Math II Analyse
Année 2007-2008

Formule de Taylor

Exercice 1. Dérivées successives.

1) a)Calculer les dérivées successives jusqu'à l'ordre 4 de la fonction $x \to \frac{1}{x+\alpha}$ où α est un réel fixé.

b) Trouver les réels a et b tels que :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$$

pour tout $x \neq 1$ ou -1. En déduire une expression de la dérivée quatrième de la fonction $x \to \frac{1}{x^2-1}$.

2) Calculer la dérivée n-ième de :

a) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$; b) $f(x) = \cos x$; c) $f(x) = \ln(1+x)$

Exercice 2. Valeur approchée de $\ln(1.003)$

Soit x un réel strictement positif. En utilisant une formule de Taylor, montrer :

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3}{3}.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(1.003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 3.

Montrer que dans le developpement de Taylor Mac-Laurin de la fonction $x \to e^x$, le reste R_n vérifie :

$$\forall x > 0,\ R_n(x) \leq \frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}.$$

En déduire la valeur de e^2 avec une erreur inférieure à 10^{-4}, sachant que $e < 3$.

Exercice 4.

a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$:

$$0 \leq \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} \leq 5\frac{x^3}{81}.$$

b) Montrer que pour tout réel x :

$$|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2}e^{|x|}.$$

c) Montrer que pour tout réel $0 < x < 1$:

$$\mathrm{ch}(x) < 1 + x^2.$$

d) Montrer que pour tout réel $x \in [0, \pi]$:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Exercice 5.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe C^2 et soit M une constante positive. On suppose que pour tout t réel, $|\varphi''(t)| \leq M$.

Montrer que pour tous s, t de $\mathbb{R}$, on a :

$$\varphi(t) + s\varphi'(t) + \frac{s^2}{2}M \geq 0.$$

En déduire que pour tout t réel, on a :

$$|\varphi'(t)| \leq \sqrt{2M}\sqrt{\varphi(t)}.$$

Exercice 6.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f \in C(I, \mathbb{R})$ vérifiant $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer que :

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \sup_I f''.$$

Exercice 7.

a) Soit f de classe C^2 de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Montrer que quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a :

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \to f''(x).$$

b) Soit f de classe C^n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Montrer que quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a :

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p \binom{n}{p} f\left[x + (n-p)h\right]}{h^n} \to f^n(x).$$