G) = 4$, mais enlever une arête peut augmenter le nombre de composantes connexes par 1. Il y a donc les deux possiblités $\omega(G \setminus e) = 5$ si e est un isthme (arête séparatrice) et $\omega(G \setminus e) = 4$ sinon, voir la figure suivante pour les deux exemples.



b) **Soit G un graphe simple tel que $\nu(G) = 10$ et $\epsilon(G) = 6$.**

Quelles sont les valeurs possibles pour $\omega(G)$?

Le nombre maximal de composantes connexes est atteint par la réunion de K_4 et 6 points isolés, donc 7.

(Pour le nombre maximal, toutes les composantes connexes sauf peut-être une sont des graphes complèts. Il n'y a pas beaucoup de possibilités de les former avec 6 arêtes.)

Le nombre minimal est atteint par un arbre à 7 sommets et trois points isolés, donc 4.

(Chaque arête peut baisser le nombre de composantes connexes par un, donc $10 - 6 = 4$ est le minimum.)

On peut facilement donner des exemples pour les valeurs intermédiares.

Les valeurs possibles pour $\omega(G)$ sont donc 4, 5, 6 et 7.