Partiel Math 3

novembre 2008

–Durée 1h30.–

Aucun document autorisé, ni calculatrice. Les correcteurs tiendront largement compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Soit $f(z)$ la série entière définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{n}} z^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de f.
2. Pour quels points du cercle de convergence la série converge-t-elle ?
3. En utilisant un encadrement simple de $e^{\sqrt{n}}$, montrer que pour tout $x \in [0, \frac{1}{e}[$, on a l'inégalité $\frac{1}{1-x} \leq f(x) \leq \frac{1}{1-ex}$.

Exercice 2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique, définie par $f(x) = e^x$ sur $]-\pi, \pi]$.

1. Montrer que $8 < e^\pi < 81$.
2. Représentez le graphe de la fonction sur $[-2\pi, 2\pi]$. On choisira pour e^π la valeur approchée 23.
3. En intégrant deux fois par partie, déterminer les coefficients a_n de la série de Fourier $Sf(x)$ associée à f.
4. En limitant les calculs, montrer que $b_n = -na_n$ pour tout $n \geq 1$.
5. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = Sf(x)$?
6. Déterminer la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Exercice 3. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} e^{-x} - \frac{\partial f}{\partial y} e^{-y} = 2e^x,$$

qu'on cherche à résoudre pour x et y dans $\mathbb{R}$.

1. Soit le changement de variables $u = e^x$ et $v = e^x + e^y$. Montrer que l'application $\phi(x, y) = (u, v)$ est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ v > u > 0\}$, puis que c'est un difféomorphisme.
2. Soit $F(u, v) = f(x, y)$. Déterminez les dérivées partielles de f en fonction de celles de F.
3. Trouver une équation différentielle simple vérifiée par F.
4. En déduire la forme générale de F, puis de f.
5. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, x) = 5e^{2x}$. En déduire f.