

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS

Institut Non Linéaire de Nice

Mémoire

présenté pour obtenir le diplôme d'

Habilitation à diriger des recherches

en sciences

Spécialité : Mathématiques

par

Emmanuel Risler

le 16 décembre 2002 devant le jury composé de :

M. Henri BERESTYCKI	
M. Pierre COLLET	Rapporteur
M. Pierre COULLET	
M. Thierry GALLAY	Rapporteur
M. Gérard IOOSS	
M. Robert MAC KAY	Rapporteur
M. Éric SÉRÉ	

Remerciements

Je dois avant tout à Pierre Couillet d'avoir pu réaliser les travaux présentés dans ce mémoire d'habilitation. C'est à la suite de sa rencontre, il y a tout juste cinq ans, à l'IHÉS, où j'effectuais un séjour post-doctoral, que j'ai redémarré la recherche, dans la direction qu'il m'a proposée, c'est-à-dire l'étude qualitative de la dynamique des équations aux dérivées partielles d'évolution. Sa créativité scientifique exceptionnelle et son enthousiasme ont été des sources abondantes et précieuses d'inspiration et de motivation.

Thierry Gallay a été un soutien constant dans mon apprentissage sur les équations aux dérivées partielles. Qu'il soit remercié pour sa gentillesse et tout ce qu'il m'a appris et donné. Les résultats sur le comportement global des systèmes gradients spatialement étendus sont le fruit d'innombrables échanges et du partage de nos idées. Je le remercie également d'avoir accepté la tâche d'écrire un rapport sur mes travaux.

Je remercie Henri Berestycki, Pierre Collet, Gérard Iooss, Robert Mac Kay, et Éric Séré pour l'intérêt, le soutien, et la confiance qu'ils m'ont toujours témoignés. C'est un plaisir de les compter comme rapporteurs ou membres du jury. Merci tout particulièrement à Pierre Collet et Robert Mac Kay pour avoir accepté, une fois encore, de consacrer de leur temps pour me faire l'honneur d'évaluer ce travail. Merci aussi à Henri Berestycki, Robert Mac Kay, Thierry Gallay, et Éric Séré d'avoir trouvé le temps de faire le voyage jusqu'à Nice pour participer au jury.

Je salue Jean-Christophe Yoccoz, mon directeur de thèse, qui avait eu la gentillesse d'accepter, sur le principe, de faire partie du jury, mais qui était en voyage au Brésil à la date de la soutenance.

Merci à tous les personnels, scientifiques ou administratifs, de l'Institut Non Linéaire de Nice, du laboratoire de Mathématiques de l'université de Nice, et de l'équipe Odysée de L'INRIA, pour m'avoir accompagné, et souvent aidé et soutenu, au cours de ces années niçoises.

Je remercie enfin les étudiants de l'Institut Non Linéaire de Nice, avec lesquels j'ai eu ou j'ai encore la chance de collaborer : Médéric Argentina, Nicolas Vandenberghe, Christophe Riera, et Guillaume Reocreux. Bon vent à eux, j'ai toute confiance qu'ils deviendront des scientifiques d'envergure.

Mes proches — famille et amis — savent que c'est par eux et pour eux que j'ai accompli ce travail, qui leur est collectivement dédié.

Nice, le 17 Décembre 2002

Sommaire

Introduction	1
1 Déploiement spatial de bifurcations	4
1.1 Introduction	4
1.2 Instabilité générique des orbites periodiques presque homoclines spatialement étendues	6
1.3 Éléments de démonstration	9
1.4 Critères géométriques	11
1.5 Nœud-col de solutions périodiques	14
1.6 Prolongements	16
2 Comportement global des systèmes gradients spatialement étendus	17
2.1 Introduction	17
2.2 Énoncé des résultats	19
2.2.1 Attracteur du bord du bassin d'attraction d'un équilibre homogène stable . . .	20
2.2.2 Invasion d'un équilibre stable	21
2.2.3 Comportement global	24
2.3 Éléments de démonstration	26
2.3.1 Attracteur du bord du bassin d'attraction associé à un équilibre homogène stable	27
2.3.2 Invasion d'un équilibre stable	28
2.3.3 Comportement global	29
2.4 Prolongements	30
3 Surfaces capillaires axisymétriques d'un point de vue systèmes dynamiques	31
3.1 Introduction	31
3.2 Énoncé des principaux résultats	33
3.2.1 Asymptotiques lorsque $r \rightarrow +\infty$ et $z \rightarrow +\infty$	33
3.2.2 Forme asymptotique des gouttes pendantes de grande longueur	34
3.2.3 Unicité de la solution singulière	37
3.3 Éléments de démonstration	38
4 Autres travaux	39
Liste de publications	41
Références	42

Introduction

Le point commun à l'ensemble des travaux présentés dans ce mémoire d'habilitation, et plus largement à tous les travaux énumérés dans la liste de publications qui suit ce texte, est la nature dynamique des phénomènes étudiés. Il en est ainsi tout d'abord des travaux effectués au cours de ma thèse, ou immédiatement consécutifs à celle-ci, qui portent sur des questions de dynamique holomorphe. Les travaux ultérieurs ont été effectués pour l'essentiel depuis ma nomination à l'université de Nice en Septembre 1998, dans le cadre de l'Institut Non Linéaire de Nice. Ils portent principalement sur l'étude du comportement dynamique de systèmes faisant intervenir, outre le temps, une variable d'espace, autrement dit modélisés par des équations d'évolution aux dérivées partielles. Ils ont en commun de s'efforcer de dégager certains aspects qualitatifs, universels (c'est-à-dire non spécifiques d'une équation donnée), et géométriques de ces comportements dynamiques. En cela ils s'attachent, sur quelques problèmes où cela semble possible, à appréhender ces systèmes spatio-temporels de la manière — qualitative, géométrique — dont sont communément compris les systèmes purement temporels (les équations différentielles ordinaires).

Le corps de ce mémoire est divisé en trois parties indépendantes, dont les deux premières (qui sont aussi les principales) s'inscrivent dans la direction générale que l'on vient d'évoquer. La première partie est consacrée au thème du déploiement spatial de bifurcations. Il s'agit de comprendre le comportement des perturbations de grandes longueurs d'ondes de solutions spatialement homogènes d'équations aux dérivées partielles, lorsque ces solutions sont proches de bifurcations pour l'équation différentielle qui gouverne les solutions homogènes de l'EDP. Le résultat principal est que si ces solutions spatialement homogènes sont suffisamment proches d'une bifurcation d'Andronov homocline (homoclinisation à un point selle), alors elles sont toujours (génériquement) instables vis à vis de perturbations de grandes longueurs d'ondes. La seconde partie est consacrée aux équations aux dérivées partielles de type gradient spatialement étendu (en une dimension non bornée d'espace), donc possédant une structure (formelle) de descente de gradient. On montre que le comportement asymptotique des solutions qui sont proches en $\pm\infty$ (en espace) de minima locaux du potentiel peut être complètement décrit, en particulier qu'il s'organise autour de cascades de fronts. Ces résultats généralisent à une dimension quelconque de la variable champ les résultats antérieurs de Fife et McLeod (qui portent sur le cas où cette dimension vaut 1). La troisième partie est consacrée au très vieux problème de la forme d'une goutte liquide pendante (statique axisymétrique). On montre que les équations de capillarité (qui régissent la surface de la goutte) se ramènent à une équation différentielle autonome en dimension trois. Par l'étude des propriétés dynamiques de cette équation différentielle, on caractérise la forme asymptotique des gouttes de grande longueur et on retrouve l'existence et l'unicité de la goutte de longueur infinie.

Les résultats présentés dans ces trois parties sont contenus dans six articles parus ou à paraître ([3, 4, 5, 6, 7, 10]) et dans quatre pré-publications ([12, 13, 14, 16]). Les travaux qui ont été écartés de cette présentation sont, d'une part les articles [1] et [2], issus de mon travail de thèse et consacrés à des questions de dynamique holomorphe, et d'autre part quatre articles à caractère marginal [8, 9, 15, 17]. Un bref commentaire leur est consacré à la fin de ce mémoire.

Déploiement spatial de bifurcations

Considérons une famille d'équations différentielles $u_t = f_\mu(u)$, dépendant d'un paramètre réel μ , et, associée à ces équations, une famille $t \mapsto u_\mu(t)$ de solutions particulières — points d'équilibre ou

solutions périodiques, que l'on suppose stables. Plus précisément, supposons que de telles solutions existent pour $\mu > 0$, et qu'une bifurcation (disparition ou perte d'équilibre) se produise pour $\mu = 0$. Déployer spatialement cette bifurcation consiste à ajouter au système une dimension d'espace, à ajouter à l'équation des termes de couplage (génériques) en espace, et à étudier les perturbations de grandes longueurs d'onde (c'est-à-dire presque homogènes en espace) des solutions spatialement homogènes $(x, t) \mapsto u_\mu(t)$ du système ainsi obtenu, pour $\mu > 0$ proche de 0.

On s'intéresse principalement au déploiement spatial de la bifurcation d'Andronov homocline (homoclinisation à un point selle), qui est un des scénarios génériques pour la disparition d'oscillations. On montre que, si une telle bifurcation se produit pour $\mu = 0$, alors, pour $\mu > 0$ suffisamment proche de 0, les solutions périodiques spatialement homogènes $(x, t) \mapsto u_\mu(t)$ sont toujours (génériquement) instables vis à vis de perturbations de grandes longueurs d'onde. En outre, l'instabilité est de l'un ou l'autre des deux types suivants : ou bien la classique instabilité de phase ([Kuramoto 1984]), ou bien une nouvelle instabilité, appelée *auto-paramétrique*, et caractérisée au seuil par une longueur d'onde spatiale intrinsèque et une période temporelle double de celle de la solution périodique homogène. La nature (phase ou auto-paramétrique) de l'instabilité est gouvernée par le signe d'une intégrale de Melnikov le long de la solution homocline (pour $\mu = 0$). Un certain nombre d'exemples issus de la mécanique (dont la célèbre équation de sine-Gordon modélisant une chaîne de pendules conservatifs couplés) et d'équations modèles permettent d'illustrer les deux types possibles d'instabilité.

Lorsque la variable champ u est de dimension deux, la nature de l'instabilité peut être prédite en des termes géométriques qui font intervenir les orientations d'une part du cisaillement au voisinage de la solution périodique, et d'autre part de la partie "dispersive" du couplage spatial. Le même genre de considérations géométriques s'applique, toujours pour $\dim_u = 2$, au cas d'une solution périodique indifférente (c'est-à-dire ni attractive ni répulsive, autrement dit correspondant à la confusion de deux solutions périodiques de stabilités opposées), cas qu'on désignera par "bifurcation nœud-col de deux solutions périodiques".

Systèmes gradients spatialement étendus

L'esprit dans cette seconde partie est, pour une classe d'équations aux dérivées partielles particulièrement simple, d'essayer de comprendre jusqu'au bout le comportement dynamique des solutions. On considère les équations de type gradient spatialement étendu, c'est-à-dire de la forme $u_t = -\nabla V(u) + u_{xx}$, où $u \in \mathbf{R}^n$, V représente une fonction potentielle régulière $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, et la variable d'espace x appartient à \mathbf{R} . La caractéristique essentielle de ces équations est de posséder une structure (formelle) de gradient. La motivation pour l'étude de cette classe d'équations est donc de déterminer quel type de dynamique peut être généré par des effets "purement variationnels". La difficulté vient du fait que la dimension d'espace est non bornée (en espace borné la dynamique est triviale) ; l'intégrale définissant la fonctionnelle d'énergie est donc a priori non convergente, et la structure de gradient est seulement formelle.

Lorsque la variable champ u est de dimension un, les solutions satisfont à un principe du maximum qui contraint très fortement la dynamique. En combinant ce principe du maximum et des arguments d'énergie, Fife et McLeod sont parvenus (dans une série de travaux relativement anciens) à une description satisfaisante (en un certain sens complète) de la dynamique : convergence globale vers un front ([Fife 1977]), convergence vers une cascade de fronts ([Fife 1981]), et comportement global ([Fife 1979]). Les travaux présentés dans cette seconde partie généralisent ces résultats au cas où la variable champ u est de dimension quelconque. En particulier on décrit le comportement asymptotique

de toute solution dont la solution initiale est proche, en $\pm\infty$ en espace, de minima locaux du potentiel. Comme dans le cas $\dim_u = 1$, la solution s'organise en une cascade de fronts. En l'absence du principe du maximum, les techniques mises en œuvre dans les preuves sont nécessairement "purement énergétiques".

Surfaces capillaires axisymétriques d'un point de vue systèmes dynamiques

Dans cette partie, on reprend le vieux problème de la forme d'une goutte (liquide) pendante statique axisymétrique. Le point de départ est la remarque, élémentaire mais curieusement (à notre connaissance) inexploitée jusqu'ici, que les équations de capillarité, qui gouvernent la surface de la goutte, peuvent être vues comme une équation différentielle autonome en dimension trois. Lorsque l'on fait tendre vers l'infini la quantité correspondant à la pression à l'intérieur de la goutte (qui correspond à la hauteur par rapport à une hauteur de référence), cette équation prend asymptotiquement la forme d'un système intégrable (Hamiltonien) en dimension deux. En utilisant des techniques classiques de systèmes dynamiques (variétés stable et instable, fonction de Lyapunov, perturbation de système intégrable et moyennisation des perturbations), on parvient à une description complète de la dynamique (du comportement asymptotique) de toutes les solutions de l'équation différentielle initiale.

Ce détour s'avère payant pour le problème initial. Le résultat principal est une description de la forme asymptotique, lorsque la longueur tend vers l'infini, des gouttes pendantes en termes d'ensembles de niveaux du Hamiltonien évoqué plus haut. On obtient aussi une preuve très simple de l'existence, et surtout de l'unicité de la goutte de longueur infinie.

1 Déploiement spatial de bifurcations

Cette section présente les résultats des articles [4, 5, 6, 7].

1.1 Introduction

L'idée de déploiement spatial de bifurcation se situe dans l'esprit des idées générales qui ont accompagné le développement de la théorie des singularités, et dont un grand avocat et artisan a été René Thom. Il y a à l'origine l'idée, profonde et aujourd'hui banale, que les formes de la nature sont générées par des singularités, et que l'étude locale de ces singularités est une voie pour rendre ces formes intelligibles. Beaucoup plus que la forme globale, l'étude locale des singularités est accessible à un traitement mathématique (forme normale, classification, déploiement versel).

Les singularités auxquelles on s'intéresse ici sont des bifurcations de champs de vecteurs. On reprend le point de vue classique du déploiement de ces bifurcations dans une famille à paramètres, et on ajoute l'aspect "déploiement spatial", au sens suivant : on considère non plus seulement l'équation différentielle associée au champ de vecteur, mais l'équation différentielle *spatialement étendue* c'est-à-dire l'équation aux dérivées partielles obtenue en introduisant une dimension d'espace, et en ajoutant à l'équation différentielle des termes (génériques) de couplage en espace. Aux solutions de l'équation différentielles correspondent donc les solutions spatialement homogènes de l'équation spatialement étendue (sur lesquelles les termes de couplage spatial s'annulent). De là, on cherche à étudier le comportement de non pas toutes les solutions de l'équation étendue, mais des solutions "presque homogènes" en espace, c'est-à-dire les perturbations de grandes longueurs d'onde spatiale des solutions spatialement homogènes, et ce au voisinage du lieu de la bifurcation. On ne retiendra donc, parmi les termes de couplage spatial, que les termes dominants, qui sont ceux faisant intervenir les dérivées en espace de plus bas degrés.

Nous présentons maintenant le problème en termes mathématiques plus précis.

On considère une équation d'évolution aux dérivées partielles, de la forme

$$u_t = F(u, \partial_x), \quad u \in \mathbf{R}^d, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

c'est-à-dire invariante par translation dans le temps ou dans l'espace. On considère en même temps l'équation différentielle qui gouverne les solutions spatialement homogènes de cette EDP, c'est-à-dire l'équation

$$(1) \quad u_t = f(u) \quad \text{où } f(u) = F(u, 0).$$

Considérons une solution particulière $t \mapsto u_h(t)$ de l'équation différentielle (1), disons constante ou périodique en temps. L'EDP linéarisée au voisinage de la solution homogène $(x, t) \mapsto u_h(t)$ s'écrit

$$u_t = DF(u_h(t), \partial_x)u,$$

qui devient, lorsqu'on la restreint au mode de Fourier de nombre d'onde k ,

$$\partial_t \hat{u}(k) = DF(u_h(t), ik) \hat{u}(k),$$

qui n'est rien d'autre qu'une équation différentielle linéaire, à coefficients constants ou périodiques, en dimension d . Si l'on s'intéresse aux perturbations de grandes longueurs d'onde de la solution homogène u_h , on peut développer cette dernière équation en puissances de k . Pour simplifier l'exposition, on

supposera dans la suite que la coordonnée d'espace x appartient à \mathbf{R} (k est donc scalaire) et que le problème possède une symétrie de parité par rapport à la variable d'espace (invariance par la transformation $x \rightarrow -x$). Dans ce cas, le développement de l'équation précédente ne fait intervenir que des puissances paires de k et s'écrit :

$$(2) \quad \partial_t \hat{u}(k) = (Df(u_h(t)) - k^2 C + \mathcal{O}(|k|^4)) \hat{u}(k),$$

où C est une matrice $d \times d$ réelle, dépendant a priori du temps.

Pour spécifier le problème en le localisant au voisinage d'une singularité, on suppose que f et F dépendent d'un paramètre $\mu \in \mathbf{R}$ (ou \mathbf{R}^p) et qu'une bifurcation se produit pour $\mu = 0$, et on s'intéresse au cas où μ est proche de 0 et la solution homogène u_h est proche du lieu où la bifurcation (locale ou globale) se produit. L'équation différentielle (2) dépend donc de deux petits paramètres, le nombre d'onde k et le paramètre de bifurcation μ . La question est de comprendre l'influence des effets de couplage en espace sur la bifurcation.

Dans [4], nous avons passé en revue un certain nombre de bifurcations : pour les équilibres, la bifurcation nœud-col et la bifurcation de Hopf (qui sont les bifurcations de codimension un en l'absence de symétrie particulière), et, pour les solutions périodiques, les quatre bifurcations d'Andronov (qui constituent la liste complète des bifurcations de codimension un, en l'absence de symétrie particulière, pour les solutions périodiques dans \mathbf{R}^2 , [Arnold 1983]) ; il s'agit de la bifurcation de Hopf, de la bifurcation nœud-col de solutions périodiques (confusion de deux solutions périodiques de stabilités opposées), et des deux bifurcations homoclines (homoclinisation à un point nœud-col, et homoclinisation à un point selle). Les bifurcations locales permettent de retrouver un certain nombre d'instabilités classiques (instabilité de Turing, instabilité de phase au voisinage d'une bifurcation de Hopf). Nous allons nous concentrer dans la suite sur le cas des solutions périodiques, et sur la bifurcation homocline à un point selle, sur laquelle portent les résultats nouveaux.

Supposons que la solution $t \mapsto u_h(t)$ considérée soit périodique et attractive (on cherche à étudier les éventuels effets déstabilisants du couplage en espace, il est donc naturel de supposer que la solution homogène initiale est stable vis à vis de perturbations spatialement homogènes). Notons Φ_k le flot de l'équation différentielle linéaire (2) sur une période (on omet la dépendance par rapport au paramètre μ). L'application Φ_0 admet toujours une valeur propre égale à 1, dans la direction du flot (de la phase), et, puisqu'on a supposé $t \mapsto u_h(t)$ attractive, cette valeur propre est simple. Donc, pour k proche de 0, Φ_k admet une unique valeur propre $\lambda(k)$ proche de 1 et on peut écrire :

$$\lambda(k) = 1 + \lambda_2 k^2 + \mathcal{O}(|k|^4),$$

où le coefficient réel λ_2 s'exprime comme une intégrale le long de la trajectoire de u_h .

Si $t \mapsto u_h(t)$ n'est pas proche d'une bifurcation, la stabilité par rapport à des perturbations de grande longueur d'onde ne dépend donc que du signe de λ_2 . Si $\lambda_2 < 0$ il y a stabilité, et si $\lambda_2 > 0$ le système exhibe une instabilité classique appelée instabilité de phase (voir figure 1), dont l'effet est d'accroître les décalages de phase pour différentes valeurs de la coordonnée d'espace (la direction propre associée à $\lambda(k)$ est, pour k proche de 0, proche de la direction du flot). On peut écrire une équation, dite "équation de phase", pour le développement faiblement non linéaire de cette instabilité ([Kuramoto 1984]).

Signalons toutefois qu'en cas d'instabilité de phase la dynamique du système n'est pas bien comprise (même au voisinage d'une bifurcation de Hopf pour l'équation différentielle (1) gouvernant les solutions spatialement homogènes) : le système développe un comportement complexe, appelé

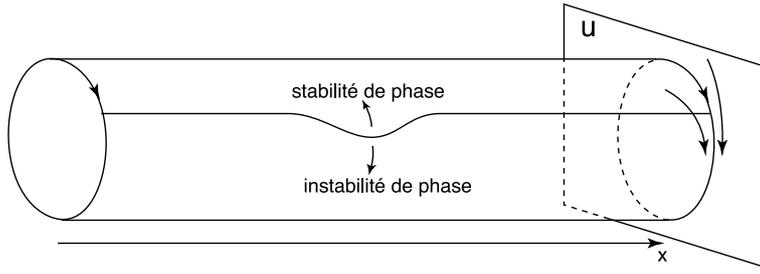


Figure 1: Stabilité ou instabilité de phase pour une orbite périodique (attractive) spatialement étendue

“turbulence de phase”, qui donne naissance à des défauts (où la phase ne peut plus être définie), et qui ne correspond plus à la description faiblement non linéaire donnée par l’équation de phase (voir figure 4A et [Kuramoto 1984, Couillet 1989]).

1.2 Instabilité générique des orbites périodiques presque homoclines spatialement étendues

On s’intéresse maintenant au cas d’une solution périodique proche d’une bifurcation homocline à un point selle.

On se donne donc une application $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^d$, $(u, \mu) \mapsto f(u, \mu)$, et on fait les hypothèses suivantes.

1. $f(0, 0) = 0$;
2. $D_u f(0, 0)$ a une valeur propre réelle simple $\lambda_+ > 0$, et toutes les autres valeurs propres ont une partie réelle strictement inférieure à $-\lambda_+$;
3. l’équation différentielle $u_t = f(u, 0)$ admet une solution $t \mapsto h(t)$ homocline au point d’équilibre 0.

Remarque. L’hypothèse 2 ci-dessus pourrait être relaxée (on pourrait supposer seulement que $D_u f(0, 0)$ n’a pas de valeur propre égale à zéro), cependant elle est nécessaire si l’on veut que les solutions périodiques $t \mapsto p_\mu(t)$ (définies ci-dessous) soient stables (vis à vis de perturbations homogènes), ce qui est le cas le plus important dans le contexte présenté plus haut.

Ces hypothèses entraînent que $t \mapsto h'(t)$ est l’unique (à multiplication par une constante près) solution bornée de l’équation aux variations :

$$u_t = D_u f(h(t), 0)u.$$

On en déduit que l’équation aux variations adjointe (pour le produit scalaire standard de \mathbf{R}^d) :

$$v_t = -D_u f(h(t), 0)^* v$$

admet elle aussi une unique solution bornée (à multiplication par une constante près) notée $t \mapsto \psi(t)$. En effet, on sait (par un calcul immédiat) que le produit scalaire entre deux solutions de ces deux

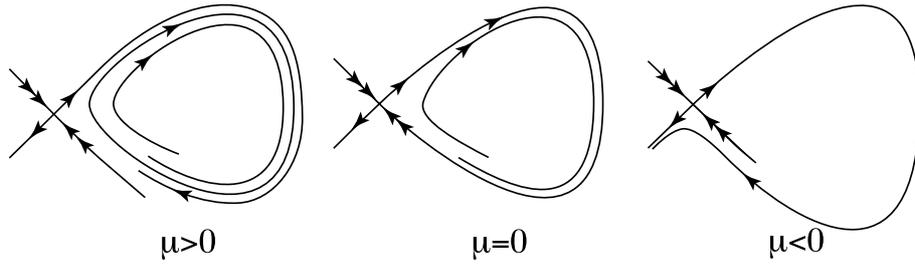


Figure 2: Bifurcation d'Andronov homocline

équations ne dépend pas du temps. Donc toute solution bornée de l'équation adjointe doit être orthogonale, à tout instant t , à l'espace tangent à la variété stable le long de la solution homocline ; lequel, d'après l'hypothèse 2 plus haut, est de codimension un. Ceci montre l'unicité (à multiplication par une constante près) de cette solution $t \mapsto \psi(t)$, et la même hypothèse 2 sur $D_u f(0)$ montre que $|\psi(t)|$ converge vers 0, à une vitesse exponentielle, lorsque $t \rightarrow \pm\infty$.

On voit aussi que le produit scalaire $(h'(-T), \psi(T))$ est non nul pour T assez grand positif (si les directions stable et instables associées à $D_u f(0, 0)$ sont orthogonales, ces deux vecteurs sont mêmes asymptotiquement parallèles pour $T \rightarrow +\infty$). Quitte à changer $\psi(\cdot)$ en $-\psi(\cdot)$, nous supposons que ce produit scalaire est positif.

On fait vis à vis du paramètre μ l'hypothèse de transversalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi(t), D_\mu f(h(t))) dt \neq 0$$

(quitte à changer μ en $-\mu$, on peut supposer que cette intégrale est positive). On sait alors ([Silnikov 1968, Lin 1990]) que, pour tout $\mu > 0$ assez proche de zéro, l'équation différentielle $u_t = f(u, \mu)$ admet une solution $t \mapsto p_\mu(t)$ périodique qui converge vers la solution homocline lorsque $\mu \rightarrow 0$.

Le développement en puissances de k de l'équation linéarisée au voisinage de $p_\mu(t)$ s'écrit

$$(3) \quad u_t = \left(D_u f(p_\mu(t), \mu) - k^2 C(p_\mu(t), \mu) + \mathcal{O}(|k|^4) \right) u,$$

où $C(\cdot, \cdot)$ est une matrice $d \times d$ réelle.

Notons $\Phi_{\mu, k}$ le flot de cette équation sur une période, et $\rho(\Phi_{\mu, k})$ le rayon spectral de $\Phi_{\mu, k}$ (le module de la plus grande valeur propre).

On considère l'intégrale de Melnikov

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi(t), -C(h(t), 0)h'(t)) dt$$

(on a mis un signe $-$ devant l'intégrale du fait de la perturbation en $-k^2 C(\cdot, \cdot)$ dans (3)).

Le théorème suivant est le résultat principal de [7]. Il précise et démontre une conjecture émise par Pierre Coulet et Médéric Argentina et appuyée par des observations numériques, [Argentina 1999].

Théorème 1.1 *Il existe $\mu_0 > 0$ et $k_0 > 0$ tels que :*

- si $M > 0$, alors pour tous $\mu \in]0; \mu_0[$ et $k \in]-k_0; k_0[$, $\Phi_{\mu,k}$ a une valeur propre réelle strictement plus grande que 1.
- si $M < 0$, alors il existe des constantes $0 < K < K'$ telles que, pour tous $\mu \in]0; \mu_0[$ et $k \in]-k_0; k_0[$,
 - si $k^2 \leq K\mu$, alors $\rho(\Phi_{\mu,k}) \leq 1$,
 - si $k^2 \geq K'\mu$, alors $\Phi_{\mu,k}$ a une valeur propre réelle strictement plus petite que -1 .

Ce résultat est intéressant car il est à la fois très simple et universel. Universel puisque la bifurcation homocline est un des scénarios génériques de disparition d’oscillations. Simple puisqu’il affirme que, si l’on s’approche suffisamment près de la bifurcation, ces oscillations deviennent toujours (génériquement) instables par rapport à des perturbations de grandes longueurs d’onde. En effet, l’intégrale de Melnikov M est un nombre réel quelconque, donc génériquement non nul (sauf dans le cas où la matrice $C(.,.)$ est identiquement égale à la matrice identité — ou à un multiple de celle-ci — ce qui correspond à un couplage du type “équation de la chaleur”).

De plus, le résultat précise la nature de l’instabilité : il affirme que deux cas seulement peuvent se produire, et que cette dichotomie est fonction du signe de l’intégrale de Melnikov M . Le premier type d’instabilité (si $M > 0$) est la classique instabilité de phase. Le deuxième type d’instabilité (si $M < 0$) est plus inattendu : il fait apparaître (au seuil, et en supposant que les effets non linéaires saturent l’instabilité) un pattern de longueur d’onde intrinsèque finie, dont la période temporelle est double de celle de la solution périodique homogène (voir figures 3 et 4). Puisqu’elle apparaît au voisinage d’une bifurcation de codimension un, cette seconde instabilité est elle aussi universelle. À ce titre, on s’attend à la voir se manifester dans une grande variété de situations (voir ci-dessous pour des exemples issus de la mécanique ou d’équations modèles, et [Borckmans 2001] pour un exemple en chimie).

Pierre Coulet (voir [6]) a proposé d’interpréter cette seconde instabilité de la manière suivante. Une solution périodique presque homocline se distingue par le caractère anharmonique des oscillations qu’elle engendre. On peut considérer que cette anharmonie devient infinie lorsqu’on se rapproche de la solution homocline. Du point de vue de l’équation linéarisée (3) au voisinage de l’orbite périodique, on peut également considérer que cette anharmonie agit comme un forçage périodique, dont l’intensité devient de plus en plus grande au fur et à mesure qu’on se rapproche de l’homocline. Et on peut interpréter l’instabilité comme une réponse à ce “forçage paramétrique”. Tout comme dans le cas de l’instabilité paramétrique, cette réponse (lorsque $M < 0$) intervient avec un doublement de période temporelle, et, en présence d’une dimension d’espace, avec l’apparition d’une longueur d’onde intrinsèque (comme dans l’instabilité de Faraday, lorsqu’une oscillation dans la direction verticale est appliquée à un fluide, voir [Faraday 1831], [Edwards 1994]). Pour ces raisons, Pierre Coulet a proposé de qualifier d’*auto-paramétrique* cette seconde instabilité, et c’est ainsi que nous la dénommerons dans la suite.

On peut encore proposer, pour le théorème 1.1, l’interprétation mécanique suivante : ce théorème affirme l’impossibilité, pour une chaîne d’oscillateurs couplés, de s’approcher de manière synchrone d’une barrière de potentiel (voir les exemples qui suivent) : si l’on confère à des oscillations une énergie qui les fait s’approcher suffisamment près d’une barrière de potentiel (ce qui a pour effet de les rendre “presque homoclines”), alors ces oscillations vont forcément finir par se désynchroniser sous l’effet d’une perturbation arbitrairement petite. En outre, deux scénarios bien distincts sont possibles pour cette désynchronisation (l’instabilité de phase et l’instabilité auto-paramétrique). Les exemples qui suivent illustrent cette interprétation.

Le développement faiblement non linéaire de l'instabilité auto-paramétrique fait intervenir deux paramètres d'ordre (voir [4], [6]) : un mode d'amplitude de la perturbation associé à la longueur d'onde instable au seuil, et un mode de phase :

$$(4) \quad A_t = A \pm |A|^2 A + \alpha \phi_{xx} A + \beta \phi_x^2 A + A_{xx} + \dots, \quad \phi_t = \delta \phi_{xx} + \phi_x^2 + \eta |A|^2 + \dots$$

(où “...” désignent des termes d'ordre supérieur en ∂_x, A). Ce couplage entre mode d'amplitude et mode de phase est illustré sur la figure 4C. En dimension deux d'espace, le pattern que l'on observe fait intervenir des carrés (sélection de deux vecteurs d'onde à angle droit) : la symétrie induite par le doublement de période interdit la présence de termes quadratiques en A dans l'équation d'amplitude, ce qui élimine la possibilité d'un pattern hexagonal ([Edwards 1994]).

À titre d'illustration, considérons l'équation suivante :

$$(5) \quad v_t = w + \gamma v_x + v_{xx} - \beta w_{xx}, \quad w_t = -(\mu + v)w - v + v^2 + w_{xx} + \beta v_{xx},$$

dépendant des trois paramètres réels μ, β , et γ .

En l'absence des termes de couplage en espace, cette équation est celle d'un oscillateur d'ordre deux, dans le potentiel $V(v) = v^2/2 - v^3/3$, soumis à un frottement non linéaire de coefficient $\mu + v$ (cette équation apparaît dans le déploiement versel de la bifurcation de Bogdanov-Takens, [Guckenheimer 1983]). Sa dynamique présente les caractéristiques suivantes. Lorsque μ devient négatif, l'équilibre $(v, w) = (0, 0)$ devient instable via une bifurcation de Hopf supercritique, et donne naissance à des oscillations stables de petite amplitude. Lorsque μ diminue, l'amplitude de ces oscillations augmente, et celles-ci finissent par disparaître, pour $\mu = \mu_c < 0$, par homoclinisation à l'équilibre $(1, 0)$.

Les termes de couplage préservent la symétrie ($x \leftrightarrow -x$), sauf le terme γv_x , qui brise cette symétrie.

Supposons pour commencer $\gamma = 0$. Pour $\mu > \mu_c$ suffisamment proche de μ_c , le théorème 1.1 s'applique aux oscillations homogènes. Ces oscillations sont donc instables vis à vis de perturbations de grandes longueurs d'ondes, la nature de l'instabilité dépendant du signe de l'intégrale de Melnikov M . On peut vérifier (voir paragraphe suivant) que les signes de β et de M sont identiques. Donc, pour $\beta > 0$, on a la classique instabilité de phase, alors que pour $\beta < 0$, on observe l'instabilité auto-paramétrique. La figure 3 montre le comportement des deux multiplicateurs de Floquet de $\Phi_{\mu,k}$ en fonction de k , dans les deux cas $\beta > 0$ et $\beta < 0$, et la figure 4 présente des simulations numériques qui mettent en évidence la différence entre les instabilités qui se développent dans ces deux cas.

Lorsque $\gamma \neq 0$, l'invariance ($x \leftrightarrow -x$) est brisée. Dans ce cas, on peut montrer (voir [4]) qu'on a toujours de l'instabilité de phase. En conséquence, lorsque $\beta < 0$ et $\gamma \neq 0$, on observe un comportement qui mélange les deux types d'instabilité (figure 4D).

Tous ces phénomènes ne sont pas spécifiques d'une dimension continue d'espace, ils se manifestent également lorsque cette dimension est discrète. Voir [Vandenberghe 2002], [Coullet 2000] pour l'étude de la dynamique de deux oscillateurs (pendules dissipatifs forcés) couplés, où les deux types d'instabilités - phase et autparamétrique - peuvent être observés.

1.3 Éléments de démonstration

La démonstration est basée sur une décomposition “à la Silnikov” du flot de l'équation (3) :

$$\Phi_{\mu,k} = \Phi_{\mu,k,\text{loc}} \circ \Phi_{\mu,k,\text{glob}},$$

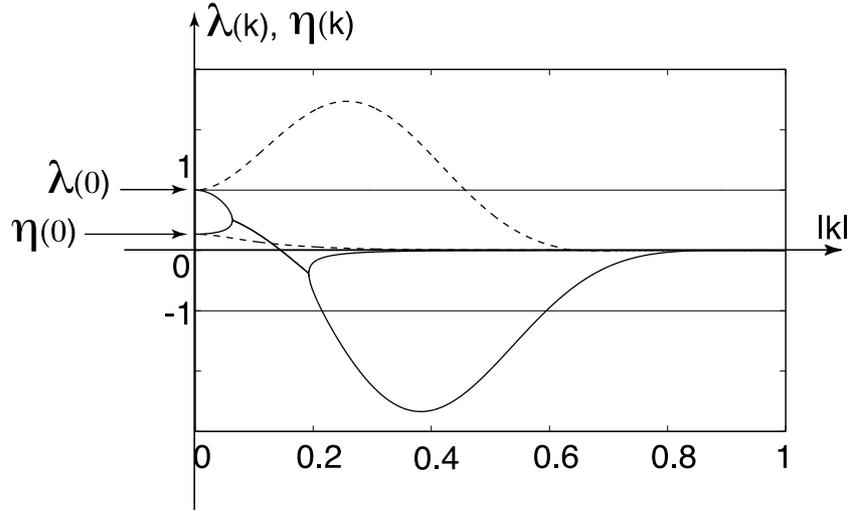


Figure 3: Calcul numérique, pour l'équation (5), des valeurs propres (multiplicateurs de Floquet) $\lambda(k)$ et $\eta(k)$ du flot $\Phi_{\mu,k}$ en fonction de k , pour $\mu = 0.1$, $\gamma = 0$, et $\beta = \pm 1$. Les courbes en pointillé correspondent au cas $\beta = 1$ (instabilité de phase) et celles en trait gras au cas $\beta = -1$ (instabilité auto-paramétrique). Dans ce second cas, le trait représente la partie réelle des valeurs propres lorsque celles-ci sont complexes conjuguées.

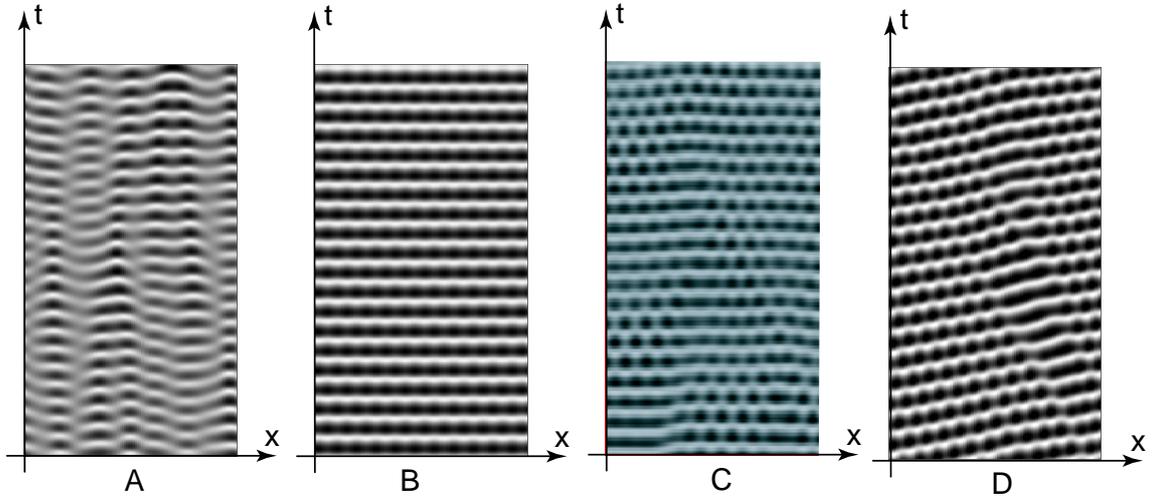


Figure 4: Simulations numériques (diagrammes (x, t)) de l'équation (5) pour différentes valeurs des paramètres β et γ . Les cas A et B correspondent à $\gamma = 0$ et respectivement $\beta > 0$ et $\beta < 0$. On peut observer dans le cas A la signature classique de l'instabilité de phase, et dans le cas B la longueur d'onde spatiale et le doublement de période caractéristiques de l'instabilité auto-paramétrique. Le cas C correspond de nouveau à $\gamma = 0$ et $\beta < 0$, mais cette fois-ci on observe des ondes de phase qui illustrent un couplage de l'instabilité auto-paramétrique avec la phase. Ce couplage apparaît sur l'équation (4) gouvernant le développement non linéaire de l'instabilité. Ces ondes de phase s'évanouissent lentement et le pattern converge, lorsque $t \rightarrow +\infty$, vers celui du diagramme B. Le cas D correspond à $\gamma \neq 0$ et $\beta < 0$. Dans ce cas, on observe un mélange des deux instabilités (phase et auto-paramétrique) et bien évidemment un transport du pattern.

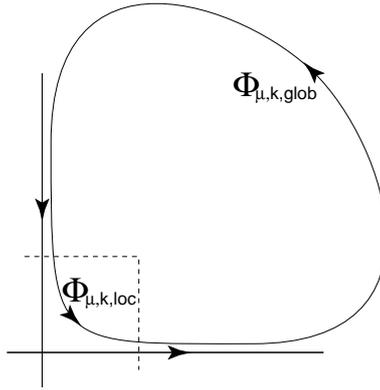


Figure 5: Applications $\Phi_{\mu,k,loc}$ et $\Phi_{\mu,k,glob}$.

où $\Phi_{\mu,k,loc}$ correspond au flot de (3) le long de la partie de la trajectoire située dans un petit voisinage de l'équilibre, et $\Phi_{\mu,k,glob}$ correspond au flot le long de la partie complémentaire (figure 5).

L'application $\Phi_{\mu,k,glob}$ définit une perturbation régulière de $\Phi_{0,0,glob}$ qui fait intervenir l'intégrale de Melnikov M . L'application $\Phi_{\mu,k,loc}$ peut elle être estimée grâce au linéarisé à l'équilibre. La caractéristique principale de $\Phi_{\mu,k,loc}$ est de transformer une petite perturbation d'amplitude en une grande perturbation dans la direction de la phase (autrement dit, elle témoigne d'un fort "cisaillement" au voisinage de la solution périodique, voir paragraphe suivant).

Plus précisément, notons v_{out} (resp. v_{in}) le vecteur vitesse sur la trajectoire périodique, à la sortie (resp. à l'entrée) de la partie de la trajectoire — au voisinage de l'origine — à laquelle correspond $\Phi_{\mu,k,loc}$. On a $\Phi_{0,0,glob}(v_{out}) = v_{in}$ et $\Phi_{0,0,loc}(v_{in}) = v_{out}$. Par définition de M , la différence $\Phi_{\mu,k,glob}(v_{out}) - v_{in}$ est de l'ordre de k^2M dans la direction d'amplitude (perpendiculairement à la direction du flot). On peut montrer que cette perturbation en amplitude est transformée par $\Phi_{\mu,k,loc}$ en une perturbation de phase, et dilatée par un facteur de l'ordre de μ^{-1} . Autrement dit, $\Phi_{\mu,k}(v_{out}) \sim (1 + \mu^{-1}k^2M)v_{out}$, ce qui permet de conclure.

Dans un article indépendant ([Sandstede 2001]) paru peu après [7], B. Sandstede et A. Scheel ont étudié le problème de la stabilité (spectrale) d'ondes progressives de grandes longueurs d'onde. Pour cela, ils ont été amenés à traiter un problème de perturbation d'orbites périodiques presque homoclines analogue à celui présenté plus haut. Leur motivation, l'énoncé des résultats, et les conséquences qu'ils en tirent diffèrent, mais une réinterprétation de leur travail permet très vraisemblablement de retrouver le théorème 1.1. Leur méthode est basée sur des techniques de dichotomie exponentielle et une réduction de Lyapunov-Schmidt du problème, dans l'esprit de [Lin 1990].

1.4 Critères géométriques

Lorsque la variable champ u du système considéré est de dimension deux, on peut souvent déterminer le signe de l'intégrale de Melnikov M (et donc la nature de l'instabilité) par des critères géométriques. On reprend ici le point de vue développé dans [5].

Considérons une courbe fermée de \mathbf{R}^2 qui correspond à la trajectoire d'une orbite périodique presque homocline pour une équation différentielle. Cette trajectoire passe donc à proximité d'un point d'équilibre de type selle (supposé unique). Elle distingue ainsi un des quatres secteurs déterminés

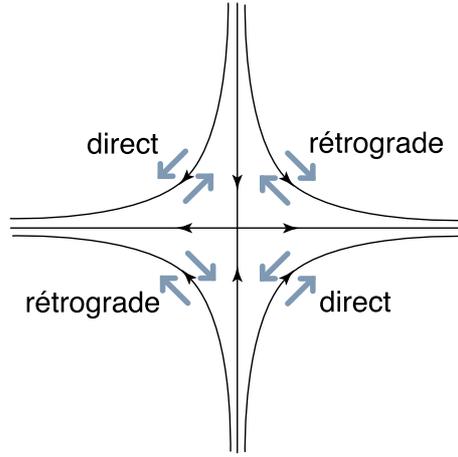


Figure 6: Orientation du cisaillement au voisinage d'une solution périodique presque homocline. On vérifie que la définition correspond bien à l'idée intuitive de cisaillement.

localement par les variétés stable et instable du point d'équilibre (voir figure 6). Soit u_s (resp. u_u) un point appartenant au morceau de variété stable (resp. instable) bordant ce secteur. Si ces points sont suffisamment proches de l'équilibre (et distincts de celui-ci) alors $(f(u_u), f(u_s))$ définit une base de \mathbf{R}^2 .

Définition. On dira que le cisaillement au voisinage de la solution périodique a l'orientation directe (resp. rétrograde) si cette base a la même orientation.

Avec les notations du paragraphe 1.2, on vérifie que l'orientation de la base $(h'(-T), h'(T))$ (pour T grand) est la même que celle de la base $(f(u_u), f(u_s))$. D'après la convention $(h'(-T), \psi(T)) > 0$ paragraphe 1.2, on en déduit que les orientations de la base orthogonale $(h'(t), \psi(t))$ et du cisaillement au voisinage de la solution périodique sont opposées.

Supposons que l'EDP considérée soit de la forme :

$$u_t = f(u) + C\Delta_x u,$$

où C est une matrice 2×2 réelle constante (appelée "matrice de couplage").

Définition. Supposons que les valeurs propres de la matrice C soient complexes conjuguées. Dans ce cas, pour tout $u \in \mathbf{R}^2$, (u, Cu) définit une base de \mathbf{R}^2 dont l'orientation ne dépend pas de u . On dira que C a l'orientation directe (resp. rétrograde) si c'est le cas pour cette base.

Dans ce qui suit, on parlera plutôt de l'orientation de $-C$, qui est opposée de celle de C .

Finalement, en observant que le signe du produit scalaire $(\psi(t), -Ch'(t))$ est positif si $-C$ et la base $(h'(t), \psi(t))$ ont la même orientation, et négatif dans le cas contraire, on déduit de l'expression de M la proposition suivante.

Proposition 1.1 *Si le cisaillement au voisinage de l'orbite périodique et la matrice $-C$ ont des orientations opposées, alors l'instabilité établie par le théorème 1.1 est de type "phase". Si les orientations sont les mêmes, alors l'instabilité est de type "auto-paramétrique".*

Cette proposition justifie la remarque faite au paragraphe précédent, selon laquelle un changement

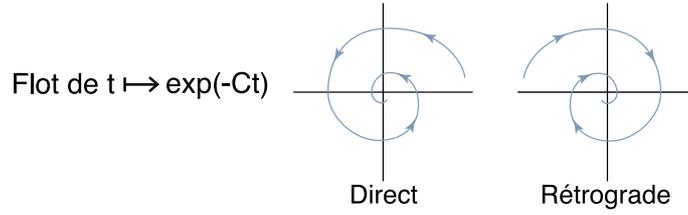


Figure 7: Orientation de la matrice $-C$.

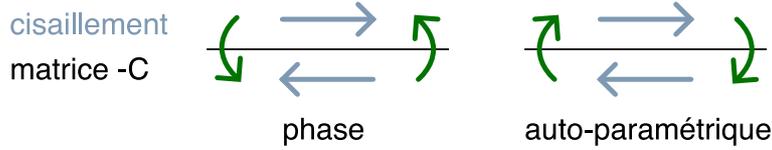


Figure 8: Illustration de la proposition 1.1.

du signe de β dans l'exemple considéré changeait la nature de l'instabilité.

Nous allons illustrer cette proposition par deux exemples. Considérons tout d'abord l'équation

$$v_{tt} + V'(v) = v_{xx},$$

où V est le potentiel bistable $V(v) = -v^2/2 + v^4/4$. En l'absence du terme de couplage, l'équation différentielle est un oscillateur conservatif, qui admet deux orbites homoclines à l'équilibre $(v, v_t) = (0, 0)$, qui sont d'énergie 0. Le théorème 1.1 s'applique (mutatis mutandis) au cas des orbites périodiques voisines, qui ont une énergie voisine de 0. Dans ce cas la matrice $-C$ a l'orientation rétrograde, et l'orientation du cisaillement au voisinage des orbites périodiques change lorsqu'on traverse la barrière de potentiel (voir figure 6) : il est direct pour les solutions d'énergie inférieure à 0 (qui présentent donc une instabilité de type “phase”) et rétrograde pour celles d'énergie supérieure à 0 (qui présentent donc une instabilité de type “auto-paramétrique”).

Signalons que, ce système étant conservatif, il va développer un comportement complexe mettant en jeu de multiples instabilités, dont aucune ne sera saturée. Néanmoins, on s'aperçoit sur des simulations numériques que, à la naissance de l'instabilité, c'est-à-dire aussi longtemps que la solution est proche d'une solution homogène, le comportement porte bien la signature soit de l'instabilité de phase, soit de l'instabilité auto-paramétrique (autrement dit il s'agit, à la naissance de la désynchronisation, de l'effet dominant). Cette remarque est également valable pour notre deuxième exemple, qui n'est autre que la célèbre équation de sine-Gordon :

$$v_{tt} + \sin v = v_{xx}.$$

À nouveau, l'équation sans couplage présente des orbites homoclines (modulo 2π), cette fois-ci d'énergie 1. À nouveau, en accord avec la proposition précédente, les orbites d'énergie proche de 1 inférieure à 1 présentent une instabilité de type “phase”, alors que celles d'énergie proche de 1 supérieure à 1 présentent une instabilité de type “auto-paramétrique”.

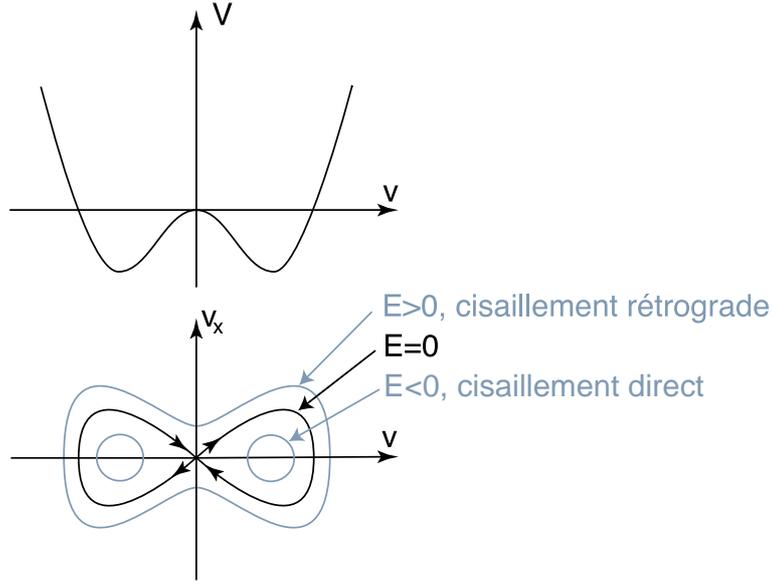


Figure 9: Orientation du cisaillement au voisinage des solutions périodiques.

1.5 Nœud-col de solutions périodiques

On poursuit le point de vue développé dans [5]. On considère ici le cas du déploiement spatial d'une bifurcation nœud-col de solutions périodiques (confusion de deux solutions périodiques de stabilités opposées). L'intérêt est une certaine analogie avec le cas de la bifurcation homocline traité plus haut, et en particulier, en dimension deux, des critères géométriques similaires, faisant intervenir l'orientation du cisaillement au voisinage de la trajectoire.

Comme au paragraphe précédent, on considère une EDP de la forme

$$u_t = f(u) + C\Delta_x u$$

(il n'y a pas de paramètre μ car on va se placer directement à la bifurcation). On suppose que l'équation différentielle $u_t = f(u)$ admet une solution périodique $t \mapsto p(t)$. On considère le développement en puissances de k de l'équation linéarisée au voisinage de la solution :

$$(6) \quad \frac{du}{dt} = (Df(p(t))u - k^2 C)u,$$

dont on note Φ_k le flot sur une période, et on suppose que la valeur propre 1 est associée à un bloc de Jordan de dimension deux pour Φ_0 .

Posons $\phi(t) = p'(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Soit $\tilde{\phi} \in \mathbf{R}^d$ tel que $(\Phi_0 - \text{Id})\tilde{\phi} = \phi(0)$, et soit $\tilde{\phi}(t)$ le vecteur transporté de $\tilde{\phi}$ par le flot de (6) pour $k = 0$.

L'adjoint Φ_0^* de Φ_0 correspond au flot sur une période de l'équation adjointe :

$$(7) \quad \frac{du}{dt} = -Df(p(t))^* u.$$

Soit ψ un vecteur propre associé à la valeur propre 1 pour Φ_0^* , et soit $\tilde{\psi} \in \mathbf{R}^d$ tel que $(\Phi_0^* - \text{Id})\tilde{\psi} = \psi$. Notons $\psi(t)$ et $\tilde{\psi}(t)$ les vecteurs transportés respectivement de ψ et $\tilde{\psi}$ par le flot de l'équation adjointe (7).

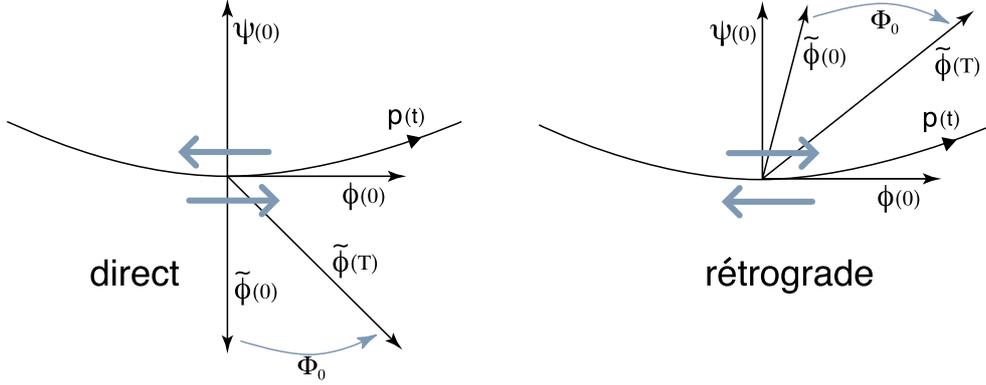


Figure 10: Lien entre orientation du cisaillement et orientation de la base (ϕ, ψ) .

On a $(\psi(t), \phi(t)) = 0$ pour tout t , et les produits scalaires $(\tilde{\psi}(t), \phi(t))$ et $(\psi(t), \tilde{\phi}(t))$ sont égaux, non nuls, et indépendants de t .

Pour k proche de 0, Φ_k a deux valeurs propres proches de 1. Si on note $1 + \lambda$ l'une de ces valeurs propres, un calcul de perturbation montre que

$$\lambda^2 = k^2 I + \mathcal{O}(|k|^4), \quad \text{où} \quad I = \frac{\int_0^T (\psi(t), -C(p(t))\phi(t)) dt}{(\psi(0), \tilde{\phi}(0))}.$$

(voir [4, 5] pour une formulation concrète, en termes de coordonnées locales, de cette expression).

Ceci montre que, si la quantité I est positive, alors, pour $k \simeq 0$, les deux valeurs propres proches de 1 sont réelles, la plus grande des deux étant, à l'ordre un en $|k|$, plus grande que 1. Si en revanche cette quantité est négative, alors, pour $k \simeq 0$, les deux valeurs propres proches de 1 sont cette fois-ci complexes conjuguées, et, à l'ordre un en $|k|$, de module 1. Ainsi, au premier ordre en $\sqrt{|k|}$, on a instabilité (de phase) si $I > 0$, et stabilité si $I < 0$.

Nous allons interpréter ce résultat formel dans le cas où la variable u est de dimension deux. Supposons donc que u vive dans \mathbf{R}^2 . En conservant les notations précédentes, on peut supposer, quitte à changer ψ en $-\psi$, que la base (ϕ, ψ) a (pour tout t) l'orientation directe.

Définition. On dira que le cisaillement au voisinage de la solution périodique a l'orientation directe si le produit scalaire $(\psi, \tilde{\phi})$ (indépendant de t) est négatif. Dans le cas contraire, on dira que ce cisaillement a l'orientation rétrograde.

Cette définition est illustrée par la figure 10.

Supposons que les valeurs propres de la matrice de couplage C soient complexes conjuguées, et reprenons la définition donnée au paragraphe précédent de l'orientation de cette matrice. Puisque la base (ϕ, ψ) a l'orientation directe, l'intégrale $\int_0^T (\psi, -C\phi) dt$ est positive (resp. négative) si $-C$ a l'orientation directe (resp. rétrograde).

Finalement, l'expression de I montre que son signe est relié aux orientations respectives de la matrice C et du cisaillement au voisinage de la solution périodique, comme résumé dans la proposition suivante.

Proposition 1.2 ([5]) *Si la matrice $-C$ et le cisaillement au voisinage de la solution ont des orienta-*

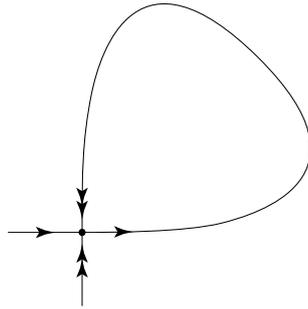


Figure 11: Bifurcation de codimension deux “homocline à un point nœud-col”

tions opposées, alors la quantité I est positive (instabilité). Dans le cas contraire (mêmes orientations), elle est négative (stabilité).

Ce critère géométrique est formellement identique à celui que nous avons énoncé à propos des deux types possibles d’instabilité des solutions périodiques presque homoclines (en associant l’instabilité auto-paramétrique dans le cas presque homocline à la stabilité dans le cas présent de la bifurcation nœud-col de deux solutions périodiques).

Pour finir, nous souhaiterions donner une interprétation du rôle prépondérant que joue le signe du cisaillement dans les deux cas considérés (homocline et nœud-col de cycles, lorsque u est de dimension deux). Dans le cas d’une solution presque homocline, on peut justifier ce rôle par le fait que le cisaillement devient infiniment grand lorsqu’on s’approche de la bifurcation (“cisaillement infini”). Et, dans le cas du nœud-col de deux cycles, par le fait que le signe et l’intensité du cisaillement suffisent à caractériser le flot sur une période de l’équation différentielle linéarisée au voisinage de la solution (il n’y a, au niveau linéaire, “rien d’autre que du cisaillement”).

1.6 Prolongements

En collaboration avec Guillaume Reocreux, nous étudions le cas du déploiement spatial d’une bifurcation globale de codimension deux, à savoir l’homoclinisation à un point nœud-col, la trajectoire homocline convergeant vers le point nœud-col par sa variété stable (voir figure 11). Ce cas est intéressant car il met en compétition deux effets contradictoires : l’effet déstabilisant de la variété stable (analogue à celui mis en évidence plus haut), et l’effet, qui peut être stabilisant, de la direction neutre.

2 Comportement global des systèmes gradients spatialement étendus

L'objet de cette partie est de présenter les principaux résultats des articles [3, 13, 14, 16].

2.1 Introduction

On s'intéresse dans cette partie aux équations aux dérivées partielles de la forme :

$$(8) \quad u_t = -\nabla V(u) + u_{xx},$$

où la variable champ u appartient à \mathbf{R}^n , $n \geq 1$, V représente une fonction "potentiel" : $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ régulière, et la variable d'espace x appartient à \mathbf{R} . On peut voir une telle équation comme une équation différentielle "locale" de type descente de gradient :

$$(9) \quad u_t = -\nabla V(u)$$

à laquelle on ajoute un terme de couplage diffusif en dimension un d'espace. De ce point de vue, il s'agit d'une classe particulièrement simple d'équations aux dérivées partielles, à la fois du point de vue de la dynamique locale (9) et du couplage en espace. Surtout, ces équations possèdent une structure formelle de descente de gradient (en dimension infinie) pour la fonctionnelle d'énergie

$$(10) \quad E = \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{u_x^2}{2} + V(u) \right) dx$$

qui vérifie, au moins formellement,

$$(11) \quad \frac{dE}{dt} = - \int_{\mathbf{R}} u_t^2 dx.$$

De ce point de vue formel, le comportement dynamique est donc celui d'une relaxation pure (on peut le qualifier de "purement variationnel").

Pour ces raisons, on peut nourrir quelque espoir de comprendre jusqu'au bout la dynamique globale générée par ces équations. Elles constituent une première classe de modèles "purement variationnels" qu'il semble raisonnable de souhaiter comprendre avant d'aborder le cas plus difficile des équations faisant intervenir des effets "non variationnels" ([Couillet 2002], [17]).

Lorsque le domaine d'espace est borné, les intégrales (10) et (11) convergent, et l'expression (11) de la décroissance d'énergie montre (sous des hypothèses naturelles sur le potentiel V , comme par exemple $V(u) \rightarrow +\infty$ quand $|u| \rightarrow +\infty$) que toute solution converge, lorsque $t \rightarrow +\infty$, vers l'ensemble des solutions stationnaires. Dans ce cas la dynamique est donc, d'une certaine manière, triviale.

Mais lorsque le domaine d'espace est non borné (s'il s'agit de la droite réelle \mathbf{R} toute entière), et si l'on considère des conditions initiales uniformément bornées, mais sans hypothèse de décroissance à l'infini, alors les intégrales (10) et (11) ne sont en général plus convergentes, et des phénomènes beaucoup plus complexes peuvent se produire. En particulier, il n'est plus nécessairement vrai que toute solution converge vers l'ensemble des solutions stationnaires, même localement en espace (voir [Eckmann 1998] pour un contreexemple), même si ce résultat subsiste en un sens plus faible, "en moyenne" voir [Gallay 2001].

Dans la suite, nous supposerons toujours que le domaine d'espace est la droite réelle toute entière. Dans ce cas, un rôle essentiel est joué par les solutions de type fronts, qui connectent deux équilibres

du potentiel et se propagent à une vitesse constante, autrement dit qui sont stationnaires dans un référentiel en translation à une certaine vitesse constante. Ces solutions sont importantes car elles sont souvent stables et attirent un grand nombre de conditions initiales. Une sorte de justification abstraite de cette stabilité et de l'importance de ces solutions est la remarque, essentielle pour la suite, que, dans tout référentiel en translation à une vitesse constante $c \in \mathbf{R}$ quelconque, le système conserve une structure formelle de descente de gradient. Si l'on pose $x = ct + y$ et $v(y, t) = u(x, t)$, alors l'équation (8) devient

$$(12) \quad v_t - cv_y = -\nabla V(v) + v_{yy},$$

qui possède une structure formelle de descente de gradient par rapport à la fonctionnelle d'énergie ("non autonome en espace") :

$$(13) \quad E_c = \int_{\mathbf{R}} e^{cy} \left(\frac{v_y^2}{2} + V(v) \right) dy,$$

pour laquelle on a, formellement,

$$(14) \quad \frac{dE_c}{dt} = - \int_{\mathbf{R}} e^{cy} v_t^2 dy.$$

Cette remarque simple, déjà présente dans les travaux de Fife et McLeod (et probablement dans d'autres travaux antérieurs) est le point essentiel, la base qui permet de développer la plupart des arguments présentés dans ce qui suit.

Une solution de type front correspond à un processus d'invasion d'une partie de l'espace où la solution est proche d'un certain équilibre du potentiel (noté u_+), par une partie de l'espace où elle est proche d'un autre équilibre (disons u_- , avec $V(u_-) < V(u_+)$). Le front lui-même représente une connection hétérocline entre u_- et u_+ pour l'équation gouvernant les solutions stationnaires dans un référentiel en translation à une certaine vitesse. Pour des raisons de dimensionalité de variétés stables et instables pour cette dernière équation, l'équilibre u_- (celui qui envahit) est génériquement stable (il s'agit d'un minimum local du potentiel), et on peut distinguer deux types de fronts selon la stabilité de l'équilibre u_+ (celui qui est envahi). On parlera de front *monostable* ou *bistable* selon que u_+ est instable ou stable.

Ces deux types de fronts sont pertinents pour la description des phénomènes réels. Les fronts monostables décrivent le cas où une phase située dans l'équilibre u_+ peut être déstabilisée par une perturbation arbitrairement petite (c'est par exemple le cas en épidémiologie, ou pour les modèles de propagation de feux de forêt). Les fronts bistables correspondent au cas où, au contraire, une phase dans l'équilibre u_+ ne peut être déstabilisée que par une perturbation qui dépasse un certain seuil. C'est le cas, par exemple, en dynamique des populations, pour une équation modélisant l'interaction entre deux espèces en compétition, chaque espèce ayant besoin (localement en espace) d'une densité minimale d'individus pour survivre.

De nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de la stabilité (locale ou globale) de ces fronts, mais principalement dans le cas où la dimension de la variable de champ u est égale à 1. Dans ce cas, les solutions vérifient un *principe du maximum* qui contraint fortement leur comportement, et qui est un outil très puissant pour la compréhension de la dynamique, en particulier de la stabilité globale de ces fronts. Dans le cas monostable, les résultats de stabilité globale remontent au célèbre travail de Kolmogorov, Petrovskii, et Piskunov ([Kolmogorov 1937]), alors que, dans le cas bistable, le principal résultat de stabilité globale (beaucoup plus tardif) est dû à Fife et McLeod ([Fife 1977]). En dimension supérieure, le principe du maximum n'est plus valable, et ces approches s'effondrent.

L'objectif des travaux présentés ici est de comprendre la dynamique globale de ces systèmes

gradients spatialement étendus, et en particulier de généraliser les travaux de Fife et McLeod en permettant à la variable de champ u d'être de dimension quelconque.

Notre résultat principal (théorème 2.3 ci-dessous) est le suivant. On considère une solution qui, à $t = 0$, est proche, pour x grand positif et pour x grand négatif, de minima locaux du potentiel. On montre que cette propriété reste valable au cours du temps, et on montre que le comportement d'une telle solution est toujours le suivant (sous réserve qu'une condition générique sur le potentiel V soit vérifiée) : loin à gauche (resp. loin à droite) en espace, la solution converge vers une "cascade" de fronts bistables qui se propagent vers la gauche (resp. vers la droite) avec des vitesses ordonnées, et qui connectent des minima locaux successifs du potentiel, jusqu'à un certain minimum local m . Entre ces deux cascades de fronts, la solution est ou bien uniformément proche de l'équilibre m , ou bien proche de solutions stationnaires homoclines à m (voir figure 14).

Ce résultat repose sur deux résultats intermédiaires. Le premier est un résultat de convergence globale vers des fronts (théorème 2.2 ci-dessous), qui affirme que l'invasion d'un équilibre stable ne peut se faire que par l'intermédiaire d'un front (il s'agit de la généralisation à la dimension supérieure du théorème de convergence globale de Fife et McLeod, [Fife 1977]). Le second (théorème 2.1 ci-dessous) est une description du comportement asymptotique des solutions qui sont proches en $\pm\infty$ d'un équilibre stable m , et qui appartiennent au bord du bassin d'attraction de cet équilibre stable. Ce second résultat affirme qu'une telle solution est, pour t grand, proche en tout point de l'espace de solutions stationnaires homoclines à m .

Comme mentionné plus haut, le principe du maximum n'est plus valable lorsque la variable de champ u est de dimension supérieure à un. Ces résultats n'y font donc pas appel, et reposent uniquement sur des arguments d'énergie. À notre connaissance, c'est la première fois que sont obtenus des résultats de convergence globale vers des fronts (et a fortiori de comportement global pour une large classe de condition initiale) dans un cadre où le principe du maximum n'est pas valable.

Ces résultats doivent beaucoup à Thierry Gallay, même si celui-ci, accaparé par d'autres sujets, a choisi de ne pas figurer comme co-auteur des travaux présentés ici. Un certain nombre d'idées lui sont dues, ou ont été développées en collaboration. En particulier, c'est lui qui m'a convaincu du fait que l'argument fondamental dans le résultat de Fife et McLeod était l'argument d'énergie, et que le principe du maximum, bien que facilitant grandement la démonstration, n'était pas indispensable. Des travaux, cette fois-ci en collaboration, sont en préparation sur des thèmes voisins (voir paragraphe 2.4).

2.2 Énoncé des résultats

On fait sur le potentiel $V(\cdot)$ l'hypothèse suivante :

(H1) il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que, pour $u \in \mathbf{R}^n$ suffisamment grand en norme, on a :

$$u \cdot \nabla V(u) \geq \varepsilon u^2$$

(c'est-à-dire qu'on suppose que $V(\cdot)$ croît au moins quadratiquement à l'infini).

Sous cette hypothèse, l'équation (8) admet un semi-flot défini globalement dans tout espace fonctionnel de fonctions bornées suffisamment régulières (l'équation est régularisante). Dans les articles auxquels on se réfère, l'espace fonctionnel choisi est l'espace d'énergie uniformément local $H_{\text{ul}}^1(\mathbf{R})$. Ici, on se placera pour simplifier dans l'espace C_b^1 des fonctions C^1 et uniformément bornées, ainsi que

leur dérivée, sur \mathbf{R} (à valeurs dans \mathbf{R}^n). L'hypothèse (H1) entraîne l'existence d'une boule attractive pour le semi-flot.

Notons $\Sigma_{\text{crit}(V)}$ l'ensemble des points critiques de V et faisons l'hypothèse (générique) suivante :

(G1) l'ensemble $\Sigma_{\text{crit}(V)}$ est fini, et, pour tout $u \in \Sigma_{\text{crit}(V)}$, le Hessien $D^2V(u)$ est non-dégénéré.

Enfin, notons $\Sigma_{\text{min}(V)} = \{u \in \mathbf{R}^n \mid \nabla V(u) = 0 \text{ et } D^2V(u) \text{ est défini positif}\}$ l'ensemble des minima locaux de $V(\cdot)$.

2.2.1 Attracteur du bord du bassin d'attraction d'un équilibre homogène stable

Le résultat de ce paragraphe est tiré de [14] (où il est énoncé sous des hypothèses légèrement plus générales, sans l'hypothèse (G1), et pour des équations de la forme $u_t = -\nabla V(u) + Du_{xx}$, où D est une matrice (de couplage) définie positive). Grosso modo il généralise les résultats du travail antérieur [3].

Les solutions stationnaires $x \mapsto u(x)$ de l'équation (8) sont solutions de l'équation différentielle :

$$u'' = \nabla V(u).$$

Pour $m \in \Sigma_{\text{min}(V)}$, notons $W^s(m)$ (resp. $W^u(m)$) la variété stable (resp. instable) globale de l'équilibre $(m, 0)$ dans l'espace des phases \mathbf{R}^{2n} de cette équation différentielle, notons

$$\mathcal{H}(m) = W^s(m) \cap W^u(m) \subset \mathbf{R}^{2n}$$

l'ensemble des trajectoires des solutions homoclines à cet équilibre, et enfin notons $\tilde{\mathcal{H}}(m) = \{(m, 0)\} \cup \mathcal{H}(m)$.

Donnons un minimum local m pour V , et notons \mathcal{B}_0 le bassin d'attraction de la solution homogène stationnaire $u(x, t) \equiv m$:

$\mathcal{B}_0 = \{u_0 \in C_b^1 \mid \text{la solution } (x, t) \mapsto u(x, t) \text{ de (8) avec condition initiale } u_0 \text{ vérifie } \|u(\cdot, t)\|_{C_b^1} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty\}$.

Il est bien connu que cette solution homogène stationnaire est localement stable. En conséquence, l'ensemble \mathcal{B}_0 est ouvert dans C_b^1 . Notons $\partial \mathcal{B}_0$ son bord topologique, pour la topologie induite par la norme dans C_b^1 .

Le théorème suivant est le résultat principal de [14], et généralise les résultats de [3] (voir aussi [Fife 1979] sur le comportement global dans un potentiel bistable lorsque $\dim_u = 1$).

Théorème 2.1 *Supposons que V vérifie les hypothèses (H1) et (G2), et supposons en outre qu'il n'existe pas de point $m' \in \Sigma_{\text{crit}(V)}$ différent de m et vérifiant $V(m') = V(m)$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $u_0 \in \partial \mathcal{B}_0$ vérifiant :*

$$\limsup_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{\mathbf{R}} (u_0(x) - m)^2 + u_0'(x)^2 \leq \varepsilon_0,$$

la solution $(x, t) \mapsto u(x, t)$ avec condition initiale $u(\cdot, 0) = u_0(\cdot)$ vérifie :

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |u_t(x, t)| \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \sup_{x \in \mathbf{R}} \text{dist}((u(x, t), u_x(x, t)), \tilde{\mathcal{H}}(m)) \rightarrow 0$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$.

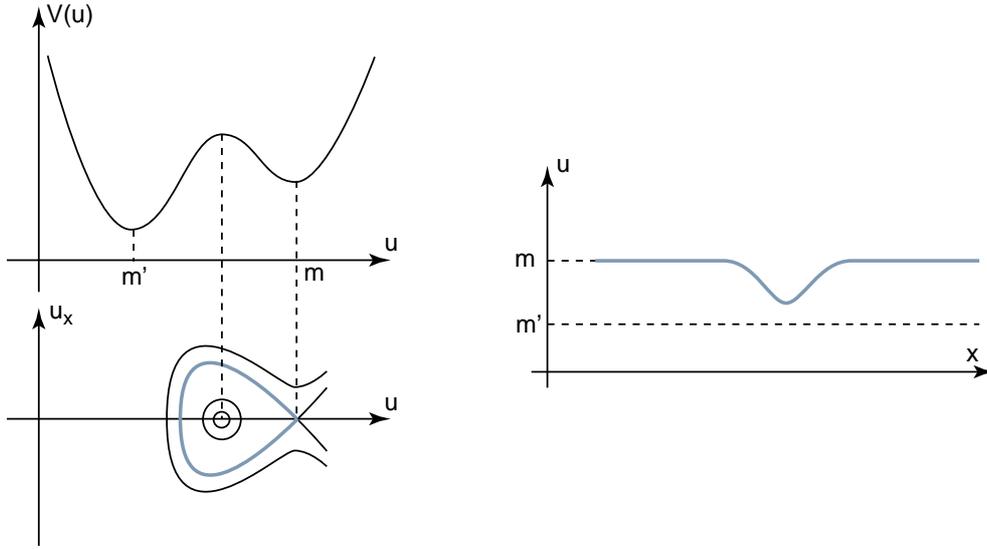


Figure 12: Potentiel bistable (avec $\dim_u = 1$) et solution stationnaire homocline à l'équilibre métastable m (en gris). Le théorème 2.1 affirme que cette solution correspond à l'attracteur du bord du bassin d'attraction associé à l'équilibre homogène stable en m (en Physique une telle solution porte le nom de *solution de nucléation*, [Argentina 1997]).

On en déduit immédiatement le corollaire suivant sur l'existence de connexion homocline pour des systèmes d'ordre deux (ce corollaire ne prétend pas à originalité, et peut certainement se démontrer par des méthodes variationnelles classiques comme la méthode du col, voir [Ambrosetti 1990]).

Corollaire 2.1 ([14]) *Si V vérifie les hypothèses du théorème précédent, et si en outre $\inf_{u \in \mathbf{R}^n} V(u) < V(m)$ (c'est-à-dire si m n'est pas un minimum global de V), alors l'ensemble $\mathcal{H}(m)$ est non vide.*

2.2.2 Invasion d'un équilibre stable

Pour tout $c > 0$, les solutions stationnaires dans un référentiel en translation à vitesse c s'écrivent $(x, t) \mapsto \phi(x - ct)$, où ϕ est solution de l'équation différentielle

$$\phi'' = -c\phi' + \nabla V(\phi).$$

Pour $m \in \Sigma_{\min(V)}$, notons $\mathcal{F}_c(m)$ l'ensemble des solutions ϕ de l'équation précédente pour lesquels $\phi(x) \rightarrow m$ quand $x \rightarrow +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x)$ existe et appartient à $\Sigma_{\text{crit}(V)}$ (autrement dit l'ensemble des fronts en translation à vitesse c qui correspondent à une invasion de l'équilibre m).

Bien entendu, si $\phi \in \mathcal{F}_c(m)$, alors il en est de même pour tout translaté de ϕ . De manière à briser cette invariance par translation, donnons-nous $r_0 > 0$ suffisamment petit pour que, pour tout $m \in \Sigma_{\min(V)}$, et pour tout $u \in \mathbf{R}^n$ vérifiant $|u - m| \leq r_0$, on ait : $V(u) > V(m)$ et $(u - m) \cdot \nabla V(u) > 0$. Et, pour $m \in \Sigma_{\min(V)}$, notons

$$\mathcal{F}_c^0(m) = \{\phi \in \mathcal{F}_c(m) \mid |\phi(0) - m| = r_0 \text{ et } |\phi(x) - m| < r_0 \text{ pour } x > 0\}.$$

Le résultat principal de [13] est le théorème suivant.

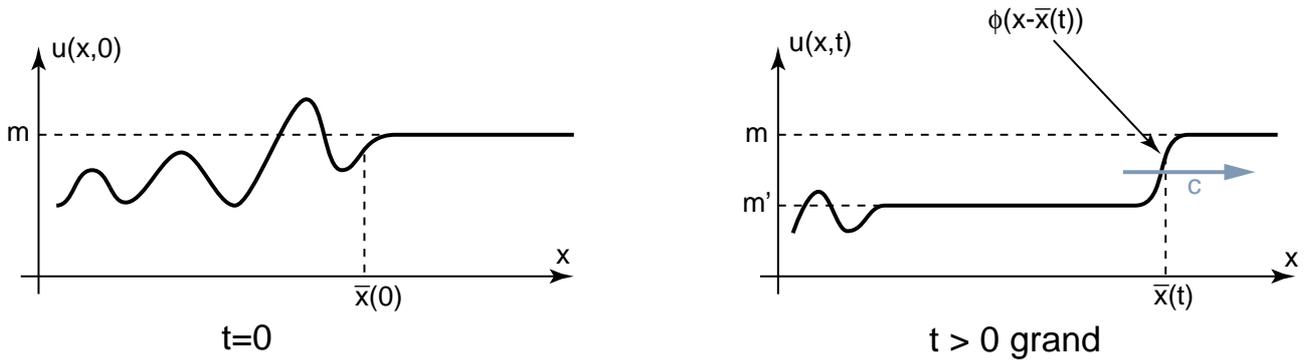


Figure 13: Illustration du théorème 2.2 (par exemple dans le cas du potentiel de la figure 12)

Théorème 2.2 *Supposons que la fonction potentiel $V(\cdot)$ vérifie les hypothèses (H1) et (G1). Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $m \in \Sigma_{\min(V)}$, et pour toute fonction $x \mapsto u_0(x)$ de C_b^1 vérifiant les hypothèses suivantes*

- (i) $\limsup_{x \rightarrow +\infty} (u_0(x) - m)^2 + u_0'(x)^2 \leq \varepsilon_0$,
- (ii) $\int_{-L}^0 (u_0'(x)^2/2 + (V(u_0(x)) - V(m))) dx \rightarrow -\infty$ quand $L \rightarrow +\infty$,

il existe $c > 0$ et une fonction $t \mapsto \bar{x}(t)$ régulière vérifiant $\bar{x}'(t) \rightarrow c$ quand $t \rightarrow +\infty$ tels que, pour tout $L > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que, pour tout $t \geq T$, il existe $\phi \in \mathcal{F}_c^0(m)$ (qui peut dépendre de t) vérifiant :

$$\sup_{x \in [-L; +\infty[} |u(\bar{x}(t) + x, t) - \phi(x)| < \varepsilon$$

(en particulier l'ensemble $\mathcal{F}_c^0(m)$ est non vide).

Commentaires.

1. L'hypothèse (i) stipule que la condition initiale doit être proche, lorsque $x \rightarrow +\infty$, d'un certain minimum local m du potentiel. L'hypothèse (ii) précise que l'énergie, loin à gauche en espace, doit être inférieure à ce qu'elle est loin à droite ; cette seconde hypothèse est nécessaire pour garantir que la partie de l'espace (à droite) où la solution est proche de m va être "envahie".

2. Ce résultat affirme que l'invasion d'un minimum local se fait obligatoirement à une certaine vitesse asymptotique constante c , et que la forme de la solution à l'interface (là où la solution s'éloigne de m) est asymptotiquement à tout instant proche d'un front se déplaçant à la vitesse c . Ce résultat ne prétend pas que la solution converge, au voisinage de l'interface, vers un seul front. Néanmoins, cette dernière assertion est vraie pour un potentiel $V(\cdot)$ générique, puisqu'alors l'espace des fronts est discret, et deux fronts différents n'ont génériquement pas la même vitesse (voir paragraphe suivant).

3. Ce résultat généralise le théorème de convergence globale vers un front de Fife et McLeod (démontré par ces deux auteurs dans le cas d'un potentiel bistable, lorsque u est de dimension 1, [Fife 1977]).

4. Nous n'avons pas été capables de démontrer un tel résultat de convergence globale dans le cas légèrement plus général des équations aux dérivées partielles de la forme :

$$u_t = -\nabla V(u) + Du_{xx},$$

où D est une matrice (de couplage) symétrique définie positive (quitte à effectuer un changement de variable sur u , une matrice diagonale à coefficients strictement positifs). Pourtant, ces équations conservent une structure formelle de descente de gradient par rapport à la fonctionnelle d'énergie

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\frac{(\sqrt{D}u_x)^2}{2} + V(u) \right) dx,$$

mais nous ne sommes pas parvenus à dégager de structure de descente de gradient pour l'équation exprimée dans un référentiel en translation à vitesse non nulle. Dans la même direction, une question générale est de parvenir à identifier, parmi les systèmes qui admettent une structure formelle de descente de gradient dans un référentiel au repos, quels sont ceux qui conservent une telle structure dans un référentiel en translation.

5. Pour des systèmes qui ne possèdent pas de structure formelle de descente de gradient, il n'y a en général pas d'espoir de pouvoir généraliser un tel résultat. Considérons par exemple les systèmes de la forme :

$$u_t = f(u) + Du_{xx},$$

où D est une matrice symétrique définie positive, mais le champ de vecteur f ne dérive pas nécessairement d'un potentiel. Dans ce cas, le système peut exhiber une *instabilité de Turing* (équilibre stable en l'absence des termes de couplage, mais instable en leur présence, par rapport à une longueur d'onde finie intrinsèque). On peut alors montrer (voir par exemple [Sandstede, Scheel 2001]) qu'il est possible de rencontrer des fronts "oscillants", c'est-à-dire des solutions périodiques dans un référentiel en translation, qui connectent deux équilibres stables, et qui sont elles-mêmes stables (on peut y penser comme à un front bistable qui, devant traverser un pattern de Turing, subit une bifurcation de Hopf supercritique). Autrement dit, pour de tels systèmes, il n'est plus vrai que l'invasion d'un équilibre stable se fait toujours par l'intermédiaire d'un front en translation uniforme.

Une conséquence directe du théorème 2.2 est le corollaire suivant sur l'existence de connections hétéroclines entre points critiques de $V(\cdot)$.

Corollaire 2.2 ([13]) *Supposons que le potentiel $V(\cdot)$ vérifie les hypothèses (H1) et (G1). Alors, pour tout $m \in \Sigma_{\min(V)}$ et tel que $\min_{u \in \mathbf{R}^n} V(u) < V(m)$ (c'est-à-dire tel que m ne soit pas un minimum global), il existe $c > 0$ tel que l'ensemble $\mathcal{F}_c(m)$ soit non vide (c'est-à-dire tel qu'il existe une solution $x \mapsto \phi(x)$ à l'équation différentielle : $\phi'' = -c\phi' + \nabla V(\phi)$, vérifiant $\phi(x) \rightarrow m$ quand $x \rightarrow +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x)$ existe et appartient à $\Sigma_{\text{crit}(V)}$).*

À notre connaissance, il s'agit (dans le cas $\dim_u > 1$) d'un résultat original, dont il n'existe pas de démonstration par des méthodes classiques de calcul des variations. L'originalité est d'obtenir une connection hétérocline entre des équilibres à des hauteurs *différentes* du potentiel (bien évidemment pour une certaine valeur du paramètre c , qui dans l'équation des fronts joue le rôle d'un coefficient de dissipation).

2.2.3 Comportement global

Pour obtenir une description globale de la dynamique, nous n'avons pas pu faire l'économie d'un certain nombre d'hypothèses (génériques) sur le potentiel V . Ces hypothèses (outre l'hypothèse (G1) énoncée plus haut) sont les suivantes :

(G2) pour tous m_1, m_2 dans $\Sigma_{\min(V)}$, $m_1 \neq m_2 \Rightarrow V(m_1) \neq V(m_2)$.

(G3) pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{c > \varepsilon \mid \text{il existe } m \in \Sigma_{\min(V)} \text{ tel que } \mathcal{F}_c^0(m) \neq \emptyset\}$ est fini.

(G4) pour tout $c > 0$, il existe au plus un élément $m \in \Sigma_{\min(V)}$ tel que $\mathcal{F}_c^0(m)$ soit non vide, et, si un tel m existe, alors l'ensemble $\mathcal{F}_c^0(m)$ est réduit à un unique élément ϕ , vérifiant $\phi(-\infty) \in \Sigma_{\min(V)}$.

Autrement dit, ces hypothèses stipulent que les fronts qui correspondent à l'invasion d'un équilibre stable sont toujours bistables, qu'ils sont isolés, et que deux fronts différents n'ont jamais la même vitesse. Des arguments de dimensionnalité de variétés stables et instables montrent que ces hypothèses sont génériques (voir [16]).

Le théorème suivant (illustré par la figure 14) est le résultat principal de [16]. Il généralise au cas d'une variable u de dimension quelconque les résultats obtenus dans le cas $\dim_u = 1$ par Fife et McLeod ([Fife 1977, Fife 1979, Fife 1981]). Son énoncé est rendu relativement lourd par la nécessité d'introduire les notations relatives aux deux "cascades de fronts" qui peuvent se propager vers la gauche et vers la droite en espace.

Théorème 2.3 *Supposons que le potentiel V vérifie l'hypothèse (H1) ainsi que les hypothèses génériques (G1)-(G4). Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tous $m_{0,+}, m_{0,-}$ dans $\Sigma_{\min(V)}$, et pour toute fonction $x \mapsto u_0(x)$ dans C_b^1 vérifiant :*

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} (u_0(x) - m_{0,+})^2 + u_0'(x)^2 \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \limsup_{x \rightarrow -\infty} (u_0(x) - m_{0,-})^2 + u_0'(x)^2 \leq \varepsilon,$$

il existe $k_+, k_- \in \mathbf{N}$ tels que :

- *si $k_+ > 0$, alors, pour tout $i \in \{1, \dots, k_+\}$, il existe $m_{i,+} \in \Sigma_{\min(V)}$ et $c_{i,+} \in \mathbf{R}$ vérifiant :*

$$V(m_{0,+}) > V(m_{1,+}) > \dots > V(m_{k_+,+}), \quad c_{1,+} > \dots > c_{k_+,+} > 0,$$

et, pour tout $i \in \{1, \dots, k_+\}$, il existe $\phi_{i,+} \in \mathcal{F}_{c_{i,+}}^0(m_{i-1,+})$ vérifiant $\phi_{i,+}(x) \rightarrow m_{i,+}$ quand $x \rightarrow -\infty$, et une fonction régulière $t \mapsto \bar{x}_{i,+}(t)$, vérifiant : $\bar{x}'_{i,+}(t) \rightarrow c_{i,+}$ quand $t \rightarrow +\infty$,

- *si $k_- > 0$, alors, pour tout $i \in \{1, \dots, k_-\}$, il existe $m_{i,-} \in \Sigma_{\min(V)}$ et $c_{i,-} \in \mathbf{R}$ vérifiant :*

$$V(m_{0,-}) > V(m_{1,-}) > \dots > V(m_{k_-,-}), \quad c_{1,-} > \dots > c_{k_-,-} > 0,$$

et, pour tout $i \in \{1, \dots, k_-\}$, il existe $\phi_{i,-} \in \mathcal{F}_{c_{i,-}}^0(m_{i-1,-})$ vérifiant $\phi_{i,-}(x) \rightarrow m_{i,-}$ quand $x \rightarrow -\infty$, et une fonction régulière $t \mapsto \bar{x}_{i,-}(t)$, vérifiant : $\bar{x}'_{i,-}(t) \rightarrow -c_{i,-}$ quand $t \rightarrow +\infty$,

tels que l'on ait : $m_{k_+,+} = m_{k_-,-}$ (que l'on note m), et tels que, si l'on pose

$$\psi(x, t) = \sum_{i=1}^{k_-} \left(\phi_{i,-}(-x - \bar{x}_{i,-}(t)) - m_{i,-} \right) + m + \sum_{i=1}^{k_+} \left(\phi_{i,+}(x - \bar{x}_{i,+}(t)) - m_{i,+} \right), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0,$$

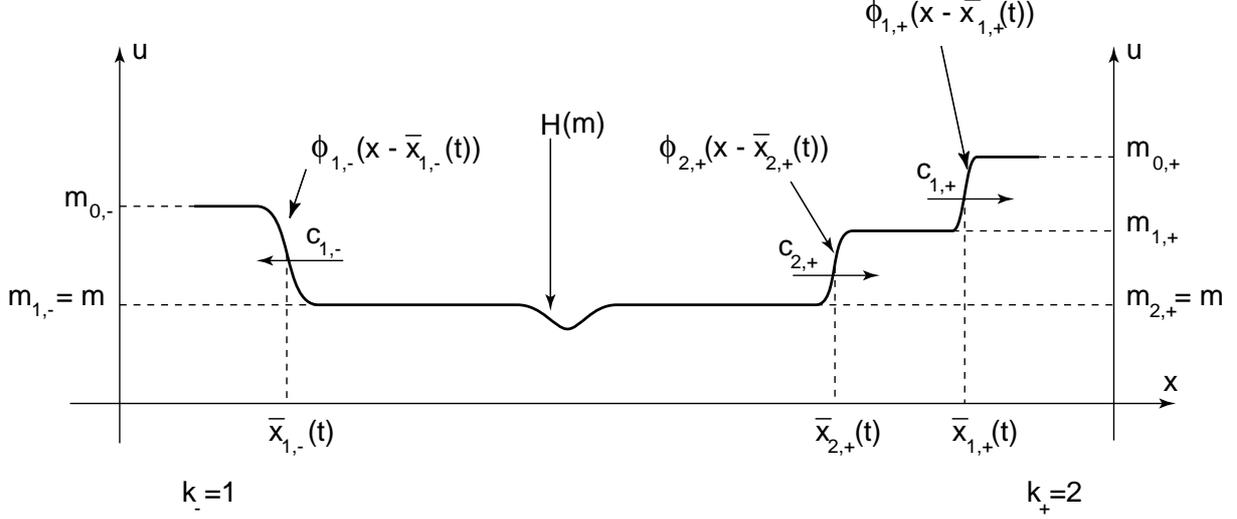


Figure 14: Comportement asymptotique ($x \mapsto u(x, t)$ pour t grand) comme décrit par le théorème 2.3 (sur cette figure on a $k_- = 1$ et $k_+ = 2$). Sur cette figure, on a représenté une solution qui est proche, entre les cascades de fronts qui partent de chaque côté, d'une solution homocline (non triviale) à l'équilibre m . Ce comportement est souvent non générique (bifurcation de codimension un), il l'est toujours lorsque $\dim_u = 1$ (voir la remarque qui suit le théorème 2.3).

et l'on définit des fonctions $\gamma_-(t)$ et $\gamma_+(t)$ par :

$$\begin{aligned} \gamma_+(t) &= c_{k_+,+}t/2 \quad \text{si } k_+ > 0, & \gamma_+(t) &= +\infty \quad \text{si } k_+ = 0, \\ \gamma_-(t) &= -c_{k_-,-}t/2 \quad \text{si } k_- > 0, & \gamma_-(t) &= -\infty \quad \text{si } k_- = 0, \end{aligned}$$

alors on a la conclusion suivante : si $(x, t) \mapsto u(x, t)$ désigne la solution de l'équation (8) avec condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$, on a :

$$\sup_{x \in \mathbf{R} \setminus [\gamma_-(t); \gamma_+(t)]} |u(x, t) - \psi(x, t)| \rightarrow 0$$

et

$$\sup_{x \in [\gamma_-(t); \gamma_+(t)]} |u_t(x, t)| \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \sup_{x \in [\gamma_-(t); \gamma_+(t)]} \text{dist}((u(x, t), u_x(x, t)), \tilde{\mathcal{H}}(m)) \rightarrow 0$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Remarque. Les hypothèses (H1), (G1), et (G2) entraînent que le potentiel V admet un unique minimum global. Considérons le cas où la variable u est de dimension un. En ce cas, si m est ce minimum global, alors $\mathcal{H}(m)$ est vide et $\tilde{\mathcal{H}}(m)$ est réduit à l'équilibre $(m, 0)$; les conclusions du théorème entraînent donc que la solution converge vers m lorsque $t \rightarrow +\infty$, uniformément sur tout compact (précisément : $\sup_{x \in [\gamma_-(t); \gamma_+(t)]} |u(x, t) - m| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$). Si en revanche m est un minimum local non global, alors $\mathcal{H}(m)$ est non vide, mais alors un argument du type Sturm-Liouville montre

que les solutions stationnaires appartenant à $\mathcal{H}(m)$ sont toujours instables (elles possèdent exactement une direction d'instabilité). Ces solutions portent en Physique le nom de *solutions de nucléation* ([Argentina 1997]) précisément parce qu'elles correspondent à un comportement de transition (une bifurcation de codimension un) entre deux comportements génériques. On s'attend donc à ce que, pour une condition initiale générique, le comportement asymptotique soit de converger sur tout compact vers le minimum m , et à ce que les transitions entre ces comportements génériques correspondent à des solutions qui convergent localement vers une solution de nucléation (ou plusieurs en codimension supérieure à un). Il devrait d'ailleurs être possible de transformer ces assertions en énoncés rigoureux (voir à ce propos les questions, dans le même esprit, posées dans [Fife 1979]).

En dimension supérieure (pour la variable u), cette phénoménologie n'est plus tout à fait valable, car l'ensemble $\mathcal{H}(m)$ peut contenir des solutions *stables*. Par exemple, en dimension $\dim_u = 2$, $u = (u_1, u_2)$, posons $z = u_1 + iu_2$, et considérons le potentiel $V(z) = -|z|^2/2 + |z|^4/4 + \varepsilon \operatorname{Re} z$, où $\varepsilon > 0$ est proche de zéro. Un tel potentiel admet un minimum global proche de $z = -1$, et il existe une solution stationnaire stable homocline à ce minimum global (qui "fait le tour" du maximum local proche de 0). On peut interpréter cet exemple comme celui d'un "système excitable" pour lequel le front d'excitabilité serait stationnaire.

Néanmoins, on peut (en toute dimension de u) tirer du théorème 2.1 l'interprétation suivante : une solution qui se trouve à la transition entre deux comportements génériques doit nécessairement converger — localement — vers une (au moins une) solution de nucléation (une solution homocline à un minimum local et *instable*). Là encore, il devrait être possible, sur la base des résultats présentés ici, de transformer cette interprétation en un résultat rigoureux.

2.3 Éléments de démonstration

En l'absence du principe du maximum, les preuves reposent uniquement sur des arguments mettant en jeu des fonctionnelles d'énergie. Le problème est que, le domaine d'espace étant non borné, les intégrales sous la forme desquelles s'expriment les fonctionnelles d'énergie sont en général non convergentes. Pour les rendre convergentes, il faut les localiser en introduisant dans ces intégrales des fonctions "poids" en facteur ([Collet 1994]). Mais ceci a bien évidemment un prix, en ce que les fonctionnelles ainsi localisées n'ont plus exactement les bonnes propriétés de décroissance (formelles) que possédaient les fonctionnelles non localisées : les dérivées par rapport au temps des fonctionnelles localisées font apparaître des termes de "flux d'énergie", là où la fonction poids n'est pas constante. Pour pouvoir tout de même retirer de l'information de ces expressions, il est donc nécessaire de contrôler ces flux d'énergie, ce qui peut nécessiter d'introduire de nouvelles fonctionnelles, etc.

Illustrons ce propos en considérant la situation dans le référentiel au repos. Donnons-nous une fonction "poids" φ , régulière et appartenant à $L^1(\mathbf{R})$ ainsi que ses dérivées. Les deux fonctionnelles naturelles à considérer sont l'énergie et la norme L^2 . Les dérivées par rapport au temps des fonctionnelles localisées ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \varphi \left(\frac{u_x^2}{2} + V(u) \right) &= - \int \varphi u_t^2 - \int \varphi' u_x \cdot u_t, \\ \frac{d}{dt} \int \varphi \frac{u^2}{2} &= - \int \varphi u \cdot \nabla V(u) - \int \varphi u_x^2 - \int \varphi' u \cdot u_x. \end{aligned}$$

On voit sur ces expressions que, si le terme $u \cdot \nabla V(u)$ est partout positif et d'ordre u^2 , et si le rapport $|\varphi'/\varphi|$ est uniformément suffisamment petit, alors on peut trouver une combinaison linéaire de ces

deux fonctionnelles qui est décroissante (et même exponentiellement décroissante) dans le temps. Ceci permet pour commencer de montrer la stabilité locale des solutions homogènes stationnaires associées aux minima locaux du potentiel.

Les mêmes expressions permettent aussi d'établir un résultat dont la signification heuristique est que "la vitesse à laquelle peut décroître un domaine d'espace où la solution est proche d'un minimum local de V est bornée". Autrement dit, si $m \in \Sigma_{\min(V)}$ et si une solution $u(x, t)$ vérifie $(u(x, t_0), u_x(x, t_0)) \simeq (m, 0)$ pour $x \in [a; b]$, alors, moralement, pour $t \geq 0$, on aura encore $(u(x, t_0 + t), u_x(x, t_0 + t)) \simeq (m, 0)$ pour $x \in [a + c_{\max} t, b - c_{\max} t]$, où c_{\max} est une certaine constante qui représente une borne supérieure sur la vitesse d'invasion.

2.3.1 Attracteur du bord du bassin d'attraction associé à un équilibre homogène stable

Le schéma de la preuve du théorème 2.1 est le suivant. Pour simplifier la présentation on suppose que $V(m) = 0$. Les arguments précédents de vitesse finie d'invasion du domaine d'espace où la solution est proche de m permettent de montrer que l'énergie localisée

$$E = \int_{-c_{\max} t}^{c_{\max} t} \left(\frac{u_x^2}{2} + V(u) \right)$$

est "presque décroissante" ; précisément, on a :

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{-c_{\max} t}^{c_{\max} t} u_t^2 + \dots,$$

où les termes de flux d'énergie "... " décroissent exponentiellement avec le temps, et sont en particulier intégrables. Donc, lorsque $t \rightarrow +\infty$, ou bien l'énergie E est minorée et dans ce cas elle converge, ou bien elle tend vers $-\infty$. On montre alors que, du fait que la solution considérée appartient au bord du bassin d'attraction associé à l'équilibre homogène en m , ce second cas ne peut pas se produire. Donc E converge lorsque $t \rightarrow +\infty$, ce qui montre que le terme de dissipation $\int u_t^2$ est intégrable, et on parvient à montrer que la quantité $|u_t(x, t)|$ converge vers 0, uniformément par rapport à x , lorsque $t \rightarrow +\infty$.

De cela, on déduit que la fonction $u(x, t)$ est, pour t grand, proche, sur tout compact de \mathbf{R} , de solutions stationnaires. Il reste à montrer qu'elle est proche de solutions stationnaires homoclines à l'équilibre m . Ceci se fait en plusieurs étapes.

Remarquons tout d'abord que l'"énergie" $v_x^2/2 - V(v)$ est une quantité conservée le long des solutions stationnaires de l'EDP (qui sont solutions de $v_{xx} = \nabla V(v)$). Pour les solutions stationnaires homoclines à m , cette énergie vaut 0.

Pour la solution $u(x, t)$ que l'on considère, on sait que la quantité $u_x^2/2 - V(u)$ est proche de 0 pour x grand positif ou grand négatif ; par ailleurs, on a : $\partial_x(u_x^2/2 - V(u)) = u_x \cdot u_t$. On déduit de ceci que :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbf{R}} |(u_x^2/2 - V(u))(x, t)| = 0,$$

autrement dit qu'il existe des dates arbitrairement grandes pour lesquelles la quantité $u_x^2/2 - V(u)$ est, uniformément en x , proche de 0 (dans le cas contraire, en utilisant une inégalité de Hölder, on aurait une contradiction avec le fait que la dissipation est intégrable).

La deuxième étape consiste à montrer qu'en fait, on a :

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |(u_x^2/2 - V(u))(x, t)| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

En effet, dans le cas contraire, il existerait un ε_0 , aussi petit qu'on veut, et des temps t_n arbitrairement grands pour lesquels on aurait $\sup_{x \in \mathbf{R}} |(u_x^2/2 - V(u))(x, t)| = \varepsilon_0$. On montre que ceci conduirait à une énergie localisée E arbitrairement grande (positive), ce qui n'est pas possible.

Enfin, un argument similaire permet de montrer le résultat voulu, à savoir que $\sup_{x \in \mathbf{R}} \text{dist}((u, u_x)(x, t), \tilde{\mathcal{H}}(m)) = 0$.

2.3.2 Invasion d'un équilibre stable

Le schéma formel de la preuve du théorème 2.2 est très simple : comme mentionné plus haut, dans n'importe quel référentiel en translation à une vitesse c , on peut définir une fonctionnelle d'énergie formellement décroissante dans le temps : si $(x, t) \mapsto u(x, t)$ est une solution, et si on pose $v(y, t) = u(x, t)$, avec $x = ct + y$, alors on a (formellement) :

$$\frac{d}{dt} \int e^{cy} \left(\frac{1}{2} v_y^2 + V(v) \right) dy = - \int e^{cy} v_t^2 dy$$

(de nouveau, on suppose, pour simplifier la présentation, que $V(m) = 0$). Cette expression indique que les solutions devraient converger vers des solutions stationnaires dans ce référentiel en translation, donc vers des solutions en translation uniforme dans le référentiel au repos, ce qui est grosso modo l'objectif à atteindre. Néanmoins, pour transformer ce schéma en une preuve, il faut surmonter deux difficultés.

La première est que, pour faire converger l'intégrale ci-dessus, il faut remplacer le poids e^{cy} par une fonction appartenant à $L^1(\mathbf{R})$, ce qui induit des termes de flux d'énergie de signe arbitraire dans l'expression précédente. Dans le cas où c est positif, ces flux d'énergie ne pourront pas être évités dans une zone située "à droite en espace" de celle où on a localisé l'énergie. Le premier problème est donc de contrôler ces flux d'énergie.

La seconde difficulté est que la vitesse c du front vers lequel on veut montrer une convergence n'est pas connue a priori. L'argument formel de relaxation présenté ci-dessus est valable quelle que soit la vitesse du référentiel en translation considéré. Mais évidemment, pour que cet argument permette d'aboutir à la convergence vers un front, il faut se placer dans un référentiel en translation à la bonne vitesse, plus précisément un référentiel qui "suive" l'interface, c'est-à-dire la zone où la solution s'écarte du minimum local m . On peut matérialiser cette interface par un point $\bar{x}(t)$ défini de la manière suivante :

$$\bar{x}(t) = \sup\{x \in \mathbf{R} \mid |u(x, t) - m| > r_0\}$$

(le paramètre r_0 a été choisi au paragraphe 2.2.2). Il faut donc trouver un référentiel en translation dans lequel ce point ne s'éloigne pas trop, ni vers la droite, ni vers la gauche, ce qui nécessite de fait un certain contrôle a priori sur le comportement de ce point.

En dimension $n = 1$, le principe du maximum a permis à Fife et McLeod ([Fife 1977]) de surmonter assez facilement ces deux difficultés : leur méthode consiste à coincer la solution entre une sous- et une super-solution, chacune convergeant vers un translaté du front (qui dans leur cas est unique). Ceci fournit d'une part un contrôle évident sur le point $\bar{x}(t)$ (ce qui résout la seconde

difficulté), et d'autre part un contrôle précis sur le comportement de la solution loin à droite, donc sur les flux d'énergie venant de $+\infty$ en espace (ce qui résoud la première).

En dimension supérieure, le principe du maximum n'existe plus, mais il s'avère que les deux difficultés précédentes peuvent être surmontées en s'appuyant uniquement sur des arguments d'énergie. Le point fondamental est le suivant : par un choix adéquat de la fonction poids, on peut montrer que, dans un référentiel en translation dans lequel le point $\bar{x}(t)$ ne s'échappe pas vers la droite (ou alors à une vitesse suffisamment faible), les flux d'énergie peuvent être contrôlés (exponentiellement décroissants, donc intégrables). Ceci permet de montrer, dans un second temps, le contrôle voulu sur $\bar{x}(t)$: si par exemple la quantité $\bar{x}(t)/t$ ne convergerait pas, on pourrait se placer dans un référentiel en translation dans lequel on verrait ce point tantôt loin à droite (où il créerait de la dissipation) et tantôt loin à gauche (où il garantirait une fonctionnelle d'énergie minorée), ce qui n'est pas possible si la contribution totale des flux d'énergie est bornée.

Une fois ces deux difficultés surmontées, le schéma usuel de relaxation permet de conclure.

Un dernier point, important, est que cette démonstration s'appuie sur une hypothèse préliminaire, qui est que la partie de l'espace où la solution est proche de m doit être effectivement "envahie", c'est-à-dire que la limite $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}(t)/t$ doit être strictement positive. L'idée qui permet de montrer cette condition d'invasion à partir des hypothèses du théorème 2.2 est due à Thierry Gallay. Elle consiste à remarquer que, si cette condition d'invasion n'était pas satisfaite, alors, en se plaçant dans un référentiel en translation à une vitesse très faible, on aurait une énergie localisée arbitrairement grande négative au départ et minorée pour t grand, tout en conservant un flux d'énergie borné, d'où une contradiction.

2.3.3 Comportement global

La démonstration du théorème 2.3 est une combinaison de celles des théorèmes 2.1 et 2.2.

Considérons une solution $u(x, t)$ dont la condition initiale vérifie les hypothèses du théorème 2.3. Pour x grand positif, la solution est proche de l'équilibre stable $m_{0,+}$; ceci permet, comme au paragraphe précédent, de définir un point $\bar{x}_{1,+}(t)$ qui matérialise l'"interface", le lieu où la solution s'écarte de $m_{0,+}$. Si la limite $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}_{1,+}(t)/t$ est strictement positive, cela signifie que la zone où la solution est proche de $m_{0,+}$ (pour x grand positif) est envahie ; on peut donc appliquer le théorème 2.2 (on note $c_{1,+}$ la vitesse d'invasion). En outre, les hypothèses génériques supplémentaires faites sur le potentiel permettent de préciser les conclusions du théorème 2.2, et de montrer la convergence, au voisinage de l'interface, vers un unique front (noté $\phi_{1,+}$) qui se propage à la vitesse $c_{1,+}$. D'après l'hypothèse (G4), ce front est nécessairement bistable, il connecte donc l'équilibre $m_{0,+}$ avec un autre équilibre stable $m_{1,+}$, vérifiant $V(m_{1,+}) < V(m_{0,+})$.

À la gauche de l'interface correspondant à ce premier front, la solution va donc être proche de l'équilibre $m_{1,+}$, et ce sur un intervalle de plus en plus grand, lorsque $t \rightarrow +\infty$. On peut donc recommencer le raisonnement : définir un nouveau point $\bar{x}_{2,+}(t)$, qui matérialise l'interface à la gauche de laquelle la solution s'écarte de l'équilibre $m_{1,+}$. Si la limite $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}_{2,+}(t)/t$ est à nouveau strictement positive, on peut, en adaptant la démonstration du théorème 2.2, montrer à nouveau la convergence, au voisinage de $\bar{x}_{2,+}(t)$, vers un nouveau front bistable, de vitesse notée $c_{2,+}$, et qui connecte $m_{1,+}$ à un nouvel équilibre stable noté $m_{2,+}$, vérifiant $V(m_{2,+}) < V(m_{1,+})$.

Puisque V est minoré, ce processus finit par s'arrêter, c'est-à-dire que, pour un certain entier $k_+ \geq 0$, la limite $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}_{k_++1,+}(t)/t$ est négative ou nulle.

Le même raisonnement s'applique vis à vis des éventuels fronts se déplaçant vers la gauche, et permet de définir une suite d'équilibres $m_{i,-}$ (et de vitesses d'invasion, et de fronts) qui s'arrête pour i valant un certain entier k_- .

Un argument semblable à celui de la fin du paragraphe précédent permet alors de montrer que $m_{k_-,-} = m_{k_+,+}$ (on le note m), et surtout que, pour tout $\varepsilon < \min(c_{k_+,+}, c_{k_-,-})$, l'énergie localisée

$$\int_{-\varepsilon t}^{\varepsilon t} \left(\frac{u^2}{2} + (V(u) - V(m)) \right)$$

est minorée. La fin de la démonstration du théorème 2.1 peut alors s'appliquer, et permet de conclure.

2.4 Prolongements

En collaboration avec Thierry Gallay, on s'intéresse au comportement global des solutions d'équations "hyperboliques", c'est-à-dire avec terme d'inertie :

$$\alpha u_{tt} + u_t + V'(u) = u_{xx},$$

où α est un paramètre positif. À nouveau, ces équations se distinguent du cas parabolique traité par Fife et McLeod par le fait que l'on ne peut en général plus énoncer de principe du maximum. Notre objectif est de retrouver des résultats formellement analogues à ceux exposés plus haut dans le cas parabolique. Mais ce cas présente des difficultés techniques sensiblement différentes (absence de régularisation, vitesse de propagation finie). Un objectif est aussi d'apporter un support mathématique rigoureux au phénomène, étudié par Pierre Coulet et Médéric Argentina ([Argentina 1997]), de transition entre annihilation et réflexion lors de la collision de deux fronts.

3 Surfaces capillaires axisymétriques d'un point de vue systèmes dynamiques

3.1 Introduction

Cette section présente les principaux résultats des articles [10, 12] sur les surfaces capillaires statiques axisymétriques. Il s'agit d'un très vieux problème, puisqu'il remonte aux travaux de Laplace ([Laplace 1805]) et Young ([Young 1805]). On appelle surface capillaire une interface à l'équilibre entre deux fluides non miscibles (typiquement un liquide et un gaz). Les fameuses équations de Laplace-Young, qui régissent cette surface, stipulent que la différence des pressions de part et d'autre de l'interface (due à la différence des densités entre les deux fluides) doit être compensée par la force de tension de surface, elle-même proportionnelle à la courbure.

Kelvin ([Kelvin 1886]) avait déjà montré, par une méthode graphique (fig. 15) que le profil d'une goutte pendante statique pouvait présenter un ou plusieurs ventres. En fait seules les gouttes à un seul ventre sont stables ([Pitts 1976]). Lorsque l'on augmente le volume d'une goutte pendante, la solution finit par disparaître en libérant une partie du volume de liquide suspendu. Cette disparition se produit par bifurcation noeud-col avec une solution à deux ventres, instable (fig. 16). Ainsi, à volume fixé, la goutte à deux ventres joue le rôle d'une séparatrice entre le bassin d'attraction de la goutte stable à un seul ventre, et le comportement correspondant au détachement d'une partie du liquide suspendu. On constate numériquement (fig. 16) que cette première bifurcation noeud-col est suivie par une infinité d'autres, chacune donnant naissance à des gouttes avec un ventre de plus, et une direction supplémentaire d'instabilité.

D'un point de vue plus mathématique, d'importantes contributions ont été apportées par les travaux de P. Concus et R. Finn. Dans [Concus 1975, 1, Concus 1975, 2], ils ont montré l'existence d'une solution singulière, correspondant à une goutte pendante statique axisymétrique de longueur infinie, et conjecturé l'unicité de cette solution. Dans [Concus 1979], ils ont montré l'existence de solutions présentant un nombre arbitraire de ventres (on renvoie à [Finn 1986] pour une bibliographie plus précise). Des contributions ultérieures ont été apportées par M. F. Bidaut-Veron ([Bidaut-Veron 1986, Bidaut-Veron 1996]) et Finn ([Finn 1992]), dans l'extension des résultats précédents à un cadre plus général (en particulier un champ de gravité d'intensité variable), et dans l'obtention de la solution singulière de longueur infinie comme limite de solutions régulières de longueurs tendant vers l'infini. Finalement, la preuve complète de l'unicité de la solution singulière a été récemment apportée par Nickolov ([Nickolov 2001]) dans sa thèse.

Dans [10] et [12], nous avons proposé d'aborder ces problèmes d'un point de vue "systèmes dynamiques" : les équations de capillarité — dans le cas axisymétrique — peuvent naturellement s'écrire comme une équation différentielle autonome en dimension trois, la coordonnée curviligne le long du profil de la solution jouant le rôle du temps. On peut donc chercher à comprendre les propriétés dynamiques des solutions (curieusement, il semble que ce point de vue n'ait jusqu'ici jamais été exploité dans la littérature). À l'aide de techniques classiques de systèmes dynamiques (variétés stable et instable, fonctions de Lyapunov, méthodes asymptotiques, perturbations de systèmes intégrables et moyennisation des perturbations) nous avons décrit complètement la dynamique. Il en découle une description de la forme asymptotique des gouttes pendantes de grande longueur, ainsi qu'une preuve très simple de l'existence et de l'unicité de la goutte singulière.

Ce qui suit est un résumé de ces travaux.

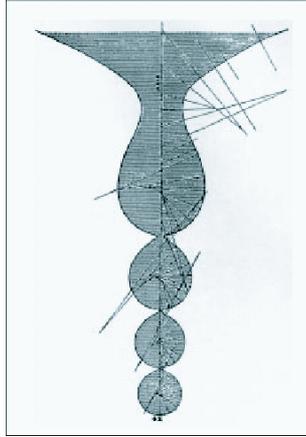


Figure 15: Dessin de Kelvin justifiant par une méthode graphique l'existence de gouttes à plusieurs ventres.

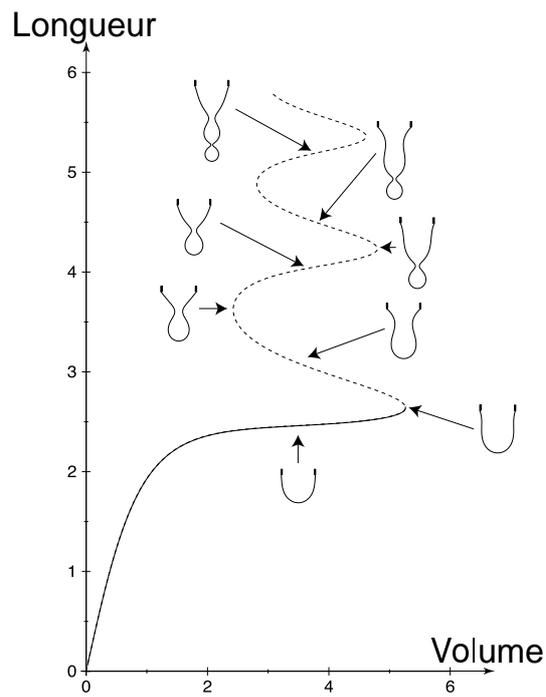


Figure 16: Calcul numérique de la longueur d'une goutte pendante en fonction de son volume. Les lignes en pointillés correspondent à des solutions instables (instabilité à volume fixé)

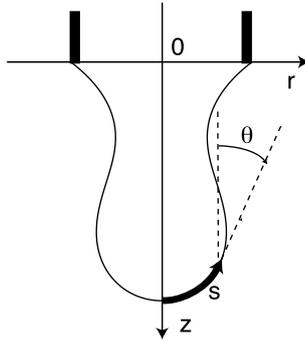


Figure 17: Définition des variables r , θ , z , et s .

3.2 Énoncé des principaux résultats

On considère une surface capillaire dans \mathbf{R}^3 (les résultats qui suivent peuvent être aisément généralisés à toute dimension supérieure). En tout point de la surface, la différence des pressions de part et d'autre doit être équilibrée par la tension de surface :

$$\Delta P = \Gamma \chi,$$

où Γ est le coefficient de tension de surface, et χ représente la courbure moyenne. Notons $\rho > 0$ la différence entre les densités des deux fluides, et z la coordonnée verticale. Si l'origine des z est bien choisie, on a : $\Delta P(z) = \rho g z$, où g représente l'accélération due à la gravité. Quitte à changer l'unité de longueur, on peut supposer que $\Gamma = \rho g$, et l'équation précédente s'écrit :

$$z = \chi.$$

Dans le cas axisymétrique (par rapport à l'axe des z), cette équation devient, en utilisant les variables r , θ , z , et s de la figure 17,

$$z = -\frac{d\theta}{ds} + \frac{\cos \theta}{r}.$$

Par définition de ces variables, on en déduit l'équation différentielle (autonome, en dimension trois) suivante :

$$(15) \quad \frac{dr}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos \theta}{r} - z, \quad \frac{dz}{ds} = -\cos \theta,$$

la coordonnée curviligne s jouant le rôle d'un temps (si on avait pris pour le temps la coordonnée z , on aurait obtenu une équation différentielle non autonome en dimension deux).

Le changement de temps $ds = r du$ permet de se débarrasser de la singularité en $\{r = 0\}$.

3.2.1 Asymptotiques lorsque $r \rightarrow +\infty$ et $z \rightarrow +\infty$

Le système différentiel (15) admet deux limites naturelles : lorsque $r \rightarrow +\infty$ d'une part, et lorsque $z \rightarrow +\infty$ d'autre part. La compréhension de la dynamique dans ces deux limites est un détour précieux pour comprendre la dynamique du système initial (15).

Limite lorsque $r \rightarrow +\infty$.

Cette limite correspond à une invariance des solutions non plus par rotation autour de l'axe des z , mais par translation (le long d'une coordonnée horizontale). Dans cette limite le système (15) devient :

$$(16) \quad \frac{d\theta}{ds} = -z, \quad \frac{dz}{ds} = -\cos \theta,$$

ce qui correspond tout simplement à l'équation $d^2\theta/ds^2 = \cos \theta$ du pendule sans frottement (dans le potentiel $V(\theta) = -\sin \theta$, voir figure 18). L'énergie $E = -\sin \theta + z^2/2$, qui est une quantité conservée pour l'équation (16), joue le rôle d'une fonction de Lyapunov pour l'équation initiale (15) (le long des solutions de cette équation, on a : $dE/du = -\cos^2 \theta$).

Limite lorsque $z \rightarrow +\infty$.

Cette limite correspond à un champ de pression constant (indépendant de la coordonnée verticale z). Après le changement de variable et de temps suivant :

$$R = zr, \quad Z = z^2/2, \quad dt = z(s)ds,$$

le système (15) devient

$$\frac{dR}{dt} = \sin \theta - \frac{R}{2Z} \cos \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos \theta}{R} - 1, \quad \frac{dZ}{dt} = -\cos \theta,$$

ce qui donne, dans la limite $Z \rightarrow +\infty$, l'équation différentielle

$$(17) \quad \frac{dR}{dt} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos \theta}{R} - 1.$$

Cette équation admet une quantité conservée, la fonction :

$$H = R(\cos \theta - \frac{R}{2}).$$

L'équation (17) est donc intégrable (si on adopte le temps $du = dt/R$, il s'agit simplement du système Hamiltonien dérivé de H et de la forme symplectique usuelle $(-d\theta, dR)$ de \mathbf{R}^2). Les solutions pour lesquelles $H > 0$ sont périodiques, et la surface capillaire correspondant à l'orbite homocline sur la surface d'énergie $H = 0$ est tout simplement la sphère (voir figure 19). Pour le système différentiel initial (15), le domaine $H > 0$ est attractif, c'est-à-dire que, le long de toute solution, on a : $H = 0 \Rightarrow dH/du \geq 0$.

Revenons à l'équation initiale (15). On montre facilement (argument de variété instable) que, pour tout $\bar{z} > 0$, il existe une unique solution vérifiant $(r, \theta, z) \rightarrow (0, \pi/2, \bar{z})$ lorsque $u \rightarrow -\infty$, c'est-à-dire qui correspond à une goutte pendante de longueur \bar{z} (dont le point le plus bas est situé à la hauteur \bar{z}).

Les figures 18, 19, et 20 illustrent l'interprétation que l'on peut faire de la dynamique de l'équation initiale comme combinaison des dynamiques dans les deux limites $r \rightarrow +\infty$ et $z \rightarrow +\infty$, ou des profils des gouttes pendantes de longueurs finies comme des combinaisons des profils asymptotiques lorsque $r \rightarrow +\infty$ et $z \rightarrow +\infty$. Les résultats présentés ci-dessous s'interprètent de la même manière.

3.2.2 Forme asymptotique des gouttes pendantes de grande longueur

Lorsque z est grand, le système différentiel initial (15) peut être vu comme une petite perturbation du système intégrable (17). Ce point de vue permet d'obtenir des informations quantitatives précises sur la forme des gouttes pendantes de grande longueur, ce que nous présentons maintenant.

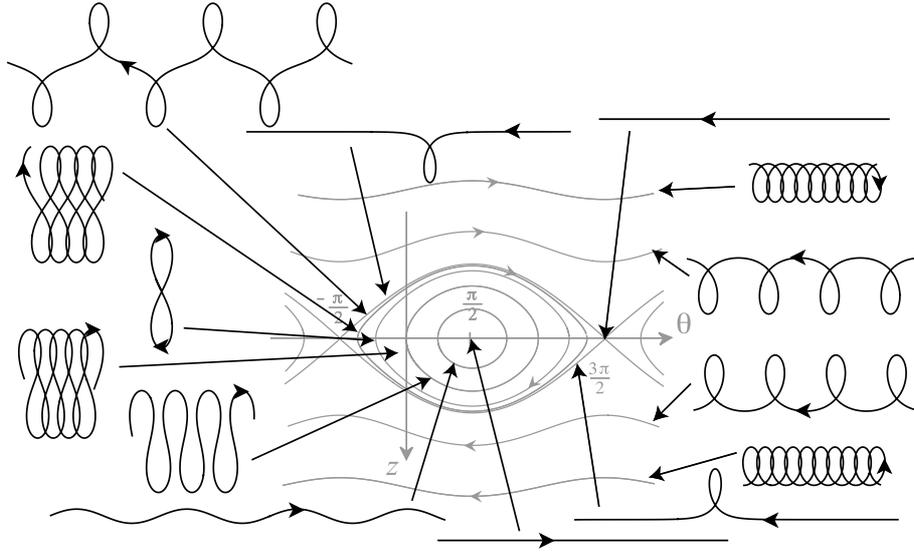


Figure 18: Profils correspondant aux solutions de l'équation (16) (limite $r \rightarrow +\infty$). Les flèches le long des profils correspondent au sens "s croissant" (la phase liquide se trouve "à gauche" des profils par rapport à l'orientation donnée par ces flèches).

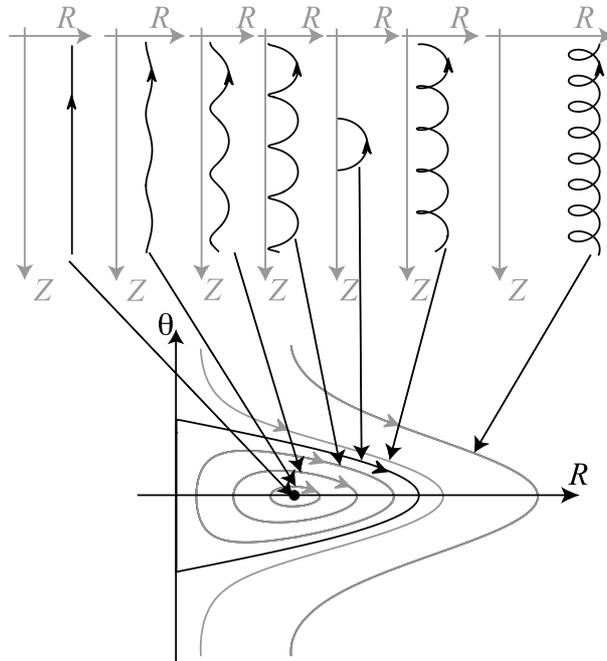


Figure 19: Profils correspondant aux solutions de l'équation (17) (limite $z \rightarrow +\infty$).

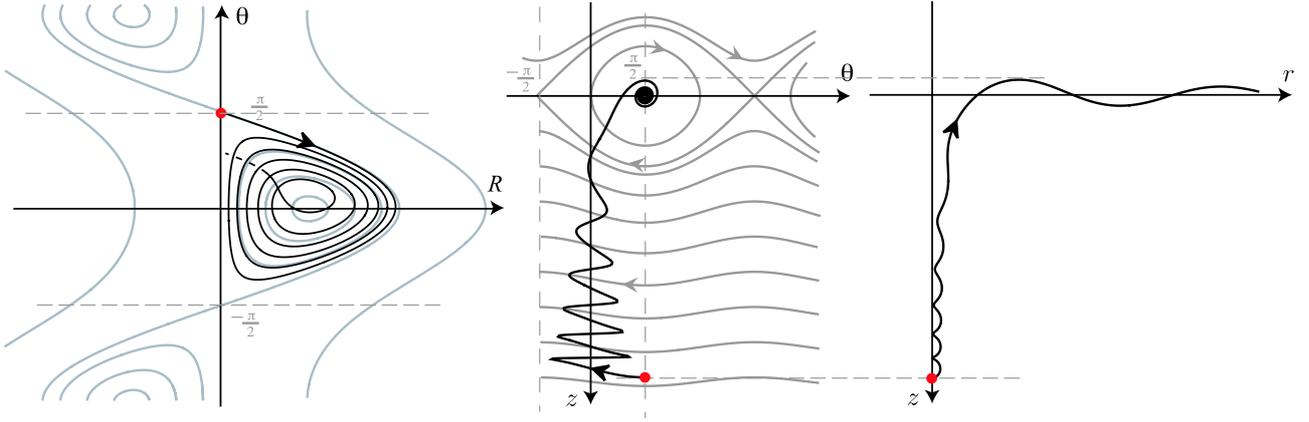


Figure 20: Profil d'une goutte pendante de hauteur finie, représenté respectivement dans les plans $(R = zr, \theta)$, (θ, z) , et (r, z) . Sur chaque figure le point noir correspond au point le plus bas de la goutte. Ces figures illustrent la propriété de fonction de Lyapunov de la fonction E , l'attractivité du domaine $\{H > 0\}$, et relient la présence des "ventres" dans le profil de la goutte au caractère asymptotiquement périodiques des solutions dans $\{H > 0\}$.

À l'intérieur du domaine où $H > 0$, les solutions du système initial (15) sont proches, sur des intervalles de temps bornés, de celles du système intégrable (équation limite) (17). Elles sont donc presque périodiques, et cette quasi-périodicité explique l'occurrence des ventres, en nombre arbitraire, dans les profils des gouttes de grande longueur. Pour z grand, on peut moyenniser les variations des quantités H et z au cours d'une "période" (le temps d'un premier retour) ; ces variations sur une période s'écrivent, au premier ordre en $1/z$,

$$\delta H = I(H)/z^2 \quad \text{and} \quad \delta z = -J(H)/z,$$

où I et J sont les valeurs (positives) de certaines intégrales le long des orbites périodiques du système intégrable (17). Cette expression suggère l'équation différentielle moyennisée suivante pour les variations de H avec z :

$$(18) \quad \frac{dH}{dz} = -\frac{1}{z} \frac{I(H)}{J(H)}.$$

Cette équation moyennisée admet une unique solution $z \mapsto \eta(z)$, définie sur $]0; 1[$, et vérifiant $\eta(z) \rightarrow 1/2$ quand $z \rightarrow 0$ et $\eta(z) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow 1$ (toutes les autres solutions se déduisant de celle-là par un changement linéaire en temps).

Pour tout $\bar{z} > 0$, considérons l'unique solution du système différentiel initial (15) correspondant à une goutte finie de longueur \bar{z} . On montre que cette solution intersecte une première fois (en fait une infinité de fois) le plan $\{z = 0\}$, et que la partie de la trajectoire précédant cette première intersection définit un graphe $z \mapsto (r(z), \theta(z))$ (dépendant de \bar{z}). Notons $H_{\bar{z}}(z)$ la valeur de la fonction H au point $(r(z), \theta(z))$ de ce graphe. Le théorème suivant est le résultat principal de [10].

Théorème 3.1 *La fonction $\kappa \mapsto H_{\bar{z}}(\kappa\bar{z})$, $\kappa \in [0; 1]$, converge vers la fonction η lorsque $\bar{z} \rightarrow +\infty$, uniformément sur tout compact de $]0; 1]$.*

Ce résultat décrit la forme globale des gouttes pendantes de grande longueur en fonction des ensembles de niveau de la fonction H . Sa signification concrète est la suivante : si l'on zoome d'un

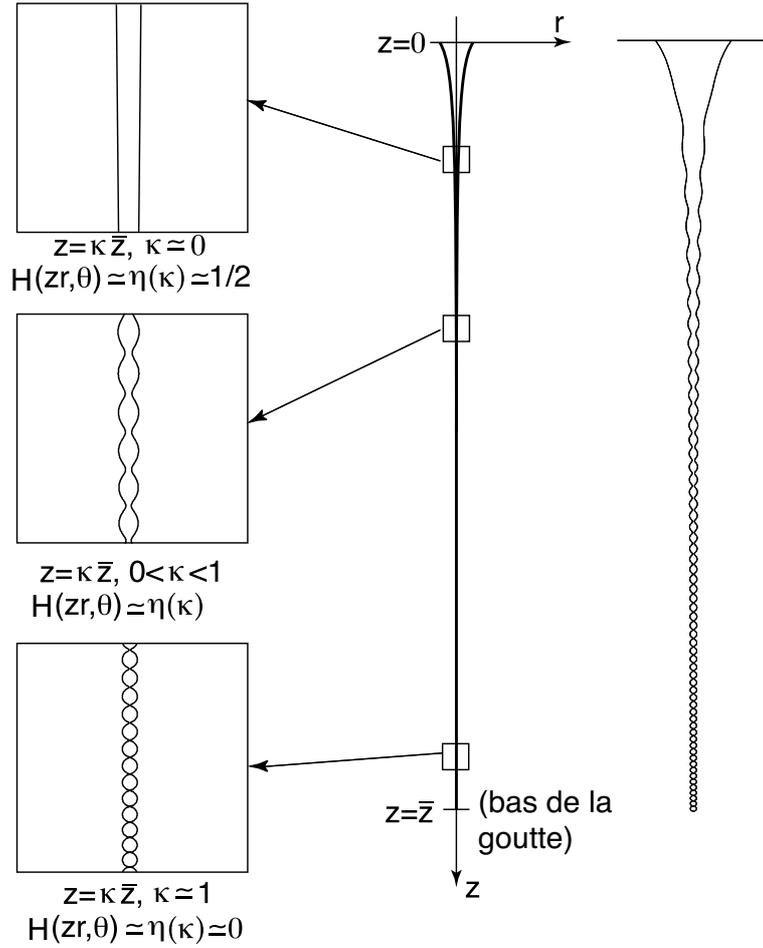


Figure 21: Forme d’une goutte de très grande longueur (le profil de droite est le résultat d’un calcul numérique, le profil de gauche est symbolique)

facteur $\kappa\bar{z}$ sur le profil de la goutte à la hauteur $\kappa\bar{z}$, la figure obtenue converge, lorsque $\bar{z} \rightarrow +\infty$, vers le profil associé à la solution périodique du système intégrable (17) sur l’ensemble de niveau $H = \eta(\kappa)$ (ceci est illustré sur la figure 21). Mentionnons le caractère “universel” de la fonction η qui apparaît dans ce théorème.

3.2.3 Unicité de la solution singulière

L’unicité de la solution singulière correspondant à une goutte de longueur infinie (conjecturée par Concus et Finn en 1975) a été récemment démontrée par Nickolov ([Nickolov 2001]). Dans [12], nous avons proposé une nouvelle démonstration de ce résultat, à nouveau par un argument de perturbation du système intégrable (17).

Théorème 3.2 *Il existe exactement une solution du système (15) vérifiant $(r, \theta, z) \rightarrow (0, 0, +\infty)$ lorsque $u \rightarrow -\infty$.*

Cette nouvelle preuve, du point de vue “système dynamique” est considérablement plus simple que celle proposée par Nickolov (l’argument tient en moins de trois pages, alors que l’article de Nickolov fait 43 pages).

On retrouve également (voir [10], corollaire 1) le résultat de Finn, selon lequel les gouttes de longueur finie \bar{z} convergent, uniformément sur tout compact en z , vers la goutte singulière de longueur infinie lorsque $\bar{z} \rightarrow +\infty$ (dans ce contexte, ce résultat apparaît comme une simple conséquence de la continuité des solutions d’une équation différentielle par rapport à la condition initiale).

3.3 Éléments de démonstration

Les démonstrations, dans l’ensemble élémentaires, sont basées sur des outils et raisonnements classiques de systèmes dynamiques.

La fonction de Lyapunov $E = -\sin \theta + z^2/2$, et l’attractivité du domaine où $H > 0$ permettent de dégager une classification de l’ensemble des solutions du système initial (15) en fonction de leur comportement asymptotique ([10], théorème 5). Les solutions correspondant aux gouttes pendantes de longueurs finies apparaissent comme les variétés instables des équilibres $(r, \theta, z) = (0, \pi/2, \bar{z})$, $\bar{z} \in \mathbf{R}$.

La description de la forme asymptotique des gouttes pendantes de grande longueur (théorème 3.1) est obtenue en contrôlant la différence entre les valeurs du Hamiltonien H le long d’une solution, et celles données par la solution η de l’équation différentielle moyennisée (18). La nécessité d’un contrôle uniforme dans le domaine “non compact” $\{H > 0\}$ présente une difficulté technique (la période des orbites périodiques de l’équation intégrable (17) diverge lorsqu’on s’approche du bord $\{H = 0\}$).

Cette description fournit une preuve immédiate de l’existence de la solution singulière (correspondant à une goutte de longueur infinie). Pour montrer l’unicité de cette solution singulière, on commence par remarquer (par un calcul élémentaire) qu’il existe un unique développement asymptotique (de R et θ , en puissances de $1/Z$) qui fournit une solution singulière formelle de l’équation différentielle (un tel développement asymptotique, sous une forme différente, figurait déjà dans les travaux [Concus 1975, 1, Concus 1975, 2] de Concus et Finn). Ensuite, on montre que le développement asymptotique de toute solution singulière (réelle) coïncide, à tout ordre, avec cette solution singulière formelle. En effet, dès qu’une solution s’écarte, à un ordre donné, du profil donné par ce développement asymptotique tronqué au même ordre, un calcul de moyennisation des variations de H montre que cette solution ne peut demeurer dans le domaine $\{H > 0\}$, et donc qu’elle ne peut correspondre à une goutte de longueur infinie. La répétition du même argument permet alors d’obtenir l’unicité (en utilisant le fait qu’une solution singulière, réelle, admet ce développement asymptotique jusqu’à l’ordre deux, on montre que toutes les autres solutions doivent s’en écarter, d’où l’unicité).

4 Autres travaux

Nous passons ici brièvement en revue les travaux [1], [2], [8, 9, 15, 17], qui figurent dans la liste de publications qui suit, mais dont il n'a pas été question précédemment.

Les publications [1] et [2] sont issues de mon travail de thèse, et traitent de dynamique holomorphe. Le long article [1] (une centaine de pages, qui lui confèrent le statut de “mémoire”) établit un théorème de conjugaison à des rotations pour des applications holomorphes proches de rotations dans un anneau de \mathbf{C} , sous une condition de petits diviseurs (condition de Bruno) qui est optimale pour le problème considéré. Ce résultat généralise le théorème, dû sous sa forme la plus précise à J.-C. Yoccoz, de conjugaison à des rotations des difféomorphismes analytiques du cercle proches de rotations. La démonstration est basée sur une construction de renormalisation avec dépendance analytique par rapport à un paramètre, qui fait intervenir des techniques d'analyse de plusieurs variables complexes (problème $\bar{\partial}$). Le théorème de conjugaison est ensuite étendu à des nombres de rotation complexes, et utilisé pour établir certaines propriétés nouvelles (continuité par rapport à un paramètre) des domaines singuliers de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman) des fractions rationnelles sur $\overline{\mathbf{C}}$.

Dans [2], on établit une classification des dynamiques qui peuvent être engendrées par une application holomorphe et injective f au voisinage d'un sous-ensemble compact invariant $K \subset \mathbf{C}$. On montre que, si $\mathbf{C} \setminus K$ a une ou deux composantes connexes, alors on peut associer à la paire (K, f) un *nombre de rotation* qui caractérise la dynamique : si ce nombre est rationnel, la dynamique est de type Morse-Smale, alors que s'il est irrationnel elle est proche de celle de la rotation irrationnelle de même angle. Si $\mathbf{C} \setminus K$ a plus de deux composantes connexes, la dynamique est toujours de type Morse-Smale.

Le modeste article [8], concomitant à l'apprentissage non linéaire de l'auteur, présente un calcul de perturbation relativement classique pour aboutir de manière rigoureuse au critère de Benjamin-Feir de stabilité de phase d'oscillations homogènes de petite amplitude.

Dans le court article [9], on montre que, pour une équation aux dérivées partielles générique, toute solution homogène en espace et périodique en temps est accompagnée par une famille à un paramètre d'ondes progressives (de grande longueur d'onde). Ceci répond à une question qui m'avait été posée par Pierre Coulet. La démonstration est formellement identique à celle du théorème de continuation de solutions périodiques de Poincaré, mais nécessite des outils de perturbation singulière (théorème de Fenichel).

Dans [15], on s'intéresse au rôle des coefficients de diffusion dans la compétition entre équilibres stables pour des équations de réaction diffusion. Cette question avait émergé de discussions avec Régis Ferrière. Elle est motivée par le problème, issu de l'écologie, du rôle de la mobilité dans la dominance, dans le cadre de la compétition entre espèces ou phénotypes.

Dans [Coulet 2002], Pierre Coulet et Lorenz Kramer se sont intéressés à un nouveau type de fronts, qu'ils nomment “fronts de rétraction”, dont le sens de propagation n'est pas gouverné par des effets variationnels, et qui fournissent un mécanisme simple pour expliquer des phénomènes d'intermittence spatio-temporelle. Ils ont exhibé une équation modèle très simple, appelée *équation de la chaleur complexe non linéaire* (il s'agit d'une limite distinguée d'équations de Ginzburg-Landau complexes), dont la dynamique est essentiellement gouvernée par ces fronts. Alors que les travaux présentés dans la partie 2 de ce mémoire sont consacrés au comportement global des systèmes “purement variationnels”, cette équation fournit un modèle archétypique de manifestation d'effets non variationnels (en ce sens, elle fournit une direction de recherche complémentaire). Dans [17] nous

avons démontré l'existence de ces fronts de rétraction, qui apparaissent comme limites de familles à un paramètre d'ondes progressives, présentant ainsi une analogie avec le cas des fronts de KPP ([Kolmogorov 1937]).

Remerciements. Les simulations numériques (figures 3, 4, 16, 18, 19, 20, 21) ont été réalisées grâce au logiciel NLKit, développé à l'INLN par Pierre Coulet et Marc Monticelli.

Liste de publications¹

Monographie de recherche

- [1] E. Risler, *Linéarisation des perturbations holomorphes des rotations et applications*, Mém. Soc. Math. France 77, 1999.

Articles parus ou à paraître dans des revues à comité de lecture

- [2] E. Risler, *Compacts connexes invariants par une application univalente*, Fund. Math. 161, 241-277 (1999).
- [3] E. Risler, *Spatially extended differential equations in a potential : on the borders of the basins of attraction related to local minima*, Jour. Diff. Equ. 166 (2), 347-384 (2000).
- [4] P. Couillet, E. Risler, N. Vandenberghe, *Spatial unfoldings of elementary bifurcations*, J. Stat. Phys. 101 (1/2), 521-541 (2000).
- [5] E. Risler, *Criteria for the stability of spatial extensions of fixed points and periodic orbits of differential equations in dimension 2*, Phys. D 146, 121-136 (2000).
- [6] M. Argentina, P. Couillet, E. Risler, *Self-parametric instability in spatially extended systems*, Phys. Rev. Lett., 86 (5) 807-09, 2001
- [7] E. Risler, *Generic instability of spatial unfoldings of almost homoclinic periodic orbits*, Comm. in Math. Phys., 216, 325-56, 2001
- [8] E. Risler. *A direct computation of the phase stability criterion for spatially homogeneous time periodic solutions close to a Hopf bifurcation*, Int. J. Bif. and Chaos 11 (8) 2097-2105, 2001.
- [9] E. Risler, *Travelling waves and dispersion relation in the spatial unfolding of a periodic orbit*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002).
- [10] C. Riera, E. Risler, *Axisymmetric capillary surfaces as a dynamical system*, Nonlinearity 15, 1843-1879 (2002).

Compte-rendus de conférences

- [11] P. Couillet, E. Risler, N. Vandenberghe, *Spatial unfolding of homoclinic bifurcations*, Proc. Conf. Cargèse 1999, à paraître.

Prépublications et articles soumis

- [12] E. Risler, *Uniqueness of the pendent drop of infinite length*, preprint INLN, 2002, soumis à Inv. Math.
- [13] E. Risler, *Invasion of a stable equilibrium for spatially extended gradient-like systems*, preprint INLN, 2002.

¹On a figuré en gras les références dont les résultats sont présentés dans ce mémoire d'habilitation. À l'exception des références [1] et [2], tous les articles mentionnés dans cette liste (pour les articles publiés, la version "prépublication") sont téléchargeables à l'adresse : <http://www.inln.cnrs.fr/~risler/>.

- [14] E. Risler, *Attractors of the border of the basin of attraction of a stable homogeneous equilibrium for spatially extended gradient-like systems*, preprint INLN, 2002, soumis à Jour. Dyn. Diff. Equ.
- [15] E. Risler, *Competition between stable equilibria in reacting-diffusing systems : the role of diffusion coefficients*, preprint INLN, 2002, soumis à Jour. of Math. Biol.
- [16] E. Risler, *Global behavior of spatially extended gradient-like systems*, en préparation.
- [17] G. Reocreux, E. Risler, *Retracting fronts for the nonlinear complex heat equation*, preprint INLN, 2002, soumis à Jour. Nonlin. Sci.

Références

- [Ambrosetti 1990] A. Ambrosetti, M. L. Bertotti, *Homoclinics for second order conservative systems*, PDE's and related subjects, M. Miranda Ed., Trento (Italy) 1990, Pitman Res. Notes Math. Ser. 269, 21-37, 1992.
- [Argentina 1999] M. Argentina, *Dynamique des systèmes bistables spatialement étendus*, Thèse Institut Non Linéaire de Nice, 1999.
- [Argentina 1997] M. Argentina, P. Coulet, L. Mahadevan, *Colliding Waves in a Model Excitable Medium : Preservation, Annihilation, and Bifurcation*, Phys. Rev. Letters, vol. 79, 15, 2803-2806, 1997.
- [Arnold 1983] V.I., Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Bidaut-Veron 1986] M.-F. Bidaut-Veron, *Global existence and uniqueness results for singular solutions of the capillarity equation*, Pacific J. Math., 125 (1986), 317-333.
- [Bidaut-Veron 1996] M.-F. Bidaut-Veron, *Rotationally symmetric hypersurfaces with prescribed mean curvature*, Pacific J. Math., 173 (1996), 29-67.
- [Borckmans 2001] P. Borckmans, G. Dewel, J. Verdasca, *Spatio-temporal Patterns in the CO Oxidation on Pt(110): The Role of Nonlinear Diffusion*, Phys. Rev. E 64 (2001).
- [Collet 1994] P. Collet, *Thermodynamic limit of the Ginzburg-Landau equations*, Nonlinearity 7, 1175-1190, 1994.
- [Concus 1975, 1] P. Concus and R. Finn, *A singular solution of the capillary equation I : existence*, Invent. Math. 29 (1975), 143-148.
- [Concus 1975, 2] P. Concus and R. Finn, *A singular solution of the capillary equation II : uniqueness*, Invent. Math. 29 (1975), 149-160.
- [Concus 1979] P. Concus and R. Finn, *The shape of a pendent liquid drop*, Phil. Trans. Roy. Soc. Lon., series A, 292 (1979), 307-340.
- [Coulet 1989] P. Coulet, L. Gil, J. Lega, *Defect-mediated turbulence*, Phys. Rev. Lett. 62, 1619-1622, 1989.

- [Coullet 2002] P. Coullet, L. Kramer, *Retracting fronts induce spatio-temporal intermittency*, preprint INLN, 2002, submitted to Phys. Rev. Lett.
- [Coullet 2000] *Instabilities of coupled quasi-homoclinic limit cycles*, Prog. Theor. Phys. Suppl. 139, 2000.
- [Eckmann 1998] J. P. Eckmann, J. Rougemont, *Coarsening by Ginzburg-Landau dynamics*, Comm. Math. Phys. 199, 441-470, 1998.
- [Edwards 1994] W.S. Edwards, S. Fauve, J. Fluid Mech. 278, 123 (1994).
- [Faraday 1831] M. Faraday, Philos. Trans. R. Soc. Lond. 52, 319 (1831).
- [Fife 1979] P. Fife, *Long Time Behavior of Solutions of Bistable Nonlinear Diffusion Equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. 70 (1979), 31-46.
- [Fife 1977] P. Fife, J. B. McLeod, *The Approach of Solutions of Nonlinear Diffusion Equations to Travelling Front Solutions*, Arch. Rat. Mech. Anal. 65, 335-361, 1977.
- [Fife 1981] P. Fife, J. B. McLeod, *A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for nonlinear diffusion*, Arch. Ration. Mech. Anal. 75, 281-314, 1981.
- [Finn 1986] R. Finn, *Equilibrium capillary surfaces*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 284. New York etc., Springer-Verlag (1986).
- [Finn 1992] R. Finn, *Green's identities and pendent liquid drops*, I, Dev. in Part. Diff. Equ. and Appl. to Math. Phys., G. Buttazzo *et al.* Ed., Plenum Press, New York, 1992.
- [Gallay 2001] Th. Gallay, S. Slijepcević, *Energy flow in extended gradient partial differential equations*, Jour. Dyn. Diff. Equ., 13, 4, 2001.
- [Guckenheimer 1983] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields*, Springer, New York, 1983.
- [Kelvin 1886] Lord Kelvin (sir W. Thomson), *Popular lectures and addresses, I* (1886), pp.1 London : The Royal Institution.
- [Kolmogorov 1937] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii, N. S. Piskunov, *A study of the equation of diffusion with increase in the quantity of matter, and its application to a biological problem*, Bjul. Moskovskovo Gos. Univ. 17, 1-72, 1937.
- [Kuramoto 1984] Y. Kuramoto, *Chemical oscillations, waves and turbulence*, Springer-Verlag, Berlin, New-York, 1984.
- [Laplace 1805] P.S. Laplace, *Mécanique céleste, suppl. au livre X* (1805).
- [Lin 1990] X.-B. Lin, *Using Melnikov's method to solve Shilnikov's problems*, Proc. R. Soc. Edinburgh A 116, 295-325, 1990.
- [Nickolov 2001] R. Nickolov, *Uniqueness of the singular solution to the capillary equation*, Indiana Univ. Math. J., 50, 4, 2001.
- [Pitts 1976] E. Pitts, J. Inst. Maths Applics 17 (1976) 387.

- [Sandstede 2001] B. Sandstede, A. Scheel, *On the stability of periodic travelling waves with large spatial period*, Jour. Diff. Eq. 172, 134-188, 2001.
- [Sandstede, Scheel 2001] B. Sandstede, A. Scheel, *On the structure of spectra of modulated travelling waves*, Math. Nach. 232, 39-93, 2001.
- [Silnikov 1968] L. P. Silnikov, *On the generation of a periodic motion from trajectories doubly asymptotic to an equilibrium state of saddle type*, Math. USSR Sbornik, 6, 427-438, 1968.
- [Vandenberghé 2002] Nicolas Vandenberghé, *Bifurcations d'orbites quasi-homoclines spatialement étendues et de systèmes quasi-réversibles et applications*, thèse Institut Non Linéaire de Nice, 2002.
- [Young 1805] T. Young, Phil. Trans. R. Soc., 95 (1805) 65.