Devoir à la maison Math 3, octobre 2008

Octobre 2008

Exercice 1. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction définie sur $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f_n(x) = \exp(-n^2 \cos(x)).$$

1. Sur quel sous-ensemble J de I la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle simplement ? Déterminer la fonction limite sur J.
2. Sur quel sous-ensemble de J la série de fonctions $s(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge-t-elle simplement ?
3. Montrer que la série de fonctions converge normalement sur le segment $K = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. La fonction s y est-elle continue ?
4. Montrer que s est dérivable sur K, et déterminer sa dérivée sous forme de somme. Montrer que pour tout $x \in K$,
$$|s'(x)| \geq \frac{|\sin x|}{e}.$$

Exercice 2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire, définie par $f(x) = x(x-\pi)$ sur $[0, \pi]$.

1. Représenter le graphe de la fonction sur $[-4\pi, 4\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier $Sf(x)$ de cette fonction.
3. Pour quels valeurs de x a-t-on $f(x) = Sf(x)$?
4. Déterminer la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

Exercice 3. On considère la série entière de variable réelle $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx^n}{n^2-1}$.

1. Calculer le rayon de convergence R de f.
2. Déterminer f.
3. Etudier la série en $x = R$ et $x = -R$.