

Valeurs extrémales pour le problème de Zarankiewicz et nombres de Turán bipartis

Nombre de Turán : $ex(n, F)$

- Turán et Mantel : $ex(n, K_3) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$

- Erdős-Stone-Simonovits :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ex(n, F)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(F) - 1}$$

Si F est biparti ?

Dans cet article, Füredi démontre :

$$ex(n, K_{3,3}) = \frac{1}{2}n^{5/3} + O(n^{5/3-c})$$

$$ex(n, K_{2,t+1}) = \frac{1}{2}\sqrt{t}n^{3/2} + O(n^{4/3})$$

Definitions

- Problème de Zarankiewicz

Etant donnés les entiers m, n, s, t , $m \geq 1$, $n \geq 1$, quel est le nombre maximum $z = z(m, n, s, t)$ tel qu'il existe une matrice $M \in M_{m,n}(\{0, 1\})$ contenant z coefficients égaux à 1 et aucune sous matrice appartenant à $M_{s,t}(\{1\})$.

C'est une question ouverte depuis 1951.

Exemple : $z(m, n, s, 1) = (s - 1)n$

- Nombre de Turán biparti $ex(m, n, F)$

C'est le nombre maximum d'arêtes qu'un graphe biparti (à m et respectivement n sommets dans ses classes) peut avoir, sans contenir aucune copie du graphe biparti F .

- Comparaison

$$2ex(n, K_{s,t}) \leq ex(n, n, K_{s,t}) \leq z(n, n, s, t)$$

Une borne supérieure de $z(m, n, s, t)$

Théorème 1. $z(m, n, s, t) \leq (s-t+1)^{1/t}nm^{1-1/t} + tn + tm^{2-2/t}$,
pour tous $m \geq s$, $n \geq t$, $s \geq t \geq 1$.

La démonstration du théorème repose sur deux lemmes.

Lemme 1. Soient v, k des entiers ≥ 1 et c, x_0, x_1, \dots, x_v des réels positifs. Si $\sum_{i=1}^v \binom{x_i}{k} \leq c \binom{x_0}{k}$, alors :

$$\sum_{i=1}^v x_i \leq x_0 c^{1/k} v^{1-1/k} + (k-1)v.$$

Lemme 2. Soient $t \geq 2$, $v \geq 1$ des entiers et y_1, y_2, \dots, y_v des réels $\geq t-2$.

Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^v \binom{y_i}{t-2} \right) \left(\sum_{i=1}^v (y_i - (t-2)) \right) \leq v(t-1) \sum_{i=1}^v \binom{y_i}{t-1}.$$

Corollaire. $ex(n, K_{3,3}) = \frac{1}{2}n^{5/3} + O(n^{5/3-c})$
où c est une constante strictement positive.

L'ordre de grandeur de $ex(n, K_{2,t+1})$

– **Théorème 2.** Pour $t \geq 1$ fixé,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ex(n, K_{2,t+1})}{n^{3/2}} = \frac{\sqrt{t}}{2}$$

Preuve

- Borne supérieure : $e(G) \leq \frac{1}{2}\sqrt{t}n^{3/2} + \frac{n}{4}$
- Borne inférieure : construction algébrique

$$e(G) \geq \frac{1}{2}\sqrt{t}n^{3/2} - \frac{n}{2}$$

Cet exemple s'inspire d'une construction de Hyltén-Cavallius et Mörs, donnée pour le problème de Zarankiewicz $z(n, n, 2, t+1)$.

– **Corollaire.** Soit t fixé, $t \geq 1$. Alors :

$$ex(n, n, K_{2,t+1}) = \sqrt{t}n^{3/2} + O(n^{4/3}).$$