

Décomposition spectrale des endomorphismes

Questions de cours

1. Donner la définition de sous-espaces caractéristiques et projecteurs spectraux.
2. Énoncer le théorème de la décomposition de Jordan- Dunford.
3. Donner un endomorphisme u diagonalisable et un endomorphisme n nilpotent tels que $n \circ d \neq d \circ n$.
4. Est-ce que la restriction d'un endomorphisme trigonalisable u à un sous-espace vectoriel stable par u est un endomorphisme trigonalisable.
5. Supposons T un endomorphisme d'un espace vectoriel V . Montrer que chacun des sous-espaces suivants est invariant (ou stable) par T .

1) $\{0\}$, 2) V ; 3) le noyau de T ; 4) l'image de T .

6. Trouver tous les sous-espaces invariants de $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ considérée comme un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .

Exercice 1

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

On décompose A sous la forme $5I_3 + N$.

1. Calculer N^k pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.
2. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Exercice 2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que son polynôme caractéristique est $P(x) = (1+x)^2(3-x)$.
2. Est-ce que A est diagonalisable ?
3. Trouver la décomposition spectrale de A .
4. En déduire sa décomposition de Dunford.
5. Calculer A^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A . En déduire que A est inversible et non diagonalisable.
2. Déterminer le polynôme minimal de A . En déduire A^{-1} et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de A^n .

Exercice 4

Jordaniser les matrices suivantes : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A .
2. Calculer les projecteurs spectraux de A .
3. Calculer l'exponentielle de A .

Exercice 6

Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal des matrices suivantes et identifier les paires de matrices semblables (en utilisant le théorème de Jordan) :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = A - 4I_4.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A , ainsi que son polynôme minimal. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer $\text{Ker}A$, $\text{Ker}A^2$, $\text{Ker}A_4$ et $\text{Ker}A_4^2$
3. Soient $v_1 \neq 0 \in \text{Ker}A^2 \setminus \text{Ker}A$, $v_2 = Av_1$, et $v_3 \neq 0 \in \text{Ker}A_4^2 \setminus \text{Ker}A_4$, $v_4 = A_4v_3$. Montrer que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de \mathbb{R}^4 .
4. Montrer que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donner une base correspondante.

5. Calculer les matrices des projecteurs spectraux associés à A sous forme de polynôme en A . Montrer qu'il existe une décomposition de A sous la forme $A = D + N$, où D est diagonalisable, D et N commutent, et $N^2 = 0$.