

MAT 127 (Université Joseph Fourier)
Feuille de TD 1 : Autour du modèle de Malthus

(1) Solutions explicites

La fonction inconnue est notée y , elle dépend de la variable t .

Exercice 1.1 (Equations linéaires du premier ordre)

1) $y' + 3y = 1$, $y' + 4y = 2t$, $y' - y = 2t + 1$, $2y' - y = 3e^t$, $y' + y = -\cos(2t)$,
 $y' - y = e^t$.

2) Dans les exemples précédents, rechercher les solutions qui vérifient $y(0) = 1$.

3) Soit l'équation $y' + 18y = t^{56} - 45 \sin t$. Trouver les solutions de cette équation qui satisfont $y(0) = 0$.

4) $y' = 2ty$, $y' = \cos(t)y$.

Exercice 1.2 (Equations linéaires du second ordre)

$y'' - 4y = 0$, $y'' + 9y = 0$, $y'' - 2y' + y = 0$, $y'' + y = t$, $y'' - 2y' + y = e^t$, $y'' - y = \cos t$.

Exercice 1.3 (Equations à variables séparables, équations autonomes)

$y' = y^2 - 3y$, $y' = y - y^2$ (Equation logistique), $y' = -ty$, $(1+x)tx' + (1-t)x = 0$,
 $(1+x) - (1-t)x' = 0$.

Exercice 1.4 (Et si plus compliqué ?)

Soit l'équation $y' = 1/2 \sin(y^2) - 1$.

1) Pouvez-vous résoudre cette équation ? Si non, existe-t-il une solution ? Est-elle unique ?

2) Que pouvez-vous dire de l'allure d'une solution éventuelle de l'équation ? Par exemple, que peut-on dire de la monotonie d'une telle solution ? Est-elle bornée ?

(2) Quelques modèles discrets

Exercice 2.1 (Evolution moyenne d'une population)

Premier schéma :

On étudie une population qui au début de l'année n est composée de A_{n-1} individus. Pendant l'année n , chacun donne naissance à 4 individus. Au cours de la même année 900 individus périssent. Soit A_n le nombre d'individus au début de l'année $n + 1$.

1) Déterminer A_n en fonction de A_{n-1} .

2) On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = 4u_{n-1} - 900 \text{ et } u_0 = 1000$$

et la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 300$. Prouver que (v_n) est géométrique puis en déduire u_n en fonction de n .

3) Au début de la première année, il y avait 1000 individus dans cette population.

Cette population peut-elle doubler ? Si oui, au bout de combien d'années ?

Deuxième schéma :

On étudie une population qui a deux stades dans son évolution : enfant et adulte. Chaque année est divisée en deux saisons : hiver et été (dans cet ordre dans l'année). Au début de l'année n , cette population est composée de E_{n-1} enfants et de A_{n-1} adultes. Pendant l'hiver, un sixième des enfants deviennent adultes (les autres périssent) et les deux tiers des adultes survivent. Pendant l'été, chaque adulte donne naissance à 4 enfants. Soit E_n et A_n les nombres d'enfants et d'adultes au début de l'année $n + 1$.

- 1) Exprimer E_n en fonction de A_n . Prouver que $A_n = 4/3A_{n-1}$.
- 2) On suppose que la population initiale d'adultes est de 1000 individus (et celle d'enfants est donc nulle). La population globale est-elle en augmentation ? Comment évolue asymptotiquement le nombre total d'individus ?

Exercice 2.2

On suppose que l'évolution d'une population suit la loi $N_{n+1} = \frac{\lambda N_n}{1 + N_n}$ où $\lambda > 0$ et N_n est le nombre d'individus au début de l'année n .

- 1) Est-ce que pour ce modèle, il y a sur, sous, ou exacte compensation ?
- 2) Etudier les états d'équilibre, puis leur stabilité et les bifurcations possibles.
- 3) En utilisant la question précédente, représenter graphiquement quelques solutions caractéristiques de ce modèle.
- 4) Vérifier vos résultats en posant $M_n = 1/N_n$ (On cherchera alors une solution sous la forme $Ar^n + B$).

Exercice 2.3

Il apparait dans certaines études qu'un moyen de contrôler une population d'insectes venimeux est d'introduire et de maintenir un nombre choisi d'individus stériles dans la population. On peut choisir alors le modèle d'évolution suivant :

$$N_{n+1} = f(N_n) = R_0 N_n \frac{N_n}{N_n + S} \frac{1}{1 + aN_n}$$

où $R_0 > 1$, $a > 0$, N_n est le nombre d'individus (non stériles) au début de l'année n et S est le nombre constant choisi d'individus stériles. Le but est de bien choisir S par rapport aux objectifs fixés sur l'évolution de la population. On parle en mathématiques de théorie du contrôle.

- 1) Que signifie $N_n/(N_n + S)$ dans ce modèle ?
- 2) On note N^* l'état d'équilibre du modèle (pour un S donné). Donner l'allure du graphe de $N^*(S)$ en fonction de S .
- 3) Pour quelle valeur minimale S_c de S , la population disparaît ?

4) Représenter graphiquement quelques évolutions de population pour $S < S_c$ et $S > S_c$. Quels types de bifurcations obtient-on ?

Exercice 2.4 (Modèle de Fibonacci)

C'est un des plus vieux modèles d'évolution de populations. Le problème initial est le suivant :

Un homme place un couple de lapins dans un endroit entouré d'un mur. Combien de couples de lapins seront produits si on suppose que chaque mois chaque couple fécond engendre un nouveau couple de lapins qui devient fécond au bout d'un mois ? On suppose en outre qu'un couple de lapin ne meurt pas, ni ne devient stérile.

On note u_n le nombre de couples de lapins au n -ième mois.

- 1) Donner une relation entre u_{n+2} , u_{n+1} et u_n .
- 2) On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $X_{n+1} = F.X_n$.

2) Déterminer les valeurs propres et valeurs propres de F . En déduire qu'il existe une matrice 2×2 inversible P telle que $F = PDP^{-1}$ où, si on note λ_1, λ_2 les valeurs propres de F ,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

3) Démontrer que $F^n = PD^nP^{-1}$. En déduire la valeur de u_n en fonction de n . Comment évolue la population quand n est grand ?

Exercice 2.5 (Matrice de Leslie)

Nous allons compliquer le modèle de l'exercice précédent en introduisant un taux de natalité et de mortalité dépendant de la génération. Supposons que les individus de la population étudiées ont des âges $i = 0, \dots, M$ où M est un entier. On suppose donc que tout individu meurt avant l'âge $M + 1$. On suppose que l'on connaît :

- la probabilité s_i de survivre de l'âge $i - 1$ à i ($i = 1, \dots, M$);
- s_0 le taux de survie infantile, c'est à dire la proportion de nouveaux-nés qui survivent suffisamment pour être recensés dans la classe d'âge 0;
- m_i le nombre moyen de bébés (d'âge 0) engendrés à la période suivante par individu d'âge i .

Soit u_n^i le nombre d'individus de l'âge i au temps n . On pourra considérer dans un premier temps que $M = 2$ ou $M = 3$

- 1) Comparer ce modèle avec celui de Fibonacci.
- 2) Donner une relation entre
 - u_{n+1}^i et u_n^{i-1} pour $i \geq 1$;
 - u_{n+1}^0 et les u_n^i .

2) Ecrire la relation précédente sous forme matricielle en introduisant

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n^0 \\ u_n^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n^M \end{pmatrix}.$$

3) Par analogie avec le modèle de Malthus, comment étudier l'évolution de la population en temps grand ?

(3) *Applications du modèle de Malthus*

Exercice 3.1 (Partiel 2011)

Après avoir fait une injection intraveineuse de glucose à un individu (au temps $t = 0$), la glycémie (c'est à dire le taux de glucose sanguin) décroît selon la loi

$$(1) \quad g' + Kg = 0$$

où g désigne la fonction glycémique dépendant du temps $t \geq 0$ et K est une constante appelée coefficient d'assimilation glucidique qui dépend de l'individu. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la glycémie après injection vérifie $g(0) = 2$.

- 1) Quel est le signe de K (A justifier avec soin) ?
- 2) Déterminer l'expression de $g(t)$ puis donner l'allure de la courbe représentative de g .
- 3) On considère un individu pour lequel $K = 1,5 \cdot 10^{-2}$. Au bout de combien de temps, la glycémie de cet individu aura-t-elle diminué d'un pour cent.
- 4) Déterminer la formule donnant le coefficient K en fonction de $g_1 = g(t_1)$, g_1 étant le taux de glycémie à l'instant $t_1 > 0$ donné.
- 5) La valeur moyenne de K chez un individu normal est compris entre $1,06 \cdot 10^{-2}$ et $2,42 \cdot 10^{-2}$. Préciser si les résultats du sujet X qui a un taux de glycémie $g_1 = 1,20$ au temps $t_1 = 30$ sont normaux.

Exercice 3.2

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à un instant t , exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction y à valeurs réelles de la variable t . La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre des microbes est la dérivée y' de cette fonction. On a constaté que

$$y'(t) = ky(t)$$

où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

- 1) Sachant qu'au bout de deux heures, le nombre de microbes a quadruplé, calculer en fonction de N le nombre de microbes au bout de trois heures.

2) Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de cinq heures.

Exercice 3.3

Une citerne calorifugée est chauffée par une résistance. La température $\Theta(t)$ de la citerne vérifie l'équation différentielle (1) $\Theta' = a - b\Theta$ avec $a = 2,088.10^{-2}$ et $b = 2,32.10^{-4}$ lorsque t est exprimé en secondes et $\Theta(t)$ en degré Celsius. On suppose que la température initiale de la citerne est de 20 degrés Celsius. Au bout de combien de temps la température atteint-elle 80 degrés ?

Exercice 3.4 (Partiel 2010)

L'uranium et ses isotopes sont des éléments radioactifs très lourds qui sont créés lors de l'explosion des étoiles (super nova). Le but de cet exercice est de déterminer l'époque à laquelle l'uranium sur Terre a été créé.

On note $N_{238}(t)$ et $N_{235}(t)$ le nombre d'atomes des éléments radio-actifs U^{238} et U^{235} dans un échantillon d'uranium. La demi-vie de l'uranium 238 est de $4,51.10^9$ années et celle de l'uranium est de $0,707.10^9$ années. On suppose que l'uranium a été créé au temps $t = 0$.

- 1) Calculer $N_{238}(t)$ et $N_{235}(t)$ en fonction de $N_{238}(0)$ et $N_{235}(0)$.
- 2) En 1946, le ratio U^{238}/U^{235} était de 137,8 dans n'importe quel échantillon d'uranium. En supposant que ce ratio valait 1 au moment de la création de l'uranium, montrer que l'âge de l'uranium est d'environ $5,96.10^9$ années environ.
- 3) Sachant que l'uranium est présent de l'écorce jusqu'au noyau même de notre planète (il participe à maintenir la chaleur du coeur métallique), en déduire une borne supérieure de l'âge de la terre.

Exercice 3.5

On suppose qu'une population suit une loi de Malthus, donc qu'elle obéit à une équation différentielle du type $y'(t) = a y(t)$, où $y(t)$ est le nombre d'individus à l'instant t et où a est une constante réelle positive.

On constate que cette population a augmenté de 50% entre le 1^{er} Janvier 1900 et le 1^{er} Janvier 1925.

a) calculer la constante a correspondant à cette population (l'unité de temps étant l'année).

b) Notons p_0 le nombre d'individus dans cette population le 1^{er} Janvier 1900. Calculer (en fonction de p_0) le nombre d'individus

- au 1^{er} Janvier 1925,
- au 1^{er} Janvier 1950,
- au 1^{er} Janvier 2000.

c) Combien de temps faut-il à cette population pour doubler ?
Est-ce que ce temps de doublement dépend de la population initiale ? de l'instant initial ?

Exercice 3.6

On a implanté 435 individus d'une espèce de poisson dans la baie de San Francisco le 1^{er} Janvier 1879. On laisse ensuite cette population de poissons évoluer sans la pêcher pendant 20 ans. La pêche est ensuite autorisée à partir du 1^{er} Janvier 1899 et on suppose que, chaque année, la pêche prélève 10% de la population présente au 1^{er} Janvier de la même année. On sait que, la première année de pêche (soit pendant l'année 1899), on a pêché 411 300 individus de cette population.

On suppose que, en l'absence de pêche, cette population suivrait une loi de Malthus, ce qui signifie que, si $y(t)$ est le nombre d'individus de cette population présents à l'instant t , alors son évolution dans le temps obéit à l'équation différentielle $y'(t) = a y(t)$.

a) Calculer la constante a correspondant à cette population (en l'absence de pêche, l'unité de temps étant l'année).

b) Ecrire l'équation différentielle suivie par cette population entre le 1^{er} Janvier 1879 et le 1^{er} Janvier 1899.

Considérons l'évolution de cette population au cours d'une année n ($n \geq 1899$). Notons t_0 l'instant correspondant au 1^{er} Janvier de l'année n à 0 heure (l'instant (t_0+1) correspond alors au 1^{er} Janvier de l'année $(n+1)$ à 0 heure). On supposera dorénavant que le prélèvement par la pêche est réparti uniformément sur l'année (i. e. la quantité de poisson pêchée est la même chaque jour de l'année n).

c) Connaissant $y(t_0)$, écrire l'équation différentielle vérifiée par $y(t)$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + 1[$.

d) Pour tout $t \in [t_0, t_0 + 1[$, calculer $y(t)$ en fonction de $y(t_0)$. Calculer le rapport $\frac{y(t_0+1)}{y(t_0)}$; dépend-t-il de l'année n considérée ?

e) Calculer la population de ces poissons que prévoit le modèle au 1^{er} Janvier de l'année 1909.

Exercice 3.7

On suppose qu'une population double de taille en 100 ans et triple en 200 ans. Peut-on modéliser l'évolution de cette population à l'aide de l'équation de Malthus ?

Exercice 3.8

En admettant que la population mondiale suive une loi de Malthus, (donc obéisse à une équation différentielle du type $y'(t) = a.y(t)$), et en observant que cette population a doublé entre 1928 et 1970

a) calculer la constante a (l'unité de temps étant l'année).

b) imaginez-vous dans la situation d'un expert qui vivait en 1971 et désirait prévoir l'évolution de la population mondiale dans les années suivantes en partant de la donnée de la population mondiale en 1970, évaluée à 3,696 Milliards d'individus. Cet expert ne connaît que le modèle de Malthus et adopte la valeur de la constante a calculée à la question précédente.

Quelle population prévoyait-il alors pour la fin de l'année 1980 ? pour la fin de l'année 1990 ? pour la fin de l'année 2000 ? pour la fin de l'année 2005 ? Comparer avec les statistiques a posteriori qui donnent :

pour l'année 1980 : 4,442 Milliards d'individus,

pour l'année 1990 : 5,279 Milliards d'individus,

pour l'année 2000 : 6,085 Milliards d'individus,

pour l'année 2005 : 6,500 Milliards d'individus.

Est-ce satisfaisant ? Observez-vous une déviation systématique ?

c) Quelle population prévoit ce modèle pour 2650 ?

Sachant que la superficie des terres émergées est d'environ $1,494 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$, de combien de m^2 disposerait dans ce cas chaque individu en 2650 ?

Qu'en déduire :

- Qu'il est mathématiquement prouvé que cette catastrophe arrivera et que les humains finiront entassés les uns sur les autres ?

- Que le modèle n'est pas valable pour des prévisions à long terme ?