Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Math III-analyse
Année 2009/2010

Série n°2 :
Séries Numériques

Exercice I : Quelques séries simples

1. Calculer les sommes suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$. On appliquera ici Taylor-Lagrange à l'exponentielle entre 0 et 1.
   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. On appliquera ici Taylor-Lagrange à $-\ln(1+x)$ entre 0 et 1.
2. Etudier la convergence des séries $\displaystyle\sum\frac{n^2}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Exercice II : Séries à termes positifs

1. Etudier la convergence de la série de terme général u_n :
   (a) $u_n=\dfrac{n+1}{n^3-7}$, $u_n=\dfrac{n+1}{n^2-7}$, $u_n=\dfrac{n+1}{n-7}$
   $u_n=\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $u_n=\dfrac{2^n+3^n}{n^2+5^n}$, $u_n=\dfrac{1}{n^{(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}}$.
   (b) $u_n=\dfrac{1}{\ln(n^2+2)}$, $u_n=\dfrac{\ln(n)}{n^{3/2}}$, $u_n=\dfrac{n}{2^n}$, $u_n=\dfrac{n^{100\,000}}{2^n}$.
   (c) $u_n=\dfrac{1}{n!}$, $u_n=\dfrac{n^{100\,000}}{n!}$, $u_n=\dfrac{2^n}{n!}$, $u_n=\dfrac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$.
   (d) $u_n=\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$, $u_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$, $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.
2. (a) Trouver une primitive de $x\mapsto 1/(x\ln^3(x))$.

(b) Montrer que pour $a > 1$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3(x)}$ est convergente.

(c) On pose $u_n = 1/(n \ln^3(n))$ pour $n \geq 2$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

(d) Donner un encadrement de R_n, le reste d'ordre n de $\sum u_n$.

Exercice III : Séries à termes quelconques

1. Etudier la convergence de la série de terme général u_n :

   (a) $u_n = (-1)^n \dfrac{n^3}{n!}$, $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$ $(a \in \mathbb{C})$, $u_n = na^{n-1}$ $(a \in \mathbb{C})$.

   (b) $u_n = (-1)^n \dfrac{1}{\ln(n+1)}$, $u_n = \sin((n + 1/n)\pi)$, $u_n = (-1)^n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$.

2. Etudier la convergence de la série de terme général u_n :
   $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$, $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$.

3. (a) En linéarisant $\cos^2(n)$, montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\cos^2(n)}{n}$ diverge.

   (b) En utilisant un développement limité, montrer que la série de terme général
   $u_n = \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$, pour $n \geq 1$, diverge.

4. Etudier la convergence de la série de terme général u_n :
   $u_n = n \ln(1 + 1/n) - \cos(1/\sqrt{n})$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$.

5. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \displaystyle\sum_{n=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}$.

6. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \displaystyle\sum_{n=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k! 2^{n-k}}$.

7. Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

   (a) $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{\sin(2n)}{n^{3/4}} \right)$,

   (b) $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{1 - n^{(n-3/4)}}{n^n} \right)$,

   (c) $\displaystyle\sum \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}} - \exp\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}} \right) \right)$.