1 Curriculum Vitae

Nom :	Alina Firicel
Date de naissance :	05.06.1983
Nationalité :	Roumaine
Titre :	Docteur en Science (Spécialité Mathématiques) Qualifiée en section 25 du CNU.

CURSUS PROFESSIONNEL

2010-2011 ATER à mi-temps en Mathématiques à l'Université Lyon 1

2007-2010 Allocataire-monitrice en Mathématiques à l'Université Lyon 1

CURSUS UNIVERSITAIRE

2007-2010 Doctorat en Mathématiques à l'Université Lyon 1

Thèse : *Quelques contributions à l'étude des séries formelles à coefficients dans un corps fini* - Soutenue le 8 Décembre 2010

Directeur de thèse : Boris Adamczewski
Rapporteurs : Jason Bell, Christian Mauduit
Jury : Boris Adamczewski, Jean-Paul Allouche (président), Valérie Berthé, Christian Mauduit (rapporteur), Federico Pellarin, Luca Zamboni

2006-2007 Master 2 de Mathématiques à l'ENS Lyon (Mention Très Bien)

Mémoire de Recherche : *Automates finis et développements dans le corps des fonctions en caractéristique positive*
Encadrant : Boris Adamczewski

Stage de Recherche : *Asymptotic basis sets of integers*
Encadrant : Georges Grekos

Stage de Recherche : *Nombres de Turan et le problème de Zarankiewicz*
Encadrant : Adrian Bondy

2005-2006 Maîtrise de Mathématiques à l'Université Lyon 1 (Mention Bien)

Mémoire de Recherche : *Transformations conformes entre domaines non simplement connexes*
Encadrant : Dragos Iftimie

2004-2005 Licence de Mathématiques à l'Université Lyon 1

2002-2004 Classes préparatoires à l'Intitut National des Sciences Appliquées, Lyon

1998-2002 Baccalauréat Série S, Collège National Carol I, Craiova (Mention très bien)

DISTINCTIONS

Olympiades Nationales de Mathématiques, Roumanie
3^{e}Prix en 2000, Mention Spéciale en 1999, 1erPrix en 1998,
1erPrix départemental et qualification aux Olympiades Nationales de Mathématiques en 1995-2001.

Concours internationaux de Mathématiques (1997-2001)
Diplôme du Concours International "Atanas Radev", Bulgarie
Participation au lot national préparant le Concours Balkanique de Mathématiques.

Concours nationaux de Mathématiques (1997-2001)
3^{e}rang au Camp National des Mathématiques, 3^{e}rang au Concours National "Gheorghe Titeica", 3^{e}rang au Concours National "Gheorghe Titeica" par équipe, 3^{e}rang au Concours National "Nicolae Paun".

DOMAINES DE RECHERCHE

Théorie des nombres : transcendance en caractéristique non nulle, approximation diophantienne, fractions continues.

Combinatoire des mots : complexité des facteurs, théorie des automates finis, morphismes de monoïdes libres.

DIVERS

Langues

- Roumain, langue maternelle
- Francais, bilingue
- Anglais, très bon niveau
- Espagnol, bonne compréhension

Informatique

- bonnes connaissances de Maple, Matlab, Sage, Pari

2 Activités d'enseignement

J'encadre des Travaux Dirigés de niveau Licence (anciennement DEUG et Licence) depuis quatre ans, au début comme monitrice à l'Université Claude Bernard Lyon 1, et cette année comme Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche (à mi-temps) au sein de la même université.

Enseignements effectués durant mon année d'ATER

Actuellement, en tant qu'Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche à l'Université Claude Bernard Lyon 1, j'encadre les enseignements suivants.

- Travaux dirigés en Licence de Mathématiques, 3^{e}année– Algèbre et Théorie des nombres

  Chargée d'une section de TD (cours de Georges Tomanov). Volume 36h.

  Programme : Arithmétique : nombres premiers, théorème de Bezout, algorithme d'Euclide, dé composition en facteurs premiers, indicatrice d'Euler. Groupes : groupes commutatifs, sous-groupes, morphismes, produit direct, groupes cycliques. Structure des groupes abéliens de type fini. Classes modulo un sous-groupe. Théorème de Lagrange, groupe quotient, groupes de permutations, actions de groupes. Anneaux, corps et polynômes : anneaux intègres, sous-anneaux, morphismes d'anneaux, corps des fractions, produit direct d'anneaux, anneaux quotients, ideaux, anneaux principaux, anneaux factoriels, polynômes à coefficients entiers et rationnels.

- Khôlles en Licence de Mathématiques, 3^{e}année– Algèbre et Théorie des nombres

  Chargée de 24h (cours de de Georges Tomanov).

- Travaux dirigés en Licence de Mathématiques, 1reannée– Math I Algèbre.

  Chargée d'une section de TD (cours de Philippe Malbos). Volume 36h.

  Programme : Ensembles, applications, dénombrement, groupes, morphismes de groupes, théorème de Lagrange, nombres complexes, polynômes, fractions rationnelles, arithmétique élémentaire, etude du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, équations de congruence, petit théorème de Fermat.

Enseignements effectués durant mes années de monitorat

J'ai effectué mon monitorat à l'Université Claude Bernard Lyon 1 au sein de l'UFR de Mathématiques durant les années universitaires 2007-2008, 2008-2009, 2009-2010. Durant les trois années de monitorat, différentes charges d'enseignement m'ont été confiées. En tant que monitrice, j'étais aussi rattachée au Centre d'Initiation à l'Enseignement Supérieur de la région lyonnaise. Chaque année des stages de pédagogie et de communication ont été proposés. Je vais synthétiser dans la suite mes activités pédagogiques ainsi que les formations que j'ai suivies au cours des stages organisés par le CIES.

- **2009-2010**

  Travaux dirigés en Licence de Mathématiques, 2^{e}année– Math III Analyse.

  Chargée d'une section de TD (cours de Laurent Pujo-Menjouet). Volume 36h.

  Programme : Séries numeriques, suites et séries de fonctions, séries entieres, séries trigonométriques, séries de Fourier. Introduction à SAGE.

- **2008-2009**

  Travaux dirigés en Licence de Mathématiques, 1^{re}année– Math II Analyse.

  Chargée d'une section de TD (cours de Jiang Zeng). Volume 36h.

  Travaux dirigés en Licence de Physique, 2^{e}année– Math 3.

  Chargée d'une section de TD (cours de Damien Gayet). Volume 18h.

  Programme : Suites et séries numeriques et de fonctions (généralites, séries entiéres, séries de Fourier), notions sur les équations aux derivées partielles (formule de d'Alembert, Laplace, équations linéaires : Poisson, Laplace, l'équation de la chaleur), algèbre linéaire (généralites, résolution des systemes linéaires, réduction des endormorphismes, espace vectoriel muni d'un produit scalaire, formes quadratiques : coniques).

  Khôlles en Licence de Mathématiques, 2^{e}annee– Math III Algebre

  Chargée de 24h (cours de Alexis Tchoudjem).

  Programme : Polynôme caractéristique, espace propres, valeurs propres et diagonalisation, trigonalisation d'un endomorphisme, sous-espaces caractéristiques, polynômes d'endomorphismes, théorème de Cayley-Hamilton, polynôme minimal, décomposition de Jordan, application aux systemes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, produit scalaire sur un espace vectoriel réel, espace euclidien, groupe orthogonal, forme normale des isométries vectorielles en dimension 2 *et* 3.

- **2007-2008**

  Travaux dirigés en Licence de Mathématiques, 1^{re}année– Math II Analyse.

  Chargée de deux sections de TD (cours de Pierre Lavaurs, respectivement de Jiang Zeng). Volume 72h.

  Programme : Fonctions élémentaires, formules de Taylor, équivalents, développements limités et asymptotiques, application au calcul de limites, intégration des fonctions réelles : théorie et pratique.

Stages suivis

- Donner un cours - faire une conférence
- Création de pages web
- PowerPoint : présentation assistée par ordinateur
- Découvrir LaTeX
- Gérer son stress - Stress en situation d'enseignement
- Découvrir Sage

3 Activités de recherche

Communications orales

- Séminaire de Théorie des Nombres, Nancy, mai 2011
  Approximation diophantienne et automates finis
- Séminaire Ernest, Luminy, Marseille, mai 2011
  Approximation diophantienne et automates finis
- Séminaire d'arithmétique, Saint-Etienne, avril 2011
  Propriétés diophantiennes des séries de Laurent à coefficients dans un corps fini
- Groupe d'Étude sur les ProBlèmes Diophantiens, mars 2011
  Approximation rationnelle des séries de Laurent algébriques à coefficients dans un corps fini
- Séminaire de l'équipe LIMD, Chambery, mars 2011
  Séries de Laurent en caractéristique non nulle
- Algorithms Project's Seminar, INRIA, Paris, mars 2011
  Automates et séries de Laurent algébriques
- Séminaire "Automates", LIAFA, Paris, mars 2011
  Automates et séries de Laurent algébriques
- Rencontres Arithmétique de l'Informatique Mathématique– Perpignan, février 2011
  Une classification des séries de Laurent à coefficients dans un corps fini
- Séminaire de Théorie des Nombres, Grenoble, février 2011
  Mesures d'irrationalité des séries de Laurent algébriques à coefficients dans un corps fini
- Numeration : Mathematics and Informatics – CIRM, Luminy, mars 2009
  Subword complexity and finite characteristic numbers
- Séminaire de Théorie des Nombres et Combinatoire, Lyon, janvier 2009
  Complexité et séries formelles à coefficients dans un corps fini

Participations à des conférences

- AutoMathA : from Mathematics to Applications – Liege, Belgique– Du 8 au 12 juin 2009

- School on Combinatorics, Automata and Number Theory – Liege, Belgique– Du 1er au 5 juin 2009
- Numeration : Mathematics and Informatics – CIRM, Luminy, France – Du 23 au 27 mars 2009
- Arithmétique des corps de fonctions en caractéristique positive – Caen, France – Du 19 au 21 juin 2008
- Approximation diophantienne et théorie analytique des nombres – St. Etienne, France – Du 5 au 7 juin 2008
- Développements récents en aproximation diophantienne – CIRM, Luminy, France – Du 8 au 12 octobre 2007

Participations à des groupes de travail

- Groupe de travail « Transcendance en caractéristique non nulle »,
  Institut Camille Jordan, Lyon (2007-2008).
- Groupe de travail « Propriétés diophantiennes des séries de Laurent »,
  Institut Camille Jordan, Lyon (2008-2009).
- Groupe de travail « Théorie algébrique des automates à pile »,
  Institut Camille Jordan, Lyon (2010-2011).

Invitations à l'étranger

- Université de Turku (Finlande) – Du 7 au 12 mars 2011.

Co-organisation des conférence

- Membre du comité d'organisation de « Numération : Mathématiques et Informatique », 23 au 27 mars 2009 à Marseille au CIRM (environ 100 participants).

  `http://www.liafa.jussieu.fr/~steiner/num09/`

4 Publications et autres travaux

Publications

- Subword complexity and finite characteristic numbers, *Actes des rencontres du CIRM*, Numeration : Mathematics and Computer Science, **1** (2009), 29–34.
- Sur le développement en fraction continue d'une généralisation de la cubique de Baum et Sweet, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* **22** (2010), 629–644.
- Subword complexity and Laurent séries with coefficients in a finite field, 22 pages, à parraître dans *IINTEGERS : The Electronic Journal of Combinatorial Number Theory.*

Prépublications

- Rational approximations of algebraic Laurent séries with coefficients in a finite field, 24 pages, soumis. `http://arxiv.org/abs/1102.5764`

Thèse de doctorat

- Quelques contributions à l'étude des séries formelles à coefficients dans un corps fini, Thése de l'Université Claude Bernard Lyon 1, décembre 2010, 135 pages.

Notes non publiées

- Automates finis et développements dans le corps des fonctions en caractéristique positive, 59 pages.
- Asymptotic basis sets of integers, 9 pages.

5 Résumé des travaux de recherche

Cette partie est consacrée à la description de mes travaux de recherche, réalisés dans le cadre de ma thèse au sein de l'équipe « Combinatoire et Théorie des Nombres »(UMR CNRS 5208, Université Claude Bernard Lyon 1), sous la direction de Boris Adamczewski.

Les références de cette partie et de la suivante sont regroupées dans la bibliographie générale.

Présentation générale de la thèse

Ma thèse se situe à l'interface de trois grands domaines : la combinatoire des mots, la théorie des automates et la théorie des nombres. Plus précisément, nous montrons comment des outils provenant de la combinatoire des mots et de la théorie des automates interviennent dans l'étude de problèmes arithmétiques concernant les séries formelles à coefficients dans un corps fini.

Le point de départ de ma thèse est un célèbre théorème de Christol qui caractérise les séries de Laurent algébriques sur le corps $\mathbb{F}_q(T)$, l'entier q désignant une puissance d'un nombre premier p, en termes d'automates finis[1], et dont l'énoncé est : « Une série de Laurent à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_q$ est algébrique si et seulement si la suite de ses coefficients est engendrée par un p-automate fini ». Ce résultat, qui révèle dans un certain sens la simplicité de ces séries de Laurent, a donné naissance à des travaux importants parmi lesquels de nombreuses applications et généralisations. La théorie des automates et la combinatoire des mots interviennent naturellement et s'avèrent, parfois, indispensables pour établir des résultats arithmétiques importants. Citons par exemple les travaux d'Allouche, Berthé et Thakur [8, 14, 12, 13, 48] sur la transcendance de certains analogues de Carlitz ou bien ceux de Thakur sur la transcendance de la période de Tate [46] (voir aussi [10]) ; plus récemment, l'article de Kedlaya [29] dans lequel est décrite en termes d'automates la clôture algébrique du corps des fractions rationnelles à coefficients dans un corps fini, ou encore le travail de Derksen [22] sur l'analogue du théorème de Skolem-Mahler-Lech en caractéristique non nulle[2], qui a été ensuite étendu au cas de plusieurs variables par Adamczewski et Bell [2] .

L'objet principal de ma thèse est, dans un premier temps, d'exploiter la simplicité des séries de Laurent algébriques à coefficients dans un corps fini afin d'obtenir des résultats diophantiens, puis d'essayer d'étendre cette étude à des fonctions transcendantes arithmétiquement intéressantes. Nous nous concentrons tout d'abord sur une classe de séries de Laurent algébriques particulières qui généralisent la fameuse cubique de Baum et Sweet[3]. Le résultat principal obtenu pour ces dernières est une description explicite de leur développement en fraction continue, généralisant ainsi certains travaux de Mills et Robbins [37] et de Lasjaunias [32]. Rappelons que le développement en fraction continue permet généralement d'obtenir des informations très précises sur l'approximation rationnelle ; les meilleures approximations étant obtenues directement à partir de la suite des quotients partiels.

Malheureusement, il est souvent très difficile d'obtenir le développement en fraction continue d'une série de Laurent algébrique, que celle-ci soit donné par une équation algébrique ou par son développement en série de Laurent. Dans une deuxième temps, nous présentons une étude qui fournit une information diophantienne *a priori* moins précise que la description du développement en fraction continue, mais qui à le mérite de concerner toutes les séries de Laurent algébriques (à coefficients dans un corps fini). L'idée

[1] Notons que les automates finis sont les machines de calcul les plus basiques parmi la hiérarchie induite par les travaux fondateurs de Turing [52].

[2] Voir aussi le travail récent de Derksen et Masser[23].

[3] La série de Baum et Sweet est le premier exemple montrant qu'il existe des séries algébriques de degré strictement supérieur à 2 dont les quotients partiels sont bornés.

principale est d'utiliser l'automaticité de la suite des coefficients de ces séries de Laurent afin d'obtenir une borne générale pour leur exposant d'irrationalité. Malgré la généralité de ce résultat, la borne obtenue n'est pas toujours satisfaisante. Dans certains cas, elle peut s'avèrer plus mauvaise que celle provenant de l'inégalité de Mahler. Cependant, dans de nombreuses situations, il est possible d'utiliser notre approche pour fournir, au mieux, la valeur exacte de l'exposant d'irrationalité, sinon des encadrements très précis de ce dernier.

Dans un dernier travail nous nous plaçons dans un cadre plus général que celui des séries de Laurent algébriques, à savoir celui des séries de Laurent dont la suite des coefficients a une « basse complexité [4] ». Nous montrons que cet ensemble englobe quelques fonctions remarquables, comme les séries algébriques et l'inverse de l'analogue du nombre π dans le module de Carlitz. Il possède, par ailleurs, des propriétés de stabilité intéressantes : entre autres, il s'agit d'un espace vectoriel sur le corps des fractions rationnelles à coefficients dans un corps fini (ce qui, d'un point de vue arithmétique, fournit un critère d'indépendance linéaire), il est de plus laissé invariant par diverses opérations classiques comme le produit de Hadamard.

Dans les paragraphes qui suivent, je décris plus en détail chacun des travaux sus-mentionnés.

Généralisation de la cubique de Baum et Sweet et fractions continues

---

Outre les quadratiques réels, on ne connaît aucun développement en fraction continue d'un nombre réel algébrique de degré supérieur à 2 ; de plus, nous ne savons pas non plus si la suite des quotients partiels est bornée ou non. Il est très difficile d'obtenir des informations sur le développement en fraction continue des nombres algébriques, puisque les actions des opérations usuelles comme l'addition ou la multiplication ne sont pas du tout transparentes sur le développement en fraction continue. En général, on conjecture que la suite des quotients partiels de nombres algébriques de degré superieur ou égal à 3 est non bornée ; cette question, suggerée par Khintchine, constitue un problème majeur en approximation diophantienne.

En revanche, en caractéristique p, nos connaissances sont un peu plus satisfaisantes. En effet, en 1976 Baum et Sweet ont donné dans [11] le premier exemple d'une série formelle algébrique de degré 3 dont la suite des quotients partiels ne prend qu'un nombre fini de valeurs. C'est d'ailleurs l'exemple le plus célèbre, avec bien sûr les séries de Laurent quadratiques. Quelques années plus tard, Mills et Robbins ont étudié le développement en fraction continue de cette série ; de plus, ils ont donné d'autres exemples de séries algébriques en explicitant leur développement en fraction continue.

Nous avons observé que pour tout nombre premier p et $r = p^t$, l'équation

$$TX^{r+1} + X - T = 0, \tag{1}$$

a une unique solution dans le corps $\mathbb{F}_p((T^{-1}))$. Pour $r = p = 2$ cette solution est la cubique de Baum et Sweet. Dans [26], nous exhibons le développement en fraction continue de cette solution pour $r > 2$.

Afin de décrire le développement en fraction continue d'une telle solution, nous utilisons une technique qui a déjà été employée par Lasjaunias dans [32] ; celle-ci ressemble, partiellement, à l'algorithme de Mills et Robbins introduit pour décrire le développement en fraction continue de la cubique de Baum et Sweet, puis pour décrire le développement en fraction continue de plusieurs exemples de séries algébriques hyperquadratiques.

Dans un premier temps, nous présentons le résultat principal sur lequel la preuve repose ; il s'agit d'un lemme élémentaire concernant les fractions continues ; notons qu'une application assez directe de ce résultat

[4] On rappelle que la complexité d'une suite infinie est le nombre de ses différents facteurs et qu'une suite automatique a une complexité d'ordre au plus linéaire.

nous permet de décrire au passage le développement en fraction continue de la série de Mahler

$$\Theta_r(T) := \sum_{r\geq 0} \frac{1}{T^{r^k}} \in \mathbb{F}_p((T^{-1})).$$

Dans la suite, nous décrivons de façon plus détaillée l'algorithme permettant, en général, d'obtenir le développement en fraction continue d'une série de Laurent z vérifiant une relation du type

$$Pz_m^r = Qz_n + R,$$

où $z = [a_1, a_2, \ldots, z_m]$, $P, Q, R \in \mathbb{F}_p[T]^3$ et $m < n$ sont deux entiers strictement positifs. Les séries de Laurent qui satisfont à une telle équation sont dites de type (P, Q, R, m, n). Elles ont un intérêt particulier pour la théorie des fractions continues : en effet, dans le cas où P, Q, R sont « bien choisis », il est généralement possible d'expliciter le développement en fraction continue d'une telle série de Laurent. Pour quelques résultats dans cette direction, nous renvoyons le lecteur aux articles [31, 32, 33].

Dans la dernière partie de [26], nous utilisons cet algorithme afin de décrire le développement en fraction continue des séries de Laurent qui sont solutions de l'équation (1). Cette description semble à première vue assez complexe, mais elle révèle la présence de motifs intéressants apparaissant dans la suite des quotients partiels de ces séries de Laurent. De tels motifs traduisent une structure combinatoire riche, dotée en particulier d'une symétrie assez surprenante. Cette dernière est traduite par l'occurrence de blocs de quotients partiels « pseudo-palindromiques ».

Ce travail fait l'objet d'un article publié au *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*.

Approximation rationnelle des séries de Laurent algébriques à coefficients dans un corps fini

Nous étudions dans [27] l'exposant d'irrationalité des séries de Laurent qui sont algébriques sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}_q(T)$. Le point de départ de ce travail est l'article d'Adamczewski et Cassaigne [5] portant sur l'exposant d'irrationalité des nombres réels automatiques.

D'après le théorème de Christol, nous savons que la suite des coefficients d'une série algébrique sur $\mathbb{F}_p(T)$ est p-automatique. En utilisant une approche analogue à celle de [5], nous donnons dans un premier temps une majoration générale de l'exposant d'irrationalité des séries de Laurent algébriques sur $\mathbb{F}_p(T)$. Cette borne dépend de deux paramètres : le cardinal du p-noyau de la suite des coefficients et le nombre d'états de l'automate minimal qui engendre la suite des coefficients (dans le sens direct)[5].

Afin de majorer l'exposant d'irrationalité d'une série de Laurent algébrique f, nous cherchons classiquement à construire une suite « dense » de « bonnes » approximations rationnelles. Pour ce faire, l'idée principale consiste à tronquer le développement en série de Laurent de f à certains endroits « bien choisis » à l'aide du théorème de Cobham sur les morphismes uniformes, puis à compléter le développement fini obtenu par périodicité. D'abord, nous démontrons un résultat d'approximation pour les séries de Laurent à coefficients dans un corps fini, généralisant ainsi un lemme de Voloch. Nous construisons ultérieurement une suite de fractions rationnelles (P_n/Q_n) approchant f et vérifiant certaines conditions décrites dans un lemme d'approximation qui généralise un résultat de Voloch.

Evidemment, la majoration de l'exposant d'irrationalité que nous obtenons par cette approche dépend fortement de la construction de la suite d'approximation (P_n/Q_n). En particulier, la borne générale du

[5] Rappelons que le cardinal du p-noyau d'une suite p-automatique est aussi égal au nombre d'etats de l'automate qui l'engendre, mais dans le sens inverse.

théorème obtenu est la plupart du temps bien loin d'être optimale. Dans l'esprit de [6], nous remarquons qu'il est néanmoins souvent possible d'optimiser, dans la pratique, la construction de la suite (P_n/Q_n) afin d'améliorer significativement la majoration donnée dans notre théorème général. Par exemple, le fait de savoir que les polynômes P_n et Q_n sont premiers entre eux, conduit à une amélioration substantielle. Ce problème de coprimalité est bien connu pour être difficile dans le cas de constructions analogues faisant intervenir des nombres réels (voir [6]).

Par la suite, nous proposons une nouvelle approche afin de surmonter cette difficulté. Plus exactement, nous décrivons un algorithme qui permet de vérifier si les polynômes P_n et Q_n sont premiers entre eux. Pour cela, nous remarquons que les dénominateurs des approximations construites ont une forme particulière permettant de calculer leurs racines (dans une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$) grâce aux simplifications de calculs induites par l'endomorphisme de Frobenius. En outre, il suffit de vérifier que ces racines n'annulent pas les numérateurs P_n pour garantir la coprimalité des polynômes P_n et Q_n. Dans ce but, nous développons ensuite un calcul des numérateurs. Nous associons pour cela à chaque p-morphisme une matrice de polynômes $M(T)$ et nous détaillons aussi quelques propriétés de ces matrices. Notons que ces matrices généralisent la matrice d'incidence du p-morphisme. Plus précisément, si $T = 1$, alors $M(1)$ est exactement la matrice d'incidence du morphisme sous-jacent.

Dans la dernière partie de [27], nous illustrons notre approche à l'aide de quelques exemples. Nous donnons en particulier plusieurs séries de Laurent algébriques pour lesquelles nous calculons, à l'aide de l'algorithme précédent, la valeur exacte de l'exposant d'irrationalité.

Ce travail fait l'objet d'un article soumis pour publication.

Complexité et séries formelles à coefficients dans un corps fini

La suite des chiffres décimaux ou binaires de nombres réels algébriques irrationnels, comme $\sqrt{2}$, est source de nombreux problèmes difficiles. On s'attend généralement à ce que ces nombres soient des nombres normaux, mais cette conjecture semble malheureusement hors d'atteinte. En effet, nous sommes par exemple toujours incapables de savoir si le nombre 2 apparaît une infinité de fois dans le développement décimal de $\sqrt{2}$. Une approche pertinente pour étudier ce type de questions consiste à introduire une notion de complexité pour les nombres réels, fondée sur la notion de complexité des facteurs des mots infinis (voir [4, 3, 25]).

La normalité d'un nombre réel implique que sa complexité doit être maximale en toute base entière, en particulier celle-ci doit être d'ordre exponentiel. On peut alors chercher à minorer la complexité des nombres algébriques irrationnels. Voir à ce sujet, les avancées récentes [3, 16]. Au-delà des nombres algébriques irrationnels, un intérêt particulier est porté à l'étude des constantes classiques comme π, $\log 2$, $\zeta(3)$ ou e. Kontsevitch et Zagier [30] ont défini les notions de « période » et de « période exponentielle » afin d'offrir un cadre commun pour l'étude de ces nombres. Ainsi, les nombres algébriques, π ou $\log 2$ sont des périodes ; quant au nombre e, c'est l'exemple typique d'une période exponentielle. Malgré un résultat récent [1] donnant une minoration de la complexité du nombre e et de certaines périodes exponentielles transcendantes, nos connaissances sur la complexité de périodes transcendantes sont encore plus limitées que celles concernant les nombres algébriques.

Motivés par l'analogie, mais aussi par les différences, entre le corps des nombres réels et les corps des séries de Laurent à coefficients dans un corps fini, nous étudions dans ce travail des questions liées à la complexité des éléments du corps $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$, où q est une puissance d'un nombre premier p. Nous introduisons tout d'abord une notion de complexité pour de telles séries de Laurent à l'aide de la complexité des facteurs des mots infinis. Comme dans le cas de nombres réels, nous observons qu'une série de Laurent est une fraction rationnelle si et seulement si sa fonction de complexité est bornée. De plus, comme conséquence du théorème de Christol et d'un théorème de Cobham, on obtient que la complexité d'une série de Laurent algébrique est majorée par une fonction affine (on dira alors qu'elle est de complexité sous-linéaire ou au plus linéaire). Il est alors naturel de se demander si certaines fonctions transcendantes classiques ont également une faible complexité.

Nous nous intéressons, dans un premier temps, à l'analogue du nombre π, la série formelle Π_q de Carlitz. Nous rappelons qu'en caractéristique non nulle, Carlitz [17] a construit une fonction e_C par analogie avec la fonction exponentielle définie pour les nombres réels :

$$e_C(0) = 0,\ d/dz(e_C(z)) = 1 \text{ et } e_C(Tz) = Te_C(z) + e_C(z)^q.$$

Celle-ci est appelée l'exponentielle de Carlitz et l'action $u \to Tu + u^q$ conduit à la définition du module de Carlitz, qui est en fait un cas particulier d'un module de Drinfeld. La fonction exponentielle de Carlitz $e_C(z)$ peut être définie par le produit infini suivant :

$$e_C(z) = z \prod_{a \in \mathbb{F}_q[T],\, a \neq 0} (1 - \frac{z}{a\widetilde{\Pi}_q})$$

où

$$\widetilde{\Pi}_q = (-T)^{\frac{q}{q-1}} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{T^{q^j-1}}\right)^{-1}.$$

Puisque $e^z = 1$ si et seulement si $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$ et puisque $e_C(z)$ a été construit par analogie tel que $e_C(z) = 0$ si et seulement si $z \in \widetilde{\Pi}_q\mathbb{F}_q[T]$ alors, si l'on choisit

$$\Pi_q = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{T^{q^j-1}}\right)^{-1},$$

Π_q est considéré comme l'analogue du nombre réel π.

Malheureusement, il semble difficile d'obtenir des renseignements sur le développement en série de Laurent de Π_q. Toutefois, nous parvenons à obtenir des résultats précis sur la complexité de l'inverse de Π_q. Plus exactement, nous obtenons que la complexité de $1/\Pi_q$ est d'ordre linéaire lorsque $q \geq 3$, tandis qu'elle est d'ordre quadratique si $q = 2$. Ce résultat se démontre en étudiant certains motifs répétitifs qui apparaissent dans le développement en série de Laurent de $1/\Pi_q$, comme cela est décrit dans [8]. Notons que ce travail fournit, au passage, une nouvelle preuve de la transcendance de Π_q lorsque $q = 2$.

La notion de complexité que nous avons introduite induit naturellement une hiérarchie des séries de Laurent à coefficients dans un corps fini. Dans la seconde partie de ce travail, nous considérons certaines classes de cette hiérarchie, à savoir la classe des séries de Laurent de complexité (au plus) polynomiale et celle des série de Laurent d'entropie nulle, et nous étudions leurs propriétés de stabilité. Ces deux classes sont d'autant plus naturelles qu'elles contiennent les séries algébriques ainsi que des séries de Laurent transcendantes arithmétiquement intéressantes comme $1/\Pi_q$. On peut d'ailleurs se demander s'il existe des analogues de périodes qui n'appartiendraient pas à l'une de ces deux classes. Nous montrons que chacune de ces deux classes est un espace vectoriel (de dimension infinie) sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{F}_q(T)$. Ceci conduit, bien évidement, à un résultat d'indépendance linéaire sur le corps $\mathbb{F}_q(T)$. De plus, nous prouvons que ces classes sont laissées stables par l'application d'un certain nombre d'opérations classiques comme le produit d'Hadamard, l'opérateur de dérivation ou les opérateurs de Cartier.

Ce travail fait l'objet d'un article accepté dans *Integers*.

Références

[1] B. Adamczewski, On the expansion of some exponential periods in an integer base, *Math. Ann.* **346** (2010), 107–116.

[2] B. Adamczewski, J. Bell, On vanishing coefficients of algebraic power series over fields of positive characteristic, preprint.

[3] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases, *Ann. of Math.* **165** (2007), 547–565.

[4] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, Nombres réels de complexité sous-linéaire : mesures d'irrationalité et de transcendance, à parraître dans *J. Reine Angew. Math.*.

[5] B. Adamczewski, J. Cassaigne, Diophantine properties of real numbers generated by finite automata, *Compositio Math.* **142** (2006), 1351–1372.

[6] B. Adamczewski, T. Rivoal, Irrationality measures for some automatic reals numbers, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **147** (2009), 659–678.

[7] J.-P. Allouche, Sur le développement en fraction continue de certaines séries formelles, *C.R. Acad. Sciences* **307** (1988), 631–633.

[8] J.-P. Allouche, Sur la transcendance de la série formelle Π, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **2** (1990), 103–117.

[9] J.-P. Allouche, J. Bétréma, J. Shallit, Sur des points fixes de morphismes du monoïde libre, *RAIRO Inform. Theor. App.* **23** (1989), 235–249.

[10] J.-P. Allouche, D. Thakur, Automata and transcendance of Tate period in finite characteristic, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), 1309–1312.

[11] L. Baum, M. Sweet, Continued fractions of algebraic power series in characteristic 2, *Ann. of Math.* **103** (1976), 593-610.

[12] V. Berthé, De nouvelles preuves preuves "automatiques" de transcendance pour la fonction zeta de Carlitz, *Journées Arithmétiques de Genève, Asterisque* **209** (1992), 159–168.

[13] V. Berthé, Fonction zeta de Carlitz et automates, *J. Theor. Nombres Bordeaux* **5** (1993), 53–77.

[14] V. Berthé, Automates et valeurs de transcendance du logarithme de Carlitz, *Acta Arith. LXVI* 4 (1994), 369–390.

[15] V. Berthé, Combinaisons linéaires de $\zeta(s)/\Pi^s$ sur $F_q(x)$, pour $1 \leq s \leq q-2$, *J. Number Theory* **53** (1995), 272–299.

[16] Y. Bugeaud, J. H. Evertse, On two notions of complexity of algebraic numbers, *Acta Arith.* **133** (2008), 221–250.

[17] L. Carlitz, On certain functions connected with polynomials in a Galois field, *Duke Math. J.* **1** (1935), 137–168.

[18] C.-Yu Chang, J. Yu, Determination of algebraic relations among special values in positive characteristic, *Adv. Math.* **216** (2007), 321–345.

[19] H. Cherif, B. De Mathan, Irrationality measures of Carlitz zeta values in characteristic p, *J. Number Theory* **44** (1993), 260–272.

[20] B. De Mathan, Irrationality measures and transcendence in positive characteristic, *J. Number theory*, **54** (1995), 93–112.

[21] P. Deligne, Intégration sur un cycle évanescent, *Inventiones Math.* **76** (1984), 129–143.

[22] H. Derksen, A Skolem-Mahler-Lech theorem in positive characteristic and finite automata, *Invent. Math.* **168** (2007), 175–224.

[23] H. Derksen, D. Masser, Linear equations over multiplicative groups, recurrences, and mixingI, preprint.

[24] L. G. P. Dirichlet, Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbr0chen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen, *S.-B.Preuss. Akad. Wiss.* (1842), 93–95.

[25] S. Ferenczi, C. Mauduit, Transcendence of numbers with a low complexity expansion, *J. Number Theory* **67** (1997), 146–161.

[26] A. Firicel, Sur le développement en fraction continue d'une généralisation de la cubique de Baum et Sweet, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* **22** (2010), 629–644.

[27] A. Firicel, Rational approximations of algebraic Laurent séries with coefficients in a finite field, soumis.

[28] A. Firicel, Subword complexities and Laurent series with coefficients in a finite field, accepté pour publication dans *Integers*.

[29] K. Kedlaya, Finite automata and algebraic extensions of function fields, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **18** (2006), 379–420.

[30] M. Kontsevich, D. Zagier, Periods. In : *Mathematics unlimited-2001 and beyond*, pp. 771–808, Springer-Verlag, 2001.

[31] A. Lasjaunias, Algebraic Continued Fractions in $\mathbb{F}_q((T^-1))$ and reccurent sequences in $\mathbb{F}_q$, *Acta Arith.* **133** (2008), 251–265.

[32] A. Lasjaunias, Continued fractions for hyperquadratic power series over a finite field, *Finite Fields Appl.* **14** (2008), 329–350.

[33] A. Lasjaunias, On Robbin's example of a continued fraction for a quartic power series over $\mathbb{F}_{13}$, *J. Number Theory* **128** (2008), 1109–1115.

[34] J. Liouville, Nouvelle démonstration d'un théoréme sur les irrationelles algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **18** (1844), 910–911.

[35] K. Mahler, On a theorem of Liouville in fields of positive characteristic, *Canad. J. Math* **1** (1949), 397–400.

[36] M. Mkaouar, Sur le développement en fraction continue de la série de Baum et Sweet, *Bull. Soc. Math. France* **123** (1995), 361–374.

[37] W. Mills, D. Robbins, Continued fractions for certain algebraic power series, *J. Number Theory* **23** (1986), 388–404.

[38] M. Morse, G. A. Hedlund, Symbolic dynamics, *Amer. J. Math.* **60** (1938), 815–866.

[39] C. Osgood, An effective lower bound on the "Diophantine approximation" of algebraic functions by rational functions, *Mathematika* **20** (1973), 4–15.

[40] M. A. Papanikolas. Tannakian duality for Anderson-Drinfeld motives and algebraic independence of Carlitz logarithms, *Invent. Math.* **171** (2008), 123–174.

[41] N. Pytheas Fogg, *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, Lecture Notes in Math., 1974, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[42] K. F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **2** (1955), 1–20 ; corrigendum, 169.

[43] O. Salon, Suites automatiques à multi-indices et algébricité, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I, Math. **305** (1987), 501–504.

[44] W. Schmidt, On continued fractions and Diophantine approximation in power series fields, *Acta Arith.* **95** (2000), 139–166.

[45] H. Sharif, C. F. Woodcock, Algebraic functions over a field of positive characteristic and Hadamard products, *J. Lond. Math. Soc.* **37** (1988), 395–403

[46] D. Thakur, Automata-style proof of Voloch's result on transcendence, *J. Number Theory* **58** (1996), 60–63.

[47] D. Thakur, Exponential and continued fractions *J. Number Theory* **59** (1996), 248–261.

[48] D. Thakur, Transcendence of Gamma Values for $\mathbb{F}_q(T)$, *Ann. Math.* **144** (1996), 181–188.

[49] D. Thakur, Diophantine approximation exponents and continued fractions for algebraic power series, *J. Number Theory* **79** (1999), 284–291.

[50] D. Thakur, Higher Diophantine approximation exponents and continued fraction symmetries, *Function Fields Proceedings of The American Mathematical Society*, Volume **139** (2010), 11–19.

[51] A. Thue, Uber Annaherungswerte algebraischer Zahlen, *J. Reine Angew. Math.* **135** (1909), 284–305.

[52] A. M. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc.* **2** 42 (1937), 230–265, (Corrigendum 43 (1937), 544–546).

[53] S. Uchiyama, On the Thue-Siegel-Roth theorem. III., *Proc. Japan Acad.* **36** (1960), 1–2.