Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Math III-analyse
Année 2009/2010

Série n°5 :
Séries entières

Exercice I : Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes ($z \in \mathbb{C}$) :

1. $\sum (-1)^n (n+3)!\, z^n$,
2. $\sum n^n z^n$,
3. $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$,
4. $\sum \dfrac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n$,
5. $\sum z^{n!}$,
6. $\sum (1+1/n)^{(n^2)} z^n$,
7. $\sum (1+(-1)^n/n)^{(n^2)} z^n$.

Exercice II : Rayon de convergence

soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum a_n z^{3n}$,
2. $\sum a_n 3^n z^{2n}$.

Exercice III : Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes :

1. $\sum (-1)^n \dfrac{n^n}{n!} z^{4n+1}$,
2. $\sum \dfrac{n!}{1.3\ldots(2n+1)} z^{2n+3}$.

Exercice IV : Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence, R, de $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$, puis étudier sa convergence pour $|z| = R$.

Exercice V : Vrai ou Faux

Vrai ou faux ?

1. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
2. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même domaine de convergence.

Exercice VI : Série entière, calcul explicite

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum x^n$.
2. En utilisant l'expression des sommes partielles d'une série géométrique, montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1/(1-x)$.
3. En déduire le rayon de convergence et la somme de $\sum nx^n$, de $\sum n^2 x^n$ et de $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Exercice VII : Rayon de convergence

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
2. Calculer les dérivées successives de $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.
3. En utilisant Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(x)$.
4. En déduire le rayon de convergence et la somme de $\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Exercice VIII : Séries entières et équation différentielle

Déterminer les séries entières solutions de

$$x^2 f''(x) - x(2x^2 - 1)f'(x) - (2x^2 + 1)f(x) = 0. \tag{1}$$

Calculer le rayon des séries entières obtenues.