Calcul de polynômes caractéristiques/ valeurs propres

Dans la suite, tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie. Par ailleurs, si A est une matrice et u un endomorphisme, on désignera par P_A et P_u les polynômes caractéristiques de A et u.

Questions de cours

1. Donner la définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$. (L'étudiant devra vérifier que cette définition a un sens en montrant que le polynôme caractéristique d'une matrice est un invariant de similitude...).

2. Donner les définitions des valeur propre, vecteur propre, spectre d'un endomorphisme. Que dire de la somme des sous espaces propres d'un endomorphisme ? Montrez le. En déduire la finitude du spectre.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\lambda \in Sp(f)$ si et seulement si $P_f(\lambda) = 0$. En déduire la finitude du spectre.

4. Donner les définitions des multiplicités algébrique et géomètrique d'une valeur propre. Quelle inégalité les relie ? Démonstration.

5. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous e.v. strict de E. Soit $g = f_{|F}$ la restriction de f à g. Montrer que $g \in \mathcal{L}(F)$ et P_g divise P_f.

6. Donner la définition d'un endomorphisme diagonalisable. Enoncer le théorème de caractérisation des endomorphismes diagonalisables.

7. Soient E e.v. de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f admet n valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que f est diagonalisable.

Exercices I

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini $f(x, y, z) = (x + y + z, 2y, z)$.
1) Calculer les valeurs propres et déterminer les sous-espaces propres de f.
2) Est-ce que f est diagonalisable ? Si oui, diagonaliser f.

Exercice 2

Soit f l'endomorphime de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le spectre de f. En déduire que f est diagonalisable.
2. Donner la matrice de f dans une base de $\mathbb{R}^3$ composée de vecteurs propres de f que l'on précisera.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans une base $B = (c_1, c_2, c_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrez que f admet une valeur propre unique λ que vous déterminerez.
2. Déterminez le rang de l'endomorphisme $f - \lambda Id_E$.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 4

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de u. En déduire que 0 est valeur propre de u.
2. Montrer que $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est vecteur propre de u.
3. Construire une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de u.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP$.
1. Montrer que f est linéaire et déterminer le spectre de f.
2. Déterminez la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 6

Soit φ l'application définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\varphi(P) = (X - 1)P' - XP''.$$

1. Montrez que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminez la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. En déduire que φ est diagonalisable.

Exercice 7

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice admettant n valeurs propres distinctes. Montrer que $B = A^2$ est diagonalisable.

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
a) Justifier que tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre.
b) Observer que l'endomorphisme $P(X) \mapsto (X - 1)P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ n'a pas de valeurs propres.

Exercice 9

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme unitaire de $K[X]$. Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice compagne de P est égal à $(-1)^n P$.

Exercice 10

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n. On suppose que f possède une unique valeur propre λ.

a) A quelle condition l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b) Calculer le polynôme caractéristique de f.

Exercices II

On pourra "aider" les étudiants sur les 2 derniers exercices.

Exercice 10

Pour $n \geq 1$, soit f l'application définie de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ par $f(A) = {}^tA$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$.
2. Déterminer le spectre de f.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 11

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible de polynôme caractéristique P_A. Montrer que pour tout $x \neq 0$,

$$P_{A^{-1}}(x) = \frac{(-1)^n x^n}{P_A(0)} P_A(1/x).$$

Exercice 12

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On désire établir l'égalité des polynômes caractéristiques : $P_{AB} = P_{BA}$.

a) Etablir l'égalité quand $A \in GL_n(\mathbb{R})$

b) Supposons $A \notin GL_n(\mathbb{R})$. Justifier que pour $t \neq 0$ suffisamment petit, $A + tI_n \in GL_n(\mathbb{R})$ et en déduire que l'égalité est encore vraie.

Exercice 13

Soient E un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent.
Montrer que $P_f = (-1)^n X^n$.

Exercice 14

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB = BA$. Montrer que A et B ont un vecteur propre en commun.