EXERCICES SUR PRIMITIVES ET INTEGRALES

Exercice 1 Calculer, sur un intervalle non trivial o le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+9x^2}$, d) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-9x^2}$,

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x-15}$, f) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-12x+18}$,

g) $\displaystyle\int \frac{2dx}{(x-5)^4}$, h) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-14x+50)^2}$,

i) $\displaystyle\int \frac{3x-3}{x^2+x-2}\,dx$, j) $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$.

k) $\displaystyle\int \frac{3x^2-3x+1}{(x^2-2x+2)(x-1)}\,dx$, l) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{500}(x-1)}$.

m) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$, n) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$,

o) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$, p) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{4x^3+x}\,dx$.

Exercice 2 Calculer par parties les intégrales ou primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$, b) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$, c) $\displaystyle\int \ln|x|\,dx$,

d) $\displaystyle\int \sin(\ln|x|)\,dx$, e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\cos(3x)\,dx$, f) $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$,

g) $\displaystyle\int x^2\ln|x|\,dx$, h) $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\,dx$, i) $\displaystyle\int_0^1 x\arctan^2 x\,dx$,

j) $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$, k) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$, l) $\displaystyle\int \sin(3x)\cos(5x)\,dx$.

Exercice 3 Calculer les primitives ou intégrales suivantes en utilisant un changement de variable :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ $(x=\frac{1}{t})$, b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ $(x=-\ln t)$, c) $\displaystyle\int x\,(5x^2-3)^7\,dx$ $(t=5x^2-3)$,

d) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ $(t=\sqrt{x+1})$, e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ $(x=\tan u)$, f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$ $(u=\tan\frac{x}{2})$,

g) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$, h) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$, i) $\displaystyle\int \tan x\,dx$,

j) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$, k) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$, l) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x+\sin x}$,

m) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, n) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$, o) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$,

p) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$, q) $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{ch}x}$, r) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$,

s) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln|x|}$, t) $\displaystyle\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$, u) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}$.

Exercice 4 Pour $n \geq 0$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Montrer que pour $n=2k$ pair

$$I_{2k} = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2k)}\,\frac{\pi}{2}$$

et que pour $n=2k+1$ impair

$$I_{2k+1} = \frac{2\times 4\times\cdots\times(2k)}{3\times 5\times\cdots\times(2k+1)}$$

3) Montrer que I_n est une fonction dcroissante de n.

4) Montrer que quand $k\to+\infty$

$$\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{2k}{2k-1}\times\frac{2k}{2k+1}\to\frac{\pi}{2}$$ (c'est la “formule de Wallis”).

Exercice 5 Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ c) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$ d) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}$

(Pour la question b), les paramtres a, b et c sont réels , avec $a\neq 0$; on sera amené à discuter selon le signe de a).

Exercice 6 Résoudre les équations différentielles suivantes, dans laquelle l'inconnue est y, fonction dérivable d'une variable réelle notée x et spécialiser le résultat tel que $y(0)=1$:

a) $\mathrm{ch}x\,y' + \mathrm{sh}x\,y = \dfrac{1}{\mathrm{sh}x}$ b) $\mathrm{ch}x\,y' + \mathrm{sh}x\,y = e^x$ c) $\sqrt{x^2+x-6}\,y' + y = 0$

d) $x\,y' + y = \dfrac{2}{(2+3x^2)^2}$ e) $(9-x^2)\,y' + x\,y = x^2$ f) $x\,y' + 7y = \ln x$