Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Math III Analyse 2009-2010

Contrôle Continu Ecrit Final - Math III Analyse
20 Janvier 2010

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h00. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés.

Questions de cours (20 minutes)(6 points + 1 point bonus)

1. (5 min) (1 point) Donner la définition de la convergence normale d'une série de fonctions.

2. (5 min) (2 points) Démontrer que toute série normalement convergente est uniformément convergente

3. (5 min) (1 point) Enoncer, **sans le démontrer**, le théorème de Dirichlet-Jordan

4. (5 min) (2 points) Enoncer, **sans le démontrer**, le théorème de Parseval-Bessel

5. (BONUS) (+1 point) Démontrer l'inégalité de Bessel

Exercice 1. (40 minutes)(6 points)

Soit la fonction f paire, 2π-périodique définie pour tout $x \in [0, \pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

1. (5 min) (1 point) Faire un rapide dessin de la fonction.
2. (5 min) (1 point) Est-ce que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier ?
3. (20 min) (2 points) Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle puis en déduire sa série de Fourier en formulation complexe.
4. (10 min) (2 points) En déduire la valeur des sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Indication : pour la dernière somme, on pourra utiliser l'égalité de Parseval.

5. (BONUS) (+1 point) En remarquant que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

et en trouver la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2. (30 minutes)(4 points)

1. (25 min) (3 points) Montrer que l'équation différentielle

$$x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y - 1 = 0$$

admet une unique solution développable en série entière.

2. (5 min) (1 point) Quel est le rayon de convergence de cette série ?

Exercice 3. (30 minutes)(4 points + 1 point bonus)

1. (10 min) (2 points) Quel est le rayon de convergence des séries suivantes des séries entières de la forme $\sum a_n z_n$ pour
   a. $a_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}+5}$, où $n \in I\!N^*$.
   b. $a_n = \frac{n^3}{3^n}$, où $n \in I\!N$.
2. (20 min) (2 points) Soit $(f_n)_{(n \in I\!N^*)}$ la suite de fonctions définies sur $I\!R$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}.$$

   a. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
   b. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout segment borné $[a, b]$.
   c. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $[a, +\infty[$.
   d. (BONUS) Calculer la limite lorsque $n \to \infty$ de $I_n = \int_0^1 fn(x)dx$.