Exercice 1

1) Montrer que le produit de deux fonctions en escalier est une fonction en escalier.

2) La composée de deux fonctions en escalier est toujours une fonction en escalier. Est-ce vrai ou faux ? (Justifier).

Exercice 2

Montrer que si f est intégrable, alors $|f|$ est également intégrable.

Exercice 3

Soit a et b deux réels fixés, avec $a < b$. On note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$ et $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions en escalier de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$.

1) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ sont en somme directe.

2) Montrer que l'espace $\mathcal{C} \oplus \mathcal{E}$ est égal à l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ vers $\mathbf{R}$.

Exercice 4

Prouver l'énoncé suivant :

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ (où $a < b$), à valeurs positives, telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors f est nulle sur $[a, b]$.

Exercice 5

Donner une expression raisonnablement simple des dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t}\, dt \qquad\qquad g(x) = \int_0^{x^2} [\text{Arctan}(t + x)]^7\, dt.$$

Exercice 6

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ (où $a < b$).

Montrer que f est de signe constant si et seulement si $\int_a^b |f(t)|dt = |\int_a^b f(t)dt|$.

Exercice 7

Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$. Prouver que, lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives, $\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$ tend vers $\frac{1}{2}f(0)$.

Exercice 8

a) Montrer que $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n t dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9

a) Calculer $I = \int_0^1 \ln(1 + t^2)dt$.

b) On pose $u_n = \int_0^1 \sqrt[n]{1 + t^2}dt$ (pour $n \geq 1$). Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c) A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, prouver que pour tout $u \geq 0$,

$$|e^u - 1 - u| \leq \frac{1}{2}u^2e^u.$$

d) En déduire que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|\sqrt[n]{1 + t^2} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1 + t^2)| \leq \frac{1}{n^2}$$

puis trouver un équivalent de $u_n - 1$.

Exercice 10
Soit f de $[0,1]$ vers $[0,1]$ une application continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. On suppose que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = f(1).$$

Montrer qu'il existe un c dans $]0,1[$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 11
On désigne par f une application continue de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe un nombre réel strictement positif k, tel que, pour tout x de $\mathbf{R}^+$, on ait :

$$0 \leq f(x) \leq k \int_0^x f(t)\,dt.$$

1) On définit l'application H de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ en posant, pour tout x de $\mathbf{R}^+$:

$$H(x) = e^{-kx} \int_0^x f(t)\,dt.$$

Montrer que H est dérivable sur $\mathbf{R}^+$ et calculer $H'(x)$ pour tout x de $\mathbf{R}^+$.

2) Montrer que pour tout x de $\mathbf{R}^+$, $H(x)=0$.

3) En déduire que f n'est autre que l'application nulle de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$.

Exercice 12
1) Soit u une fonction continue de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$. On pose, pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$:

$$v(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^x u(t) \sqrt{\cos(\frac{\pi t}{2})}\,dt.$$

Montrer, en appliquant l'inégalité de Schwarz, que pour tout x de $[0,1]$,

$$[v(x)]^2 \leq \int_0^x [u(t)]^2\,dt.$$

2) Soit u_0 une fonction continue de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$. Pour tout $n \geq 1$ et tout x de $[0,1]$, on pose :

$$v_{n-1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^x u_{n-1}(t) \sqrt{\cos(\frac{\pi t}{2})}\,dt$$

$$\text{puis} \qquad u_n(x) = \sqrt{n}\, v_{n-1}(x)$$

a) On note $M = \underset{x\in[0,1]}{\mathrm{Max}} [u_0(x)]^2$. Justifier pourquoi M existe.

b) En utilisant le 1), montrer que :

$$\text{pour tout } n \geq 0, \text{ pour tout } x \in [0,1], [u_n(x)]^2 \leq Mx^n.$$

(on raisonnera par récurrence sur n).

c) En déduire que la suite $\left(u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)_{n\geq 0}$ est convergente, et déterminer sa limite.

Exercice 13

On définit une application f de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$ par :

$$f(t) = \frac{t-1}{\ln t} \text{ pour } 0 < t < 1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1$$

et une application F de $]0,1[$ vers $\mathbf{R}$ par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt.$$

1) Montrer que f est continue en tout point de $[0,1]$.

2) Soit x dans l'intervalle $]0,1[$. Quel est le signe de $F(x)$?

3) Montrer que F est dérivable en tout point de $]0,1[$ et calculer sa dérivée.

4) a) Pour x dans l'intervalle $]0,1[$, montrer que

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t}\, dt = \ln 2.$$

b) Pour x dans l'intervalle $]0,1[$, montrer que

$$x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x \ln 2.$$

c) En déduire l'existence et la valeur de la limite

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} F(x).$$

5) Montrer que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 (avec $x > 0$).

6) a) Montrer que quand ϵ tend vers 0 (avec $0 < \epsilon < 1$)

$$\int_\epsilon^{1-\epsilon} f(t)\, dt \quad \text{tend vers} \quad \int_0^1 f(t)\, dt.$$

b) Déduire de ce qui précède la valeur de

$$\int_0^1 f(t)\, dt.$$