

Examen de l'unité d'enseignement Math II Analyse

06 juin 2008

Durée: 2 heures

Les documents ne sont pas autorisés. Les réponses, ou les exemples, doivent être soigneusement justifiés. La qualité de la rédaction est un élément d'appréciation significatif.

I. (7 points)

- a) Calculer l'intégrale $I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$ à l'aide de changement de variable $t = \phi(u)$ avec $\phi = \tan$.
- b) Calculer l'intégrale $I_2 = \int_{1/2}^3 \frac{2x+5}{x(x-1)(x-4)} dx$.
- c) Trouver la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{(2n)!}{n!}} \right).$$

II.(6 points)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$.

- A) 1) Effectuer un développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
- 2) Effectuer un développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 1.

- 3) Montrer que f admet une limite pour $x \rightarrow +\infty$ et calculer cette limite.
- B) 1) Justifier pourquoi g est dérivable sur \mathbb{R} .
- 2) Calculer $g'(x)$ pour tout x réel et montrer que $g'(x) = \frac{a}{1+x^2}$ pour une constante réelle a qu'on explicitera.
- 3) En déduire que $g(x) = b - a \arctan x$ pour tout x réel, b étant une constante que l'on explicitera.

III. (7 points)

Soit G une fonction définie par $G(x) = \int_0^x e^t \ln(1 + e^{-t}) dt$.

- 1) Exprimer $G(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
- 2) a) Montrer que G est deux fois dérivable, calculer sa dérivée $G'(x)$ et sa dérivée seconde $G''(x)$.
- b) Déterminer le développement limité de G , à l'ordre 2, dans un voisinage de 0.
- c) Déterminer une équation de sa tangente au point d'abscisse $x = 0$ et préciser la position du graphe par rapport à la tangente dans un voisinage du point d'abscisse $x = 0$.
- 3) a) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange montrer que pour tout $u > 0$:

$$u - \frac{u^2}{2} < \ln(1 + u) < u.$$

- b) En déduire que

$$x < G(x) < x + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}.$$

- c) Trouver un équivalent de $G(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.