Exercices de révision

Exercice 1. (*Fonctions rationnelles en* $\sin x$ *et* $\cos x$*. Règle de Bioche*) Calculer :
a)

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx$$

b)

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$$

c)

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

d)

$$\int \frac{dx}{a + \cos x}.$$

Exercice 2. a) Pour $n \geq 1$, on note

$$f_n(x) = \frac{1}{x^n + 1}.$$

Déterminer le minimum et le maximum de la fonction f_n sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.

b) Pour $n \geq 1$ on note :

$$I_n = \int_0^{1/2} f_n(x) dx.$$

On **ne cherchera pas à calculer** I_n. En utilisant la question précédente, fournir un encadrement de I_n puis en déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 3.
a) Résoudre l'équation suivante : $\text{Argch}x = \text{Argsh}(2 - x)$.

b) Étudier et en déduire une expression plus simple de la fonction

$$x \to \text{Argth}\frac{1 + 3\text{th}x}{3 + \text{th}x}.$$

c) Montrer la relation suivante $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|\text{Arctan}(\text{sh}x)| = \text{Arccos}(\frac{1}{\text{ch}x}).$$

Exercice 4.
Soient
$$u(x) = \text{Arctan}\frac{1}{2x^2} \quad \text{et } v(x) = \text{Arctan}\frac{x}{x+1} - \text{Arctan}\frac{x-1}{x}.$$

a) Déterminer leurs domaines de définition.

b) Calculer leurs dérivées.

c) Étudier $u(x) - v(x)$.

Exercice 5.
1) Montrer que $\text{Arctan}x + \text{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\text{sgn}x$.

2) Vérifier l' identité suivante :

$$2\text{Arctan}\frac{1}{2} = \text{Arctan}\frac{4}{3}.$$

Exercice 6. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt.$$

1) Quel est le domaine de définition de f ?

2) a) Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$. En déduire un prolongement de f.

b)Étudier $\lim_{x\to\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

3) Exprimer $f'(x)$. Étudier son signe. Déterminer $f'(0)$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

4) Résoudre l'équation $f(x) = 0$

5) Tracer le tableau de variation de f.

****