

Intégrales généralisées.

Exercice 1

Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(t^2+1)^2} dt$$
$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{t^3 \ln t}{(t^4+1)^3} dt \quad I_5 = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1} dt \quad I_6 = \int_0^{1/2} \ln\left(\frac{1}{1-3t+2t^2}\right) dt$$

Exercice 2

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

$$\int_2^{+\infty} \ln t dt, \int_0^2 \ln t dt, \int_0^{+\infty} e^{-4t} dt, \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt, \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt, \int_0^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} dt,$$
$$\int_0^\pi \ln(\sin t) dt, \int_2^{+\infty} (1 - \cos(1/t)) dt, \int_0^1 \sin(1/t) dt, \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln(\cos(1/t)) dt$$

Exercice 3

Étudier la convergence des intégrales :

$$I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2} \quad I_2 = \int_3^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2+2t+7} dt \quad I_3 = \int_2^{+\infty} \frac{t^n+t^{2-n}}{t^3+\sqrt{t}} dt$$

Exercice 4

Soit a et b deux paramètres réels. Discuter selon leurs valeurs de la convergence de $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a(\ln t)^b} dt$. On pourra :

a) Lorsque $a \neq 1$, trouver facilement la réponse en utilisant les résultats classiques cités en cours.

b) Lorsque $a = 1$, calculer explicitement $\int_2^A \frac{1}{t(\ln t)^b} dt$ pour A réel destiné à tendre vers $+\infty$.

Exercice 5

a) Soit $\alpha > 0$.

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt$ converge.

En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ converge (intégrer par parties).

b) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ diverge (linéariser $\sin^2 t$).

En déduire que $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ diverge.

c) Vérifier que quand $t \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \sim \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t}$$

mais que pourtant $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ et $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t} \right) dt$ ne sont pas de même nature.

Exercice 6

a) Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$.

b) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, $\frac{x-1}{x} \leq \ln(x) \leq x-1$.

c) Pour $X \in]0, 1[$, démontrer l'égalité :

$$\int_0^X \frac{x dx}{\ln(x)} = \int_0^{X^2} \frac{dx}{\ln(x)}$$

d) En déduire un encadrement de $\int_0^X \frac{x-1}{\ln(x)} dx$, et montrer que $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx = \ln(2)$.

Exercice 7

Soit f et g deux fonctions continues et strictement positives toutes deux définies sur un même intervalle $[a, b[$ (où b peut être un réel ou désigner $+\infty$), équivalentes au voisinage de b .

On sait bien sûr qu'alors les deux intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature.

Montrer que si ces intégrales convergent, alors $\int_x^b f(t) dt$ et $\int_x^b g(t) dt$ sont équivalentes lorsque x tend vers b par valeurs strictement inférieures.

Exercice 8

Soit f une fonction continue de \mathbf{R}^+ dans \mathbf{R} . On suppose que $f(t)$ admet une limite réelle a quand $t \rightarrow +\infty$.

Montrer que $\int_0^{+\infty} [f(t+1) - f(t)] dt$ converge, et préciser sa valeur.