Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité Mathématiques
Math III-analyse
Année 2009/2010

Devoir Maison 3 :
Application des séries entières avec SAGE

Exercice I : Convergence d'une série entière (1.5 point)

1. (1 point) A l'aide de SAGE, tracer sur un même graphe au moins les 10 premières sommes partielles $S_n(x)$ de la série de terme général $u_n = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ et la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = 1/(1-x)$.
2. (0.5 point) Sur quel intervalle ces sommes semblent-elles converger vers $f(x)$? Justifier.

Exercice II : Convergence de séries entières (1.5 point)

1. (1 point) Trouver une représentation en série entière de f avec les différents f donnés ci-dessous et tracer f ainsi que les 10 premières (au-moins) sommes partielles $S_n(x)$ sur le même graphe à l'aide de SAGE.
2. (0.5 point) Que se passe-t-il quand n croît ?

$$1.\ \ f(x) = ln(3+x), \quad 2.\ \ f(x) = 1/(x^2+25),$$

$$3.\ \ f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad 4.\ \ f(x) = \tan^{-1}(2x).$$

Exercice III : Convergence - une interprétation géométrique (2 points)
Soit f définie pour $x \geq 0$ par $f(x) = \sqrt{(}x)$.

1. (0.5 point) Donner une approximation de f par un polynôme de Taylor d'ordre 3 au point $x = 1$.
2. (0.5 point) Tracer f et T_n sur un même graphe.
3. (0.5 point) Utiliser l'inégalité de Taylor pour estimer la précision de l'approximation de f par T_n quand $x \in [0.9, 1.1]$.
4. (0.5 point) Vérifier le résultat de la question précédente en traçant $|R_n(x)|$.