Université Claude Bernard Lyon 1 — 2005–2006

Licence ST, L2.

Mathématiques III-1, analyse. Examen. 2 Juin 2006.

Durée 2h. Documents et calculettes interdits.

I) Questions de cours:

1. Enoncer la règle de dérivation des séries de fonctions (2 points).
2. Donner le développement en série entière de $\arctan(x)$ et son rayon de convergence (1 point).

II) On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\ln(2+x^2+n)}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (1 point).
2. Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle $\sum f_n$ converge normalement (1 point).
3. Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (2 points).

III) On considère l'équation différentielle $(1+x^2)f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) = 0$. On cherche f sous la forme $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Déterminer les séries entières f solutions de l'équation différentielle et vérifiant $f(0) = 0$ (2 points).
2. Calculer leur rayon de convergence (1 point).
3. On suppose maintenant de plus que $f'(0) = 1$. Montrer qu'alors $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ (1 point).

IV) Développer en série entière et déterminer le rayon de convergence :
$\ln(x^2+3x+2)$ (2 points), $\dfrac{1}{(4+x^2)^{3/2}}$ (2 points).

V) On considère la fonction f de période 2π définie par $f(x) = e^{1-2x}$ sur $[-\pi, \pi[$.

1. Etudier la convergence de sa série de Fourier (1 point).
2. Calculer sa série de Fourier sous forme complexe (2 points) puis sous forme réelle (1 point).
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{4+n^2}$ (1 point).

II) 1) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n f_n(x_0) = \dfrac{1}{\ln(2+x_0^2+n)} > 0$

donc $\sum f_n(x_0)$ est alternée. De plus $(|f_n(x_0)|)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{\ln(2+x_0^2+n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

est décroissante et tend vers 0.

Donc d'après la règle des séries alternées, $\sum f_n(x_0)$ converge. Donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. $\sum |f_n(x_0)| = \sum \dfrac{1}{\ln(2+x_0^2+n)}$

Or $\dfrac{n}{\ln(2+x_0^2+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc pour n assez grand,

$\dfrac{n}{\ln(2+x_0^2+n)} \geq 1$ donc $\dfrac{1}{\ln(2+x_0^2+n)} \geq \dfrac{1}{n} > 0$. Or $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge

donc $\sum \dfrac{1}{\ln(2+x_0^2+n)}$ diverge. Donc $\sum f_n(x_0)$ n'est pas absolument convergente, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$. Donc il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle $\sum f_n$ converge normalement.

3) Montrons que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$:

On pose $f_n(x) = \alpha_n(x)\, u_n(x)$ avec $\alpha_n(x) = \dfrac{1}{\ln(2+x^2+n)}$

et $u_n(x) = (-1)^n$.

On a i) $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $(\alpha_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \dfrac{1}{\ln(2+x^2+n)} \leq \dfrac{1}{\ln(2+n)}$

donc $0 \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{1}{\ln(2+x^2+n)} \leq \dfrac{1}{\ln(2+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$

iii) $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|\sum\limits_{n=0}^{N} u_n(x)\right| = \left|\sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n\right| \leq 2$

Donc d'après la règle d'Abel uniforme $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue sur $\mathbb{R}$

donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

III) 1) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $f'(x) = \sum_{n=1} n a_n x^{n-1}$,

$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

On a donc $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4n a_n x^n$

$+ \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^n = 0$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^n = 0$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + \left(n(n-1) + 4n + 2 \right) a_n \right] x^n = 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n^2 + 3n + 2) a_n = 0$

donc $a_{n+2} = -a_n$.

On $f(0) = a_0 = 0$ donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = (-1)^p a_1$

$f(x) = a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{2p+1} = a_1 x \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{2p}$

2.) On pose $X = x^2$ et on étudie $\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p X^p$.

$\frac{|(-1)^{p+1}|}{|(-1)^p|} = 1 \xrightarrow[p \to +\infty]{} 1$ donc le rayon de la série en X est 1. Donc celui de la série en x est aussi 1.

3.) $f'(0) = a_1 = 1$. Donc $f(x) = x \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (x^2)^p$

Or $\forall x \in]-1, 1[$ $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (x^2)^p$

Donc $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

IV) $\ln(x^2+3x+2) = \ln(x+1) + \ln(x+2)$.
Le plus grand intervalle de la forme $]-R, R[$ sur lequel la fonction est définie est $]-1, 1[$.

On $\forall x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$