

Contrôle Continu Ecrit Mi-Parcours- Math III Analyse
18 Novembre 2009

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h00. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés.

Questions de cours (20 minutes)(6 points)

1. (10 min) (3 points) Enoncer et démontrer la propriété de convergence des séries de Riemann.
2. (10 min) (3 points) Enoncer et démontrer la propriété de limite et continuité des suites de fonctions uniformément convergentes.

Exercice 1. (40 minutes)(6 points+ 1 point de bonus)

1. (15 min) (2 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série de terme général

$$u_n = (\cos(1/n))^{n^3}?$$

2. (25 min)(4 points + 1 point de bonus) Le but de cette question est d'étudier la nature (convergente ou divergente) de la série de terme général

$$u_n = \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{1 + n}.$$

- a. Montrer que u_n peut s'écrire sous la forme $u_n = v_n + w_n$, où $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite alternée (bien justifier le fait que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée).
- b. Etudier la nature des série de terme général $1/(1 + n)$ et $(-1)^n \sqrt{n}/(1 + n)$.
- c. En déduire la nature de la série de terme général u_n .
- d. Donner un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers l'infini. Que pourrait-on alors conclure pour la série de terme général u_n ?
- e. (BONUS) Expliquer pourquoi on obtient une contradiction entre le résultat du c. et le résultat du d.

Exercice 2. (30 minutes)(4 points + 1 point bonus)

1. (5 min) (1 points) Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = \sqrt[n]{2}?$$

2. (25 min) (3 points) Soit $\sum u_n$ la série de terme général

$$u_n = n(1 + n^2)^p$$

- (BONUS) Rappeler la propriété de comparaison d'une série et d'une intégrale impropre (sans la démontrer)
- Quelle est la nature de la série pour $p \geq -1/2$?
- Quelle est la nature de la série pour $p = -1$?
- Supposons que $p \in] - \infty, -1/2[\setminus \{-1\}$, quelle est alors la nature de la série ?

Exercice 3. (30 minutes)(4 points + 1 point bonus)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs, vérifiant, pour n "suffisamment grand" (c'est à dire, qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

- Montrer que si la série $\sum v_n$ est convergente, il en est de même de la série $\sum u_n$ et que si la série $\sum u_n$ est divergente, il en est de même de la série $\sum v_n$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 1/n^\alpha$. Montrer que l'on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \alpha/n + o(1/n),$$

où o est la notation de Landau. On rappelle que le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre n de $(1+x)^\alpha$ s'écrit

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - a/n + o(1/n).$$

- En utilisant les questions 1. et 2., exprimer en fonction de α , a et o la différence

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

- Avec α judicieusement choisi, montrer que si $a > 1$ la série $\sum u_n$ est convergente.
 - Avec α judicieusement choisi, montrer que si $a < 1$ la série $\sum u_n$ est divergente.
- (BONUS) Application : étudier les séries de terme général

$$\text{i. } u_n = \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)} \quad \text{ii. } u_n = \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n+2)}$$

N.B. : Le résultat 3. est plus connu sous le nom de règle de Raabe-Duhamel.