

Exercice 1

Donner pour chacune des fonctions proposées ci-dessous un équivalent simple :

- a) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \rightarrow 0$
- b) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \rightarrow +\infty$
- c) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \rightarrow 2$
- d) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \rightarrow 1$
- e) $f(x) = x^7 + \sqrt{x} + (\ln x)^2 + e^{2x} + 4x^5 - x^9 + 5^{x+1}$ quand $x \rightarrow +\infty$

Exercice 2

Établir pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous un développement limité de f en 0 à l'ordre n proposé :

- a) $f(x) = e^{-x}$ ($n = 5$) b) $f(x) = \ln(1+x^2)$ ($n = 6$) c) $f(x) = \sin 2x + \cos x^2$ ($n = 7$)
- d) $f(x) = e^{3x} \sin 2x$ ($n = 4$) e) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ ($n = 3$) f) $f(x) = \tan x$ ($n = 5$)
- g) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x \sin x}$ ($n = 3$) h) $f(x) = (1+x)^{1/x}$ ($n = 3$) i) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ ($n = 3$)
- j) $f(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{x}{1+x}\right)$ ($n = 4$) k) $f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{sh} x}$ ($n = 4$) l) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ ($n = 3$)

Exercice 3

Déterminer les réels a et b pour que $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible au voisinage de 0.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

- 1) Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
- 2) La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 5

Pour a réel fixé on définit la fonction f_a par $f_a(x) = \operatorname{Arctan} \frac{x+a}{1-ax}$.

- 1) Soit n un entier. Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction dérivée f'_a .
- 2) Soit k un entier. En utilisant le théorème de Taylor-Young, déduire de la question précédente la valeur de $f_a^{(k)}(0)$.
- 3) Soit m un entier. En utilisant de nouveau le théorème de Taylor-Young et la question précédente, écrire un développement limité en 0 à l'ordre m de f_a .

Exercice 6

Calculer les limites suivantes (sans présupposer leur existence!) :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x - \frac{3}{2} \sin 2x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \ln(\cos x)}{x^4}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x - \sin 2x}{x(1 - \cos 3x)}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2}$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

Exercice 7

Calculer un développement limité ou asymptotique de la fonction f pour chacun des cas suivants :

- a) $f(x) = x^2 \ln x$ où x tend vers 1 et à l'ordre 5 ;
- b) $f(x) = \sqrt{2+x}$ où x tend vers 0 et à l'ordre 3 ;
- c) $f(x) = \ln(2+x)$ où x tend vers 0 et à l'ordre 2 ;
- d) $f(x) = \sin x$ où x tend vers $\frac{\pi}{4}$ et à l'ordre 3 ;

- e) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 1$ à l'ordre 5, d'abord pour x tendant vers 0 puis pour x tendant vers 1 ;
 f) $f(x) = \ln(\sin x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 3 ;
 g) $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs ;
 h) $f(x) = \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs.

Exercice 8

Calculer les limites suivantes (en montrant leur existence) :

- a) $\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan(\frac{\pi x}{4})}$ quand x tend vers 1.
 b) $\sqrt{\frac{x^3 - 2x}{x - 1}} - x$ quand x tend vers $+\infty$.
 c) $x \left[\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{x+1} \right)^x \right]$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $] -\frac{\pi}{6}, 0[\cup] 0, \frac{\pi}{6}[$ par $f(x) = \frac{\ln(1 - 2 \sin x)}{\operatorname{sh} 2x}$.

- 1) Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
- 2) Montrer que f possède une limite quand x tend vers 0. On notera l cette limite dans la suite de l'exercice.
- 3) On pose $f(0) = l$. Montrer que f , ainsi prolongée, est dérivable en 0.

Exercice 10

On définit, pour $x \in]0, +\infty[$ les fonctions f et g par :

$$f(x) = \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan}(x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\operatorname{Arctan} x}{\operatorname{Arctan}(x + 1)}.$$

- 1) Déterminer la limite de $f(x)$ pour x tendant vers $+\infty$. En remarquant que $f(x) \sim \tan[f(x)]$ quand x tend vers $+\infty$, en déduire que $f(x) \sim -\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$.
- 2) En déduire la limite en $+\infty$ de $g(x)$, puis montrer que $\ln[g(x)] \sim \frac{f(x)}{\operatorname{Arctan}(x + 1)}$ en $+\infty$.
- 3) Déduire de ce qui précède la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\operatorname{Arctan} x}{\operatorname{Arctan}(x + 1)} \right]^{x^2}$.

Exercice 11

- 1) Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

$$\ln(1 + \operatorname{sh} x).$$

- 2) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de :

$$\frac{\ln(1 + \operatorname{sh} x)}{2x - x^2}.$$

- 3) Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de :

$$\ln(1 + \operatorname{sh} x).$$

Exercice 12

On désigne par f et g les applications de $] - 1, 1[$ vers \mathbf{R} respectivement définies pour $-1 < x < 1$ par :

$$f(x) = \sin[\ln(1+x)] \text{ et } g(x) = \ln(1 + \sin x).$$

Établir des développements limités en 0 et à l'ordre 4 des fonctions f et g ; en déduire l'existence d'une constante réelle k (qu'on explicitera) telle que

$$f(x) - g(x) \sim kx^4$$

quand $x \rightarrow 0$.

Exercice 13

Soit f l'application définie sur $] - \pi, \pi[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos x + 1}$$

et g l'application définie sur \mathbf{R} par :

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln(1 + x^2)}}.$$

- 1) Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de f .
- 2) Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de g .
- 3) En déduire l'existence et la valeur de :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{g(x) - f(x) + \frac{3}{8}x^2}{\sin^4 x}.$$

Exercice 14

Soit f et g les deux applications de \mathbf{R} vers \mathbf{R} respectivement définies par :

$$f(x) = \ln(1 - x^2) \text{ et } g(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} - 1.$$

- 1) Déterminer des développements limités de f et de g à l'ordre 5, valables pour x tendant vers 0.
- 2) Déduire de ces développements limités qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\text{pour tout } x \in] - \eta, 0[\cup] 0, \eta[, \quad f(x) < g(x).$$

Exercice 15

En utilisant un développement asymptotique, étudier les branches infinies des graphes des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1};$$

$$f(x) = x^3 \ln \left(\frac{x+1}{x} \right);$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x - 1};$$

$$f(x) = x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$