

## Calcul de polynômes caractéristiques/ valeurs propres

### Diagonalisation

#### Questions de cours

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et  $A$  sa matrice dans une base. On note  $P_f$  (resp.  $P_A$ ) son polynôme caractéristique.

1. Donner la définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$ . (L'étudiant devra vérifier que cette définition a un sens en montrant que le polynôme caractéristique d'une matrice est un invariant de similitude...).

2. Donner les définitions des valeur propre, vecteur propre, spectre d'un endomorphisme. Que dire de la somme des sous espaces propres d'un endomorphisme? Montrez le. En déduire la finitude du spectre.

3. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $\lambda \in Sp(f)$  si et seulement si  $P_f(\lambda) = 0$ . En déduire la finitude du spectre.

4. Donner les définitions des multiplicités algébrique et géométrique d'une valeur propre. Quelle inégalité les relie? Démonstration.

5. Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sous e.v. strict de  $E$ . Soit  $g = f|_F$  la restriction de  $f$  à  $F$ . Montrer que  $g \in \mathcal{L}(F)$  et  $P_g$  divise  $P_f$ .

6. Donner la définition d'un endomorphisme diagonalisable. Énoncer le théorème de caractérisation des endomorphismes diagonalisables.

7. Soient  $E$  un e.v. de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $f$  admet  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que  $f$  est diagonalisable.

## Exercices I

### Exercice 1

Trouver deux matrices carrées diagonalisables dont la somme n'est pas diagonalisable.

### Exercice 2

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre complexe de  $A$ , alors  $\bar{\lambda}$  est aussi une valeur propre de  $A$ . De même, montrer que si  $x$  est un vecteur propre complexe de  $A$ , alors  $\bar{x}$  est aussi un vecteur propre complexe de  $A$ .

2. Diagonaliser  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 3

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

1.  $A$  est-elle diagonalisable? Si oui, la diagonaliser.
2. Trouver une matrice  $B \in M_3(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = A$  et  $Tr(B) = 0$ .

### Exercice 4

Trouver  $A \in M_2(\mathbb{Z})$  telle que  $A^{10} = \begin{pmatrix} -8183 & -6138 \\ 12276 & 9208 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 5

Les matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  de  $M_3(\mathbb{R})$  sont-elles semblables?

### Exercice 6

Montrer que tout endomorphisme nilpotent et diagonalisable est nul.

### Exercice 7

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  telles que  $AB$  est diagonalisable.

1. Montrer que si  $A$  ou  $B$  est inversible, alors  $BA$  est diagonalisable.
2. Le résultat précédent est-il valable sans l'hypothèse d'inversibilité?

### Exercice 8

Soient les suites  $(u_n)_n$ ,  $(v_n)_n$  et  $(w_n)_n$  définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 4v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = 4u_n + 5v_n - 4w_n \\ w_{n+1} = 4u_n + 4v_n - 3w_n \\ u_0 = v_0 = w_0 = 1 \end{cases}$$

1. Réécrire le système pour obtenir  $X_{n+1} = AX_n$  où  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$  et  $A \in M_3(\mathbb{R})$ .
2. Diagonaliser  $A$  et en déduire  $A^n \forall n \geq 1$ .
3. Exprimer  $u_n, v_n, w_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 9

Soient  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$  et  $H \in M_n(\mathbb{C})$  telle que  $\text{rang}(H) = 1$ .

Montrer que  $H$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{tr}(H) \neq 0$ .

### Exercice 10

On considère l'application suivante :  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (X^2 - 1)P'' - 2(nX + a)P' \end{matrix}$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2.  $f$  est-il diagonalisable ?

## Exercices II (plus difficiles)

### Exercice 11

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Diagonaliser la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ .

### Exercice 12

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$  tel que tout vecteur non nul  $x \in E$  soit vecteur propre de  $f$ .

On veut montrer qu'il existe un scalaire  $\lambda$  tel que  $f = \lambda Id_E$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$  telle que  $E_\lambda \neq E$  où  $E_\lambda$  est le sous-espace propre associé à  $\lambda$ .

1. Montrer qu'il existe  $\lambda'$  et  $\lambda''$  deux autres valeurs propres de  $f$  telles que  $\lambda, \lambda'$  et  $\lambda''$  soient deux à deux distinctes.
2. En déduire que le polynôme caractéristique de  $f$  est nul et conclure.

### Exercice 13

Soient  $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = (X - a)(P' - P'(a)) - 2(P - P(a))$$

1. Montrer que la famille  $\{(X - a)^k, k = 0..n\}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Déterminer valeurs propres, vecteurs propres, noyau, image de  $f$ .  
 $f$  est-il diagonalisable ?

### Exercice 14

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Trouver les espaces propres de  $A$ .
2. Trouver les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 0,1 et 3 stables par  $f$ .
3. Montrer que le plan  $P_0 = \text{Ker}(f^2 + 3Id)$  est stable par  $f$ . En déduire les autres plans de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $f$ .
4. Conclure en donnant tous les sous-espaces propres de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $f$ .

### Exercice 15

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que si  $A$  est diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{R})$ , alors  $A$  est diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{C})$ .

La réciproque est-elle vraie ?

2. On suppose désormais que le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  et que  $A$  est diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{C})$ .

(a). Soient  $Q_1$  et  $Q_2 \in M_n(\mathbb{R})$ .

Montrer que l'application  $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \alpha & \longmapsto & \det(Q_1 + \alpha Q_2) \end{array}$  est une application polynomiale.

(b). Montrer que  $A$  est en fait diagonalisable dans  $M_n(\mathbb{R})$ .