Corrigé du devoir de math 3.

Exercice 1.

1. Si $x = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ on a $\cos(x) = 0$ et donc $f_n(x) = 1$ pour tout n. D'autre part si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a $\cos(x) > 0$ d'où $f_n(x) = \frac{1}{e^{n^2 \cos x}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Finalement la suite f_n converge simplement sur $J = I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \begin{cases} 0 \text{ si } x > 0; \\ 1 \text{ si } x = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases} \end{array}$$

2. Si $x = \pm\frac{\pi}{2}$ la série $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement. Montrons que cette série converge simplement sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: pour un tel x, on a $\cos x > 0$ et donc il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $\frac{1}{e^{n^2 \cos x}} \leq \frac{1}{n^2}$ (car $\frac{n^2}{e^{n^2 \cos x}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$). On a donc $\sum f_n(x) \leq \sum \frac{1}{n^2}$; cette dernière série étant convergente, la première l'est également.

3. Sur $K = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ on a $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et comme précédemment il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $f_n(x) \leq \frac{1}{e^{n^2\sqrt{2}/2}} \leq \frac{1}{n^2}$. Ceci montre que la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur K; ce qui implique qu'elle est aussi uniformément convergente. Les f_n sont des fonctions continues, donc les sommes partielles aussi, et finalement la limite s est continue comme limite uniforme de fonctions continues.

4. On calcule ${f'}_n(x) = \frac{n^2 \sin x}{e^{n^2 \cos x}}$, à nouveau il existe n_0 (différent de celui de la question précédente) tel que pour n n_0 et $x \in K$ on ait ${f'}_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$. On en déduit que la série $\sum {f'}_n(x)$ est normalement convergente sur K; la fonction s est donc dérivable sur K est sa dérivée est égale à $\sum {f'}_n(x)$.

   Comme $s'(x)$ est impaire (comme limite de fonctions impaires), pour montrer l'inégalité de l'énoncé il suffit de montrer $s'(x) \geq \frac{\sin x}{e}$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Dans ce cas $s'(x) = \sum \frac{n^2 \sin x}{e^{n^2 \cos x}}$ est une somme de fonctions positives et est donc plus grande que son premier terme, d'où

$$s'(x) \geq \frac{\sin x}{e^{\cos x}} \geq \frac{\sin x}{e} \text{ car } \cos x < 1 \Rightarrow \frac{1}{e^{\cos x}} > \frac{1}{e}$$

Exercice 2.

1. Graphe de f sur $[-4\pi, 4\pi]$:

2. La fonction f étant impaire de période 2π, son développement en série de Fourier est de la forme
$$Sf(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin nx \text{ où } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx.$$
Comme $f(x)\sin nx$ est paire on a $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(x-\pi)\sin nx\, dx$. En intégrant par parties on obtient :
$$b_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi (2x-\pi)\cos nx\, dx.$$
Une nouvelle intégration par partie donne :
$$\int_0^\pi (2x-\pi)\cos nx\, dx = -\frac{2}{n}\int_0^\pi \sin nx\, dx = \frac{2}{n}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi$$
et ce dernier terme est nul pour n pair, et égal à $-\frac{4}{n^2}$ pour n impair. Finalement pour tout n
$$b_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad b_{2n+1} = -\frac{8}{\pi(2n+1)^3}$$

3. La fonction f étant continue et dérivable par morceau, on a l'égalité $f(x) = Sf(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$.

4. On remarque qu'au point $x = \frac{\pi}{2}$ la série de Fourier $Sf(x)$ devient $-\frac{8}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, d'autre part $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4}$. Finalement
$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$
D'autre part, la formule de Parseval donne
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \sum_{n\geq 0}\frac{b_{2n+1}^2}{2} = \sum_{n\geq 0}\frac{32}{\pi^2(2n+1)^6}.$$
On calcule l'intégrale (en utilisant la parité pour la première égalité)
$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = 2\int_0^\pi x^2(x-\pi)^2(x)\, dx = 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2\pi x^4}{4} + \frac{\pi^2 x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^5}{15}.$$
Finalement on en déduit
$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

Exercice 3.

1. On applique la règle de d'Alembert :
$$\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{(n+1)^2-1}\frac{n^2-1}{nx^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|$$
D'où un rayon de convergence $R = 1$.

2. Notons que $f(0) = 0$. Pour calculer $f(x)$ sur $]-1,+1[\setminus\{0\}$ on remarque que $\frac{f(x)}{x} = \sum_{n\geq 2} \frac{nx^{n-1}}{n^2-1}$ est la dérivée de $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n^2-1}$. On écrit

$$\frac{x^n}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^n}{n+1} - \frac{x^n}{n-1}\right).$$

Rappelons qu'en intégrant la série géométrique $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ on obtient $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ pour tout $x \in]-1,1[$. On en déduit

$$\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n\geq 2} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right)$$

et

$$\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n-1} = x\sum_{n\geq 2} \frac{x^{n-1}}{n-1} = x\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -x\ln(1-x).$$

On a donc

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(1-x)}{x} - 1 - \frac{x}{2} + x\ln(1-x)\right)' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1-x}\frac{1-x^2}{x} - \ln(1-x)(-1-1/x^2)\right)$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{1+x^2}{x}\ln(1-x)\right)$$

3. Au point $x = 1$, on obtient la série $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^2-1}$. En remarquant que $\frac{n}{n-1} > 1$ on peut écrire

$$\frac{n}{n^2-1} = \frac{n}{(n-1)(n+1)} > \frac{1}{n+1}$$

et ce dernier terme est le terme général d'une série divergente, ainsi la série $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^2-1}$ est aussi divergente.

Au point $x = -1$, on obtient la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n n}{n^2-1}$ qui est convergente par le critère de convergence pour les séries alternées (son terme général tend vers 0).