DES TAXONS ET DES NOMBRES : QUELQUES REMARQUES SUR LES ORDRES, CLASSES ET GENRES DES COURBES ALGEBRIQUES

François Lê*

Preprint. Novembre 2021.

Règnes, embranchements, classes, ordres, familles, genres, espèces. Tels sont les noms bien connus des catégories emboîtées de la taxinomie classique, systématisée par les célèbres travaux de Carl von Linné mais également discutée par d'autres naturalistes des XVIII^e et XIX^e siècles, autour de questions relatives à la délimitation de ces catégories, à leur formation successive à partir des individus ou à leur dénomination, par exemple. Certaines de ces catégories apparaissent aussi dans les écrits de savants qui se sont intéressés à la classification du vivant avant Linné : en particulier, le couple formé des taxons de genre et d'espèce, dans leur sens relatif aristotélicien, a ainsi été abondamment utilisé pour décrire l'ordonnancement des plantes, des animaux et des minéraux[1].

L'activité classificatoire n'est par ailleurs pas l'exclusivité de l'histoire naturelle, formant la base de problèmes essentiels tant en psychiatrie qu'en chimie, en astronomie ou en logique, pour ne citer que quelques exemples d'autres domaines scientifiques[2]. C'est aussi le cas des mathématiques, au sujet desquelles des recherches historiques récentes ont mis en évidence certaines spécificités de la pratique du classement, étudié comment cette dernière mobilise et fait jouer les interfaces disciplinaires, ou décrit encore son rôle dans le processus de découverte mathématique lui-même[3].

J'aimerais ici continuer dans cette voie, en m'intéressant à certaines classifications de certains des objets centraux de la géométrie : les courbes algébriques[4]. Plus précisément, je propose de

---

* Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS UMR 5208, Institut Camille Jordan, 43 blvd. du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne Cedex, France.

[1] Devant l'étendue de la littérature sur ce sujet, je ne renverrai qu'aux contributions récentes suivantes : Thierry Hoquet (éd.), *Les Fondements de la botanique : Linné et la classification des plantes* (Villefranche-de-Rouergue : Vuibert, 2005) ; Jean-Marc Drouin, *L'herbier des philosophes* (Paris : Éditions du Seuil, 2008) ; Tanja Pommerening et Walter Bisang (éds.), *Classification from Antiquity to Modern Times: Sources, Methods, and Theories from an Interdisciplinary Perspective* (Berlin, Boston : De Gruyter, 2017) ; Meyssa Ben Saâd, Simon Thuault, Yoan Boudès et Axelle Brémont (éds.), Les classifications zoologiques d'Aristote à Linné : approches historiques et lexicologiques, *Bulletin d'histoire et d'épistémologie des sciences du vivant*, 28/1 (2021), ainsi qu'aux articles de Stéphane Tirard, Danièle Vial, Cristina Oghina-Pavie et Marie Fisler dans le dossier « Images et classifications du vivant » du *Bulletin d'histoire et d'épistémologie des sciences de la* vie, 23/2 (2016).

[2] Voir respectivement Julie Mazaleigue-Labaste, Les limites de l'acceptable : petites et grandes « perversions », *Criminocorpus* (2016), en ligne, http://journals.openedition.org/criminocorpus/3371 ; Stéphanie Ruphy, La classification des étoiles : un nouvel allié pour le pluralisme scientifique, in *Précis de philosophie de la physique*, (2013), 274-294 ; Bernadette Bensaude-Vincent, Classification. Chimie, in Dominique Lecourt (éd.), *Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences* (Paris : Presses universitaires de France, 2003), 179-180 ; Jean-Marie Chevalier, La logique est-elle une science de classification ? Sur une crise de la classification dans la logique au XIX^e siècle, *Cahiers François Viète*, sér. 3, vol. 1 (2016), 61-81.

[3] Voir les différents articles de : François Lê et Anne-Sandrine Paumier (éds.), La classification comme pratique scientifique, *Cahiers François Viète*, sér. 3, vol. 1 (2016).

[4] Une courbe algébrique (plane) est une courbe pouvant être définie par une équation polynomiale entre deux inconnues. Le cercle unité, d'équation $x^2 + y^2 = 1$, est une telle courbe, mais une spirale est un exemple de courbe non algébrique.

nous focaliser ici sur les classifications de ces courbes qui ont été bâties à l'aide des notions d'ordre, de classe et de genre.

Le choix de suivre ces trois mots classificatoires, dont nous verrons qu'ils ont d'abord désigné des catégories de courbes puis des nombres qui leur sont associés, est motivé par le fait que ce sont eux qui apparaissent explicitement dans la représentation du savoir géométrique relatif aux courbes algébriques au tournant du XX^e^ siècle ; en fait, ils l'organisent même en partie, c'est-à-dire que la structuration de ce savoir est calquée sur la classification des objets eux-mêmes.

Regardons ainsi l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, fruit d'un projet collectif initié puis supervisé par Felix Klein visant à présenter à la fois l'état des mathématiques à la fin du XIX^e^ siècle et leur histoire au cours de ce siècle[5]. La distinction des chapitres se rapportant aux courbes algébriques est faite en suivant leur classification par ordres : un chapitre concerne les coniques, autre nom des courbes du second ordre, un autre se rapporte aux courbes des troisième et quatrième ordres, et un dernier est dévolu à celles d'ordre supérieur au quatrième[6]. Les notions de classe et de genre apparaissent quant à elles au sein des architectures internes de ces chapitres. Par exemple, le deuxième paragraphe sur les courbes du troisième ordre traite de leur « classification par classe et par genre », tandis que pour les courbes du quatrième ordre, trois sections entières sont respectivement consacrées aux cas des courbes de genre 0, 1 et 2.

La situation est quelque peu différente dans le *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*, publié en 1889 à l'occasion d'une entreprise de recension et de classement des publications mathématiques du XIX^e^ siècle[7]. Les courbes du second ordre y sont là aussi mises à part, mais d'autres sections mettent en avant d'abord les « courbes au point de vue de leur genre » puis les « courbes du troisième ordre ou de la troisième classe », celles « du quatrième ordre ou de la quatrième classe » et enfin celles « d'ordre ou de classe supérieurs à quatre ». Genres et classes sont donc susceptibles d'intervenir à un niveau hiérarchique plus élevé que dans l'*Encyklopädie*, bien que le genre organise aussi certaines des sous-divisions relatives aux courbes de troisième ordre ou de troisième classe (voir la figure 1).

Une telle présence à ces niveaux d'organisation du savoir indique ainsi qu'ordres, classes et genres de courbes algébriques sont des notions bien reconnues et relativement stabilisées au tournant du siècle, même si leurs rapports hiérarchiques mutuels ne semblent pas tout à fait fixés[8].

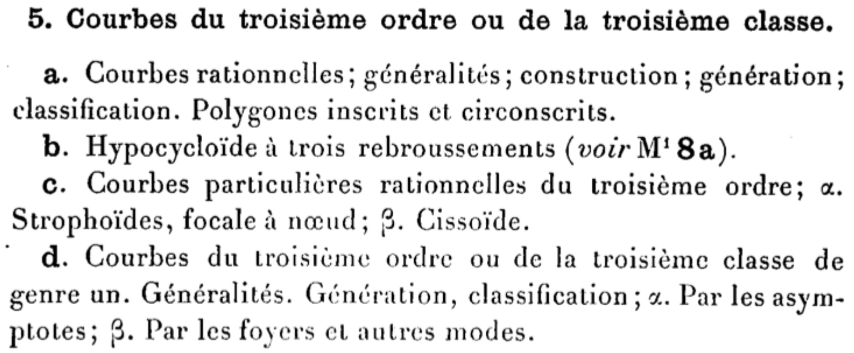
---

[5] Voir Renate Tobies, Mathematik als Bestandteil der Kultur: Zur Geschichte des Unternehmens *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, *Mitteilungen der Österreichischen Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte* 14 (1994), 1-90 ; Hélène Gispert, Les débuts de l'histoire des mathématiques sur les scènes internationales et le cas de l'entreprise encyclopédique de Felix Klein et Jules Molk, *Historia Mathematica* 26 (1999), 344-360.

[6] Il s'agit respectivement de Friedrich Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, t. III. C. 1. (Leipzig : Teubner, 1903), 1-160 ; Gustav Kohn, Ebene Kurven dritter und vierter Ordnung, in *Encyklopädie…*, (Leipzig : Teubner, 1908), 457-570 ; Gino Loria, Spezielle ebene algebraische Kurven von höherer als der vierten Ordnung, in *Encyklopädie...* (Leipzig : Teubner, 1914), 571-634.

[7] Voir Philippe Nabonnand et Laurent Rollet, Une bibliographie mathématique idéale ? Le Répertoire bibliographique des sciences mathématiques, *Gazette des Mathématiciens* 92 (2002), 11-26.

[8] Le *Catalogue of scientific papers* et le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* sont d'autres entreprises de recensions et de classifications qui existent au début du XX^e^ siècle. Les divisions adoptées pour le sujet des courbes sont moins détaillées que celles de l'*Encyklopädie* et du *Répertoire*, et sont fondées uniquement sur leur ordre.


5. Courbes du troisième ordre ou de la troisième classe.

a. Courbes rationnelles; généralités; construction; génération; classification. Polygones inscrits et circonscrits.

b. Hypocycloïde à trois rebroussements (*voir* M[1] **8a**).

c. Courbes particulières rationnelles du troisième ordre; α. Strophoïdes, focale à nœud; β. Cissoïde.

d. Courbes du troisième ordre ou de la troisième classe de genre un. Généralités. Génération, classification; α. Par les asymptotes; β. Par les foyers et autres modes.

Figure 1 : Extrait de l'index du *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques.* Les courbes rationnelles sont des courbes de genre 0, dont les hypocycloïdes à trois rebroussements sont des cas particuliers.

Mais ces trois notions possèdent bien sûr leurs histoires, parfois distinctes, parfois entrelacées, que je souhaite retracer.

Il est généralement accepté que ces notions, au moins dans leurs acceptions communément partagées à la fin du XIX[e] siècle, sont apparues explicitement sous les plumes respectives d'Isaac Newton (1704), de Joseph-Diez Gergonne (1828) et d'Alfred Clebsch (1865), et les épisodes au cours desquels elles ont été introduites ont déjà étudiés historiquement, souvent de manière séparée les uns des autres[9]. La question classificatoire n'y a cependant pas été toujours mise au centre de l'attention, mise quelque peu en retrait par rapport à d'autres questions historiques vis-à-vis desquelles il était intéressant d'interroger ces épisodes, comme la classification plus particulière des courbes du troisième ordre de Newton, la polémique de la dualité à laquelle Gergonne prend part et l'utilisation des fonctions dites abéliennes pour l'étude des courbes par Clebsch. Une spécificité des introductions des ordres, classes et genres est en effet qu'elles ont été proposées par leurs auteurs dans des travaux dont le but ne consiste pas uniquement en cela : c'est tout particulièrement le cas pour les ordres et les genres, rapidement définis en un ou deux courts paragraphes introductifs par Newton et Clebsch avant que ces derniers ne poursuivent leurs objectifs principaux. Cela étant dit, qu'une telle portion congrue leur soit initialement accordée n'est synonyme d'indifférence ni pour leurs auteurs, ni pour leurs lecteurs, comme nous aurons l'occasion de le constater, et ne signifie pas non plus que les aspects techniques qui les sous-tendent ne s'ancrent pas dans des travaux antérieurs plus développés.

Le récit que je propose est structuré autour des trois épisodes mentionnés, qui seront revisités à l'aune de questions ayant trait au thème de la classification. Ils seront aussi complétés et liés entre eux à l'aide de corpus de textes qui ne s'y rapportent pas directement et dont les auteurs ne sont pas Newton, Gergonne ou Clebsch, mais qui permettent de suivre la circulation et l'adoption collective des notions classificatrices qui nous intéressent[10].

[9] Les références à la littérature en question seront données au fil de l'article.

[10] La formation des corpus en question sera décrite en temps voulu. Notons aussi que ces corpus feront apparaître des définitions et des utilisations de classes et de genres antérieures à (et différentes de) celles de Gergonne et de Clebsch. Ces notions seront aussi étudiées, notamment parce qu'elles offrent un point de vue comparatif intéressant.

Pour décrire la trame ainsi construite, j'insisterai sur plusieurs points. Je ferai d'abord voir comment les différentes classifications sont introduites et s'articulent entre elles, ce qui permettra en particulier de souligner que la chronologie décrite précédemment ne correspond pas à la recherche d'un raffinement successif d'une unique classification des courbes et que les rapports hiérarchiques des ordres, classes et genres se sont modifiés au cours du temps, parallèlement aux évolutions de la géométrie elle-même. Par ailleurs, plusieurs questions terminologiques seront soulevées par l'étude de certains textes, que ce soit par des commentaires explicites de leurs auteurs ou par des traces plus discrètes. Elles seront donc examinées de près. Enfin, je chercherai à décrire un phénomène qui me semble d'un vif intérêt vis-à-vis de la problématique classificatoire : le passage progressif d'une conception des ordres, classes et genres en tant que catégories à une conception en tant que nombres, dont un des effets est de permettre aux mathématiciens d'opérer arithmétiquement sur eux. Ce processus n'est cependant ni explicité ni commenté par les auteurs de l'époque : pour le suivre, l'attention sera portée sur diverses formulations textuelles utilisées dans les publications du passé et témoignant de ce glissement sémantique subreptice.

Une synthèse sera présentée en conclusion. Elle sera appuyée sur une rapide comparaison avec le cas des formes quadratiques, autres objets mathématiques qui ont été distribués en classes, ordres et genres au XIX^e siècle, et, à une échelle moins fine, avec celui des classifications naturalistes.

1. Des genres et des ordres autour de Newton

La classification par ordres proposée par Newton est introduite au début de l'*Enumeratio linearum tertii ordinis*, écrit présentant en fait surtout une classification plus fine portant sur le troisième de ces ordres[11]. Les ordres concernent en fait les lignes, qui englobent les courbes proprement dites ainsi que les droites, alors que les courbes elles-mêmes sont classées par Newton en genres[12].

Ces modes de classement s'appuient sur la possibilité de définir lignes et courbes par des équations entre deux inconnues, que Newton a probablement apprise au cours de ses lectures de jeunesse, dans les années 1660 : ses sources de l'époque incluent en effet la deuxième édition de la traduction latine de la *Géométrie* de René Descartes[13], où ce dernier avait montré comment former des équations entre deux grandeurs inconnues afin de résoudre des problèmes de géométrie, et comment interpréter ensuite de telles équations comme définissant des lignes courbes solutions des problèmes posés[14]. Descartes lui-même établissant une certaine

[11] Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, in *Opticks: or, a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light*, (London : Smith et Walford, 1704), 139-211.

[12] Dans toute cette section, la distinction entre lignes et courbes sera soigneusement suivie. Nous verrons qu'elle cessera d'être adoptée au courant du xviiie siècle.

[13] René Descartes, *La géométrie*, in *Discours de la méthode*, (Leyde : Ian Maire, 1637), 295-413; Id., *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita,* 2e éd., trad. par Frans van Schooten, avec des comment. de Florimond De Beaune, Frans van Schooten, Jan Hudde, Hendrik van Heuraet et Jan de Witt (Amsterdam : Apud Ludovicum et Danielem Elzevirios, 1659/1661).

[14] Les sources mathématiques de jeunesse de Newton sont décrites dans Niccolò Guicciardini, *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method* (Cambridge, Massachusetts & London, England : The MIT Press, 2009), p. 5. Soulignons que dans l'*Enumeratio*, Newton étudie les lignes courbes définies par une équation du troisième degré sans les lier *a priori* à un problème géométrique. Il s'agit donc plutôt de l'approche présentée par Pierre Fermat dans l'*Ad locos planos et solidos isagoge*, que Newton ne semblait toutefois pas connaître à l'époque

classification des courbes en genres, il est intéressant pour nous de faire un détour par ses travaux et par ceux de quelques-uns de ses successeurs[15].

1.1 Des genres de lignes au Grand Siècle

Descartes avait ainsi proposé de « distinguer [les lignes courbes] par ordre en certains genres » à l'aide des équations les représentant[16]. Plus précisément, les lignes courbes dont l'équation fait intervenir ses inconnues à la deuxième « dimension » (c'est-à-dire que l'équation est du second degré) forment « le premier et plus simple genre[17] », tandis que les genres suivants regroupent les lignes courbes par paires de degrés de la façon suivante : le n-ième genre, pour $n \geq 2$, est constitué des courbes dont l'équation est du $(2n-1)$-ième ou du $2n$-ième degré[18] — le cas exceptionnel du premier genre renvoie au fait que les lignes droites ne sont pas comptées parmi les courbes par Descartes.

La seule explication donnée explicitement par Descartes de cette manière de regrouper les lignes courbes est une allusion au fait que les « difficultés » du quatrième degré se « réduisent » toujours au troisième et que celles du sixième degré s'abaissent au cinquième[19] : cette allusion est unanimement comprise par la littérature historique citée comme une référence à la réduction des équations en une inconnue du quatrième degré à celles du troisième degré, dont Descartes pensait, à tort, qu'elle se généralisait aux degrés supérieurs et aux équations à deux inconnues. D'autres interprétations de la raison de la classification par genres, qui ne se rapportent pas à la justification explicite de Descartes, sont liées à la construction des courbes correspondant à la solution du problème de Pappus et à la classification cartésienne des problèmes géométriques.

(voir Pierre Fermat, *Œuvres complètes*, t. 1, Charles Henry et Paul Tannery (éds.) (Paris : Gauthier-Villars, 1891), 91-103. L'*Isagoge* a circulé parmi les correspondants de Fermat dès 1637 mais n'a été publié qu'en 1679. Voir Michael S. Mahoney, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601–1695)* (Princeton : Princeton University Press, 1999), p. 72.

[15] Alors que nous débutons notre analyse par la *Géométrie*, notons que Roshdi Rashed s'est intéressé aux classifications des courbes depuis l'Antiquité grecque jusqu'à Descartes. Voir Roshdi Rashed, Les premières classifications des courbes, *Physis* 42/1 (2005), 1-64. Comme cela a été souligné dans ce texte (parmi d'autres), rappelons que les liens nouveaux instaurés entre équations et courbes algébriques modifient substantiellement les manières possibles de classer ces dernières.

[16] Voir Descartes (1637), *op. cit. in* n. 13, p. 319. Au sujet de la *Géométrie*, je renvoie à Henk J. M. Bos, *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction* (New York : Springer, 2001) ; Michel Serfati, René Descartes, *Géométrie*, Latin Edition (1649), French Edition (1637), in Ivor Grattan-Guinness (éd.), *Landmark Writings in Western Mathematics, 1640-1940* (Amsterdam : Elsevier Press, 2005), 1-22, ainsi qu'à Alain Herreman, La fonction inaugurale de *La Géométrie* de Descartes, *Revue d'histoire des mathématiques* 18 (2012), 67-156 ; Id., L'introduction des courbes algébriques par Descartes : genèse et inauguration. Complément à la conjecture de H. Bos sur le rôle historique du problème de Pappus, *Revue d'histoire des mathématiques* 22 (2016), 97-137. Voir en particulier Bos, *op. cit. in* n. 16, ch. 25 pour la question de la classification des courbes.

[17] Descartes (1637), *op. cit. in* n. 13, p. 319. Bos, *op. cit. in* n. 16, ch. 25, discute du lien entre simplicité et classification des lignes courbes, en insistant davantage sur le degré comme division classificatoire plutôt que le genre. Notons par ailleurs que les degrés ne sont pas présentés comme des nombres chez les auteurs des XVII[e] et XVIII[e] siècles suivis. Il s'agit plutôt de divisions empilées d'équations reflétant leurs dimensions, ce qui les rapproche de taxons.

[18] En traitant un exemple de recherche d'un certain lieu géométrique à l'aide d'une mise en équation, Descartes fait remarquer (sans le démontrer) que les différentes manières d'obtenir une telle équation n'ont pas d'influence sur le genre de la courbe correspondante. Une interprétation actuelle de ce résultat (en fait, d'une propriété qui implique ce dernier) est l'invariance du degré d'une équation d'une courbe par transformation affine. Cette question de l'indépendance du degré sera reprise, explicitée et démontrée par d'autres mathématiciens que nous rencontrerons dans la suite.

[19] Descartes (1637), *op. cit. in* n. 13, p. 323.

Quoi qu'il en soit, si cette classification a bien été reprise par plusieurs de ses lecteurs du xviie siècle, comme Florimond de Beaune[20] — qui intègre toutefois les lignes droites dans le premier genre (p. 142) —, Frans van Schooten[21], Philippe de Lahire[22] ou Jacques Ozanam[23], d'autres ont adopté une posture plus critique à son égard[24]. Par exemple, dans une lettre à Kenelm Digby de 1657 reprenant des arguments développés dans sa *Dissertation en trois parties*, Fermat explique pourquoi, « quand [Descartes] range ces courbes en espèces ou genres déterminés, il assigne tout à fait à tort la même espèce à la courbe cubique et quadratoquadratique, ainsi qu'à la courbe quadratocubique et cubocubique. Et ainsi à l'infini par une même et uniforme disposition[25]. » Sa proposition consiste à regrouper les lignes degré par degré, en incluant au passage les lignes droites dans la classification :

> Les lignes du premier degré, c'est-à-dire les droites, revendiquent pour elles-mêmes la première espèce de lignes ; les lignes du second degré la deuxième, c'est-à-dire le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse ; la troisième, les courbes cubiques (représentant la troisième puissance) ; la quatrième, quadratoquadratiques, etc.

Un autre exemple connu est celui de Jacques Bernoulli, qui a lui aussi exprimé ses réserves quant à la classification cartésienne, préférant les rassembler degré par degré[26].

Notons enfin que l'*Application de l'algèbre à la géométrie* de Nicolas Guisnée[27] est un exemple de texte qui ne se présente pas comme une critique de la *Géométrie*, tant s'en faut, mais qui introduit et utilise une classification des lignes courbes par genres différente de celle de Descartes[28]. Chaque genre y rassemble en effet les lignes courbes définies par une équation d'un degré donné : « Lorsque l'une ou toutes les deux [inconnues], ou leur produit, a trois dimensions : comme $x^3 + axy = a^3$ [...], l'équation est du *troisième degré*, & la courbe dont elle exprime la nature, est du *second genre*, & ainsi de suite », le n-ième genre étant ainsi formé

[20] Florimond De Beaune, *In Geometriam Renati Des Cartes notæ breves*, in Descartes (1659/1661), *op. cit. in* n. 13, 119-161.

[21] Frans van Schooten, *Exercitationes mathematicarum* (Leiden : Johannis Elsevirii, 1657). Cet ouvrage fait aussi partie des livres de jeunesse de Newton.

[22] Philippe de Lahire, *Nouveaux elemens des sections coniques, les lieux géométriques, la construction, ou effection des équations* (Paris : André Pralard, 1679).

[23] Jacques Ozanam, *Traité des lignes du premier genre* (Paris : Estienne Michallet, 1687).

[24] Pour les résultats de ce paragraphe, j'ai analysé les textes cités dans Carl B. Boyer, *History of Analytic Geometry* (New York : Scripta Mathematica, 1956), notamment dans le chapitre dévolu aux commentateurs de Descartes et de Fermat.

[25] Cet extrait et celui cité plus bas sont issus de la traduction française de la lettre, donnée dans Pierre Fermat, *Œuvres de Pierre Fermat,* trad. par Paul Tannery, avec des comment. de Roshdi Rashed, Christian Houzel et Gilles Christol, t. 1, La théorie des nombres (Paris : Blanchard, 1999), 491-497 ; voir aussi Mahoney, *op. cit. in* n. 14, p. 141-142. La *Dissertation en trois parties* est reproduite dans Fermat, *op. cit. in* n. 14, p. 118-132. D'après Mahoney, *op. cit. in* n. 14, p. 130, elle aurait probablement été écrite au début des années 1640.

[26] Jacques Bernoulli, *Notae et animadversiones tumultuariae in universum opus*, in René Descartes, *Geometria*, trad. par Frans van Schooten, avec des comment. de Florimond De Beaune, Frans van Schooten, Jan Hudde, Hendrik van Heuraet, Jan de Witt et Jacques Bernoulli (Frankfurt am Main : Friderici Knochii, 1695), 423-468. À ce sujet, voir aussi les pages, 246-255 de Clara Silvia Roero, *Geometria algebrica. Introduzione*, in Jacques Bernoulli, *Die Werke von Jakob Bernoulli. Band 2: Elementarmathematik*, Clara Silvia Roero et Tullio Viola (éds.) (Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 1989), 237-260. Sur la critique de Descartes par Bernoulli, voir également aux pages 358-359 et 365 de Henk J. M. Bos, Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory; the ``Construction of Equations,'' 1637 – ca. 1750, *Archive for History of Exact Sciences* 30 (1984), 331-380.

[27] Nicolas Guisnée, *Application de l'algèbre à la géométrie* (Paris : Boudot et Quillau, 1705).

[28] Au sujet de ce traité de Guisnée, voir Jeanne Peiffer, Annotations marginales de Montesquieu à Nicolas Guisnée, *Application de l'algèbre à la géométrie*, in Rolando Minuti (éd.), *Œuvres complètes de Montesquieu*, t. 17. Extraits et notes de lecture II (Paris : ENS Éditions et Classiques Garnier, 2017), 107-184.

des courbes correspondant à une équation du $(n+1)$-ième degré (p. 19). Il est en outre intéressant de noter que pour Guisnée, « c'est le degré d'une équation indéterminée qui fait connoître que la courbe dont elle exprime la nature est plus ou moins simple » (p. 19), signifiant donc que les genres les plus bas correspondent aux lignes les plus simples.

1.2 Ordres et genres newtonniens

Comme écrit précédemment, la classification de Newton est exposée dans le paragraphe introductif de l'*Enumeratio*, où sont aussi distinguées les courbes des lignes. Ces dernières sont classées en ordres « d'après les dimensions de l'équation exprimant la relation entre abscisse et ordonnée, ou, ce qui revient au même, d'après le nombre de points en lesquels elles peuvent être coupées par une ligne droite[29]» : le n-ième ordre est ainsi formé des lignes définies par une équation du n-ième degré, ce qui correspond à celles ayant au plus n points d'intersection avec une droite. Les courbes, quant à elles, sont divisées en genres, le n-ième genre étant constitué de celles définies par une équation du degré $n+1$, de sorte que, par exemple, « une courbe du second genre est la même chose qu'une ligne du troisième ordre[30] ».

On retrouve ainsi la classification des courbes qui est été donnée par Guisnée[31], ainsi que celle des lignes par Fermat, quoique ce dernier utilisait plutôt les taxons d'espèces. Deux éléments démarquent toutefois nettement Newton de ces deux auteurs. Le premier est la caractérisation des lignes définies par une équation du n-ième degré à l'aide du nombre de leurs points d'intersection avec une droite quelconque. Si cette propriété, ou sa version plus générale selon laquelle deux lignes courbes correspondant respectivement à des équations des n-ième et m-ième degrés s'intersectent en nm points au plus, était par exemple implicitement utilisée par Descartes[32], elle se trouve écrite en toutes lettres et mise en pleine lumière dès la première phrase de l'*Enumeratio*[33]. Comme nous le verrons plus loin, cette propriété sera prise comme définition même de l'ordre d'une (ligne) courbe, notamment par des mathématiciens cherchant à éviter le recours aux équations entre coordonnées pour représenter les courbes.

L'autre nouveauté newtonnienne est l'emploi du mot « ordre », aucun des textes publiés entre la *Géométrie* et l'*Enumeratio* ne l'utilisant pour désigner des catégories de lignes courbes. Attardons-nous un peu sur ce point terminologique.

D'abord, il convient de remarquer que le vocabulaire des lignes et de leurs ordres est en fait utilisé surtout dans le titre et le paragraphe introductif de l'*Enumeratio* où sont définies les classifications. Le reste du texte, en revanche, est écrit en faisant presque exclusivement

---

[29] « Lineae Geometricae secundum numerum dimensionum aequationis qua relatio inter Ordinatas & Abscissas definitur, vel (quod perinde est) secundum numerum punctorum in quibus a linea recta secari possunt, optimè distinguuntur in Ordines ». Newton, *op. cit. in* n. 11, p. 139. Mes traductions sont basées sur la version anglaise de l'*Enumeratio* : Christopher R. M. Talbot, *Sir Isaac Newton's Enumeration of Lines of the Third Order* (London : Bohn, 1860).

[30] « Curva secundi generis eadem cum Linea Ordinis tertii. » Newton, *op. cit. in* n. 11, p. 139.

[31] Le livre de Guisnée est publié un an après l'*Enumeratio*, mais n'y fait pas référence. Réciproquement, Newton ne cite aucun ouvrage antérieur dans son texte.

[32] Voir Bos, *op. cit. in* n. 16, p. 360.

[33] La version plus générale du théorème (qui est une version faible de ce qu'on connaît aujourd'hui comme le théorème de Bezout) est donnée sans démonstration dans les *Principia Mathematica*, à travers plusieurs cas correspondants aux premiers degrés. Voir Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Londres : Joseph Streater, 1687), p. 106. Newton y affirmait par exemple qu'une section conique et une « courbe de la troisième puissance » peuvent se couper en six points.

référence aux courbes et aux genres : en l'occurrence, il s'agit de classifier les courbes du second genre en soixante-douze espèces[34]. Si la terminologie des ordres est donc très visible par sa présence dans le titre et les premières lignes du texte, c'est plutôt celle des genres qui apparaît de façon effective dans le corps de l'*Enumeratio*.

Ensuite, un examen de certains manuscrits de Newton concernant la géométrie, dont plusieurs versions antérieures de l'*Enumeratio*, montre une évolution remarquable du vocabulaire classificatoire des lignes courbes. Vers 1667/1668, ce qui allait être désigné comme les lignes du troisième ordre sont en effet encore surtout appelées « courbes de la troisième dimension », même si Newton écrit aussi que « les courbes diffèrent en genres, qui diffèrent en dimensions[35] ». De rares ordres surviennent, et désignent alors des catégories intermédiaires (non systématisées) entre genres et espèces[36].

La notion d'ordre, dans un sens qui se rapproche de celui exposé dans l'*Enumeratio*, apparaît dans deux manuscrits de la fin des années 1670. L'un d'eux est dévolu aux « erreurs dans la *Géométrie* de Descartes » ; on y trouve de nombreuses expressions comme « les courbes de l'ordre cubico-cubique[37]» — Derek Whiteside avait déjà relevé l'apparition particulière du mot « ordre » dans ce contexte de critique de la *Géométrie*[38]. Le deuxième manuscrit en question est un autre brouillon ancêtre de l'*Enumeratio*, où Newton, après avoir brièvement mentionné les « courbes de la troisième dimension », fait référence à ces dernières comme des « courbes du second ordre », des « courbes de l'ordre cubique », voire des « courbes cubiques[39] ».

Enfin, dans le manuscrit de l'*Enumeratio* de 1695 qui était destiné à l'imprimeur[40], Newton avait visiblement commencé par écrire tout son texte en ne parlant que de « courbes du second ordre », au sens de courbes définies par une équation du troisième degré, mais les occurrences du mot « ordre » avaient finalement été rayées et remplacées par « genre ». En outre, les ratures du titre et ce qui semble être l'insertion d'une feuille supplémentaire sur laquelle figure le premier paragraphe de la version imprimée (où est présentée la classification générale des lignes et des courbes) indiquent que ce premier paragraphe et la terminologie des lignes et des ordres ont été introduites en toute fin de procédé (voir la figure 2).

[34] Les espèces ne sont pas caractérisées par une définition claire ou donnée *a priori*. Le mot est plutôt utilisé pour désigner des types de courbes auxquels aboutit la discussion de Newton. Quatre espèces sont oubliées et seront mises en évidence par certains de ses lecteurs. Voir Guicciardini, *op. cit. in* n. 14, p. 109-136 et Walter William Rouse Ball, On Newton's Classification of Cubic Curves, *Proceedings of the London Mathematical Society* 22 (1891), 104-143.

[35] « Enumeratio curvarum trium dimensionum ». Voir Isaac Newton, *The Mathematical Papers of Isaac Newton. Volume II: 1667–1670,* Derek T. Whiteside (éd.) (Cambridge : Cambridge University Press, 1968), p. 10, 18, 36, et « Curvae genere differunt quae differunt dimensionibus », ibid., p. 96. Je me suis ici aidé des traductions anglaises de D. Whiteside données dans l'édition citée des *Mathematical Papers* de Newton.

[36] Newton, *op. cit. in* n. 35, p. 96.

[37] « [C]urvas ordinis cubo cubici », Isaac Newton, *The Mathematical Papers of Isaac Newton. Volume IV: 1674–1684,* Derek T. Whiteside (éd.) (Cambridge : Cambridge University Press, 1971), p. 342. Au sujet de ce texte, voir Massimo Galuzzi, I *marginalia* di Newton alla seconda edizione latina della *Geometria* di Descartes e i problemi ad essi collegati, in Guilia Belgioioso (éd.), *Descartes, il Metodo e i Saggi : atti del convegno per il 350o anniversario della pubblicazione del* Discours de la méthode *e degli* Essais (Firenze : Istituto della Enciclopedia italiana, 1990), 387-417.

[38] Newton, *op. cit. in* n. 37, p. 341.

[39] « Curvae secundi ordinis », « curvas ordinis cubici », « curvis cubicis », Newton, *op. cit. in* n. 37, p. 358, 360.

[40] Voir Isaac Newton, *The Mathematical Papers of Isaac Newton. Volume VII: 1691–1695,* Derek T. Whiteside (éd.) (Cambridge : Cambridge University Press, 1976), p. 588, ainsi que les manuscrits disponibles en ligne sur le site de la *Digital Library* de l'Université de Cambridge, https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03961/109.

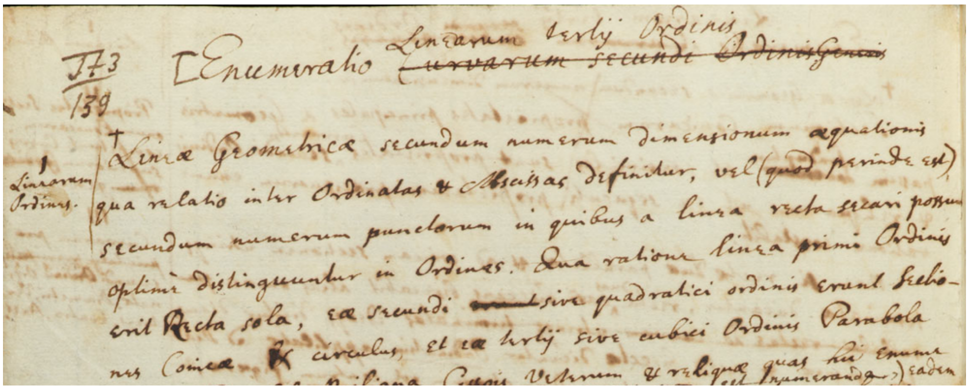

173
139
Enumeratio Linearum tertij Ordinis ~~Curvarum secundi Ordinis Generis~~
Linearum Ordines.
Lineæ Geometricæ secundum numerum dimensionum æquationis qua relatio inter Ordinatas & Abscissas definitur, vel (quod perinde est) secundum numerum punctorum in quibus a linea recta secari possunt optime distinguuntur in Ordines. Qua ratione linea primi Ordinis erit Recta sola, eæ secundi sive quadratici ordinis erunt Sectiones Conicæ & circulus, et eæ tertij sive cubici Ordinis Parabola

Figure 2 : Extrait du manuscrit de l'*Enumeratio*. Cette feuille semble avoir été ajoutée au dernier moment.

Cette évolution du vocabulaire classificatoire n'est pas commentée par Newton dans les manuscrits que j'ai parcourus, et je n'ai pas trouvé trace de ce sujet dans sa correspondance publiée[41], tant et si bien qu'il est difficile d'être catégorique à ce sujet. Si le début de l'utilisation de la notion d'ordre comme taxon de courbes semble bien corrélée à une certaine mise à distance de la *Géométrie* de Descartes, il est curieux que Newton ait finalement choisi de reprendre la terminologie des genres et de lui superposer celle des lignes et des ordres dans le titre et l'introduction.

Comme écrit précédemment, ce choix fait que l'*Enumeratio* consiste principalement en la subdivision d'un genre en différentes espèces : on retrouve ainsi la dyade usuelle des genres et espèces. À l'inverse, la notion d'ordre ne semble pas être communément reconnue comme catégorie de classement scientifique à cette époque, renvoyant plutôt à l'idée d'ordonnancement non nécessairement hiérarchisé. En effet, la première édition du dictionnaire de l'Académie française (1694) définit en premier lieu le genre comme « ce qui est commun à plusieurs espèces différentes, ce qui a sous soi plusieurs espèces différentes », en prenant pour exemple « le genre animal [sous lequel] il y a deux espèces comprises, celle de l'homme, celle de la bête ». L'ordre, au contraire, renvoie principalement à l'« arrangement, [la] disposition des choses mises en leur rang[42] », même si certaines utilisations renvoient aussi à des regroupements d'entités, comme les neuf ordres des anges, l'ordre des chevaliers ou l'ordre des Frères mineurs. Cet état de fait se voit aussi en histoire naturelle, puisque les classifications botanistes du XVII^e siècle sont principalement articulées en genres et espèces, dans leur sens relatif. Ce n'est justement qu'à la toute fin du siècle que ces catégories deviennent fixes chez certains auteurs, et que des « classes » commencent à être introduites dans les hiérarchies ; quant aux ordres, ils ne le seront qu'au cours des premières décennies du XVIII^e siècle, dans les travaux de Linné lui-même[43].

Des conclusions analogues peuvent être tirées des dictionnaires spécifiques aux mathématiques du tournant du XVIII^e siècle. Ainsi le *Dictionnaire mathématique* d'Ozanam[44] définit les genres des lignes courbes dans le sens de Descartes, alors que l'entrée correspondant à la notion d'ordre renvoie uniquement aux ordres architecturaux (ionique, corinthien...) et aux ordres de bataille.

[41] Isaac Newton, *The Correspondence of Isaac Newton (7 volumes),* Herbert W. Turnbul, Joseph F. Scott, Alfred Rupert Hall et Laura Tilling (éds.), (Cambridge : Cambridge University Press, 1959-1977).
[42] C'est bien dans ce sens qu'il faut comprendre la phrase de Descartes citée plus haut : « distinguer [les lignes courbes] par ordre en certains genres ».
[43] Alan G. Morton, *History of Botanical Sciences* (London, New York : Academic Press, 1981), ch. 6-7.
[44] Jacques Ozanam, *Dictionnaire mathématique, ou idée générale des mathématiques* (Amsterdam : Huguetan, 1691).

Il en va de même dans le *Mathematical Dictionary* de Joseph Raphson, qui s'inspire en fait de celui d'Ozanam et qui emploie d'ailleurs le mot anglais *genders* pour faire référence aux genres cartésiens de courbes[45]. Le *Vollständiges mathematisches Lexicon* de Christian Wolff renvoie lui aussi seulement aux ordres architecturaux ; mais si l'entrée *Genus curvarum algebraicum* attribue la paternité de la notion de genre (ou *Geschlecht*, pour l'équivalent allemand choisi) à Descartes, la définition qui y est proposée est celle qui rassemble les lignes (courbes) dans le n-ième genre celles correspondant à une équation du $(n+1)$-ième degré[46]. Ainsi, si des notions (mathématiques) d'ordre, au sens classificateur, pouvaient exister au XVIIe siècle[47], il semble qu'elles aient été suffisamment discrètes pour ne pas apparaître dans les dictionnaires mathématiques de l'époque.

Il est donc possible que cela explique, au moins en partie, le choix de Newton de finalement n'utiliser que partiellement la notion d'ordre dans l'*Enumeratio*. C'est néanmoins cette notion, et pas celle de genre, qui a été principalement reprise après Newton et est passée à la postérité.

1.3 Ordres, genres et degrés au XVIIIe siècle

La première moitié du XVIIIe siècle voit la double classification des lignes en ordres et des courbes en genres continuer d'apparaître dans plusieurs d'ouvrages mathématiques[48]. Par exemple, un mémoire de Christophe-Bernard Bragelongne est dévolu à un « Examen des lignes du quatrième ordre ou courbes du troisième genre[49] », tandis que Colin Maclaurin rappelle dans son *Treatise of Algebra*[50] que les lignes courbes se divisent en ordres selon les dimensions de leurs équations (ou le nombre de points d'intersections avec une ligne droite), et indique que « les lignes droites constituent le premier ordre des lignes » avant d'aborder le cas du « second ordre des lignes, et premier genre des courbes[51] ».

Cependant, il est frappant que presque toutes les références qui mentionnent effectivement les courbes et leurs genres ne font finalement intervenir ce vocabulaire que de manière superficielle, uniquement dans les titres (généraux ou de section) ou de manière très réduite dans les énoncés et démonstrations de résultats — il s'agit donc de la situation exactement opposée à celle de l'*Enumeratio* de Newton. Les genres, au sens de ce dernier (ou de Guisnée),

[45] Joseph Raphson, *A Mathematical Dictionary* (London : Nicholson, 1702).
[46] Christian Wolff, *Mathematisches Lexicon* (Leipzig : Gleditisch, 1716), p. 662, 988.
[47] Par exemple, dans son *Traité du triangle arithmétique* (vers 1654), Blaise Pascal reconnaît différents ordres de nombres figurés, dont le premier est formé de l'unité seule, le deuxième de tous les entiers naturels, le troisième des nombres triangulaires, etc. Il ne s'agit cependant pas de classification au sens strict du terme, puisque ces ordres ne sont pas disjoints : l'unité est commune à tous les ordres, le nombre 10 est à la fois dans le troisième et le quatrième ordre, etc. Voir Laurent Kyriacopoulos, Peut-on tout de même parler d'un « triangle de Pascal » ?, *Revue d'histoire des mathématiques* 6 (2000), 167-217.
[48] Dans cette section, je base mon étude sur l'ensemble des références citées dans Boyer, *op. cit. in* n. 24 et publiées entre le début du XVIIIe siècle et la fin des années 1820, moment où débutera notre prochaine section. Un certain nombre de ces textes ne font pas (ou presque pas) intervenir explicitement d'ordre ou de genre car, cantonnés aux cas des lignes définies par des équations des premier et deuxième degré, ils utilisent plutôt le vocabulaire des « droites » et des « sections coniques ». Remarquons en outre qu'une partie des travaux qui font intervenir les lignes d'ordres supérieurs sont des compléments ou des prolongements de l'*Enumeratio* de Newton.
[49] Christophe-Bernard Bragelongne, Examen des lignes du quatrième ordre ou courbes du troisième genre, *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France,* année 1730 (1732), 158-216, 363-434.
[50] Colin MacLaurin, *A Treatise of Algebra* (London : Millar & Nourse, 1748).
[51] « [Curve lines] are divided into *Orders* according to the Dimensions of their Equations, or Number of Points in which they can intersect a strait Line. The *strait Lines* themselves constitute the *first* Order of Lines. [...] Those Curves whose equations are of *two* Dimensions constitute the *second Order* of Lines, and the *first Kind* of *Curves*. » MacLaurin, *op. cit. in* n 50, p. 304-305. Remarquer l'équivalent *kind* choisi ici comme taxon anglais correspondant aux genres.

s'ils sont donc encore évoqués, n'apparaissent plus dans le cœur des textes et y laissent ainsi la place aux ordres.

Ce même phénomène s'observe dans l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de Gabriel Cramer[52], ouvrage célèbre du milieu du XVIII^e siècle[53]. Dans le préambule, Cramer rappelle en effet que « l'Algèbre seule fournit le moyen de distribuer les Courbes en Ordres, Classes, Genres & Espèces » et que « c'est à l'illustre Newton que la Géométrie est surtout redevable de cette distribution » (p. VIII). Plus loin, il définit l'ordre d'une ligne à partir du degré de son équation[54] et démontre que le choix d'une origine et d'axes de coordonnées n'influe pas sur cette définition, ce qui est pour lui « ce qu'il y a de plus important à remarquer sur cette distribution des Lignes algébriques par Ordres » (p. 53).

Il précise aussi, dans une note de bas de page (p. 53) :

> Mr. Newton distingue les *Ordres des Lignes* & les *Genres des Courbes*. Comme le premier Ordre ne renferme que la Ligne droite [...], il appelle Courbes du premier Genre, les Lignes du second Ordre, Courbes du second Genre, les Lignes du troisième Ordre, & ainsi de suite. Quelque répugnance qu'on ait à s'écarter des dénominations établies par ce Grand Homme, il m'a paru que cette distinction génoit trop l'expression, & je me suis déterminé à dire indifféremment, Courbes ou Lignes du second Ordre, Courbes ou Lignes du troisième Ordre, &c.

La différence entre courbes et lignes disparaît donc pour des raisons de commodité du langage, et avec elle s'efface la notion de genre telle que l'entendait Newton. Le mot lui-même survit cependant, devenant une sous-catégorie potentielle de chaque ordre susceptible d'être elle-même ramifiée en espèces : « C'est par les Branches infinies qu'on divise les Courbes de chaque Ordre en leurs Genres, & c'est par les Points singuliers qu'on subdivise en Espèces les Courbes de chaque Genre. » (p. XVI).

Les classes, au contraire, ne sont pas dotées d'une telle signification technique et générale dans le préambule. Elles apparaissent au cours de la division par Cramer des lignes du quatrième ordre, qui fait suite à celle des lignes du troisième ordre en quatorze genres. Imitant la démonstration opérée pour ces dernières, Cramer commence par dégager huit cas d'équations à discuter, dont les trois premiers donnent différents genres. Mais à l'issue des calculs relatifs au cas suivant, Cramer avoue qu'« [o]n ne saurait énumérer tous les genres des courbes comprises dans ce IV^e *Cas* : mais on peut les réduire à cinq *Classes* » (p. 379). Ces classes sont finalement encore regroupées en neuf « classes générales, dont la division est fondée sur le nombre & le caractère hyperbolique ou parabolique des branches infinies » (p. 395), c'est-à-dire sur des caractères qui ne reprennent que partiellement ceux qui définissaient les genres.

---

[52] Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève : Frères Cramer et Cl. Philibert, 1750).

[53] Au sujet de la composition et de la circulation de l'*Introduction* de Cramer, voir Thierry Joffredo, « Approches biographiques de l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de Gabriel Cramer », thèse de doct., Nancy : Université de Lorraine, 2017 ; Id., Une analyse génétique de l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de Gabriel Cramer, *Revue d'histoire des mathématiques* 25 (2019), 235-289.

[54] Cramer, comme Euler (cf. *infra*), énonce et démontre qu'une ligne du n-ième ordre est coupée en n points au plus par une droite quelconque, mais n'utilise pas ce résultat comme définition des ordres. Voir Cramer, *op. cit. in* n. 52, p. 62 ; Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum,* t. 2 (Lausanne : Marcum-Michaelem Bousquet, 1748), p. 33.

Sans rentrer davantage dans les détails, je me bornerai à remarquer que le choix de l'échelle classificatoire, incarné par l'introduction des classes, est ici induit par des considérations techniques propres à la situation traitée, et qui relèvent notamment de la sur-multiplication des genres.

Un même type de discussion peut être vu dans un autre ouvrage du milieu du siècle, au moins tout aussi célèbre que celui de Cramer : l'*Introductio in analysin infinitorum* de Leonhard Euler, et plus précisément son deuxième livre, qui se rapporte à la géométrie des lignes courbes et, dans une moindre mesure, des surfaces[55]. Euler définit lui aussi les ordres des lignes courbes d'après le degré des équations et remarque qu'ils ne dépendent pas du choix des axes, mais ne mentionne pas les genres au sens de Newton. Un mot est tout de même glissé sur la terminologie des courbes : « le premier ordre comprend la seule ligne droite, qui est la plus simple de toutes les lignes ; & comme par cette raison le nom de courbe ne convient pas au premier ordre, nous ne distinguerons pas les différents ordres par le nom de *lignes courbes*, mais simplement par le terme générique de *lignes* ; ainsi le premier ordre des lignes ne renferme aucune courbe, & comprend uniquement la ligne droite » (p. 26).

Les divisions des différents ordres de lignes sont alors faites en genres ou espèces, notamment pour les deuxième et troisième ordres. Pour les lignes du troisième ordre, Euler explique au préalable que leur classification en espèces est faite en regard de la nature et du nombre de branches infinies, et seize telles espèces sont dégagées. Mais il ajoute, à la fin de cette classification (p. 126) :

> La plupart de ces espèces sont si étendues qu'elles comprennent chacune des variétés assez considérables, si on a égard à la forme qu'elles présentent dans un espace fini. C'est pour cette raison que Newton a multiplié le nombre des espèces, afin de distinguer l'une de l'autre les courbes qui offrent des différences notables dans cet espace. Il sera donc plus à propos d'appeler *Genres* ce que nous avons désigné par *Espèces*, et de rapporter aux espèces les variétés qu'elles renferment.

Euler revient donc sur la terminologie même des espèces, et propose finalement de les renommer en genres en raison du nombre important de sous-collections qui peuvent y être distinguées en fonction de la forme des lignes, et qui deviennent alors des espèces[56].

À l'image de ce qu'on observe dans ces livres de Cramer et d'Euler, l'usage de n'employer que le vocabulaire des lignes et des ordres (et de réserver celui de genres à d'éventuelles sous-divisions) semble se généraliser au cours de la deuxième moitié du XVIII^e siècle. Mais deux autres mouvements terminologiques peuvent aussi être vus : d'une part, celui (déjà constaté) consistant à estomper la distinction entre lignes et courbes ; d'autre part, celui substituant le mot « degré » au mot « ordre ». Par exemple, dans un mémoire de 1731 (publié en 1764), Alexis Clairaut ne parle que de courbes, qu'il précise indifféremment comme étant « du 3^me degré » ou « du 3^me ordre[57] », tandis que dans un article publié quelques pages plus loin dans le même volume du même périodique, François Nicole parle plutôt des « lignes du 3^me ordre[58] ». Ces

---

[55] Euler, *op. cit. in* n. 54. Les traductions qui suivent sont celles de Leonhard Euler, *Introduction à l'analyse infinitésimale,* t. 2, trad. par Jean Baptiste Labey, (Paris : Barrois, 1797). Les pages données sont celles de l'original.

[56] Ce commentaire d'Euler rappelle que genres et espèces sont encore pensés comme des notions relatives.

[57] Alexis Clairaut, Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque, par un plan donné de position, *Histoire de l'Académie royale des sciences* année 1731 (1764), 483-493. Citations p. 489-490.

[58] François Nicole, Manière d'engendrer dans un corps solide toutes les lignes du troisième ordre, *Histoire de l'Académie royale des sciences* année 1731 (1764), 494-510. Citation p. 494.

mêmes tendances se poursuivent jusqu'au début du XIXe siècle : ainsi, alors que Jean-Baptiste Biot[59] parle aussi bien des « courbes du second ordre » que des « courbes du second degré », Joseph-Diez Gergonne[60] fait côtoyer les « lignes du second ordre » et les « courbes des degrés supérieurs », et Ferdinand Möbius se réfère aux lignes du n-ième ordre (« *Linien* n*ten Ordnung*[61] »). Notons enfin que la substitution inverse, consistant à différencier les équations en ordres plutôt qu'en degrés, est également observable, bien que plus rarement[62].

1.4 Des ordinaux

Le vocabulaire des lignes et des courbes, mais aussi des ordres et des degrés, s'entremêle donc dans les écrits des mathématiciens de cette période, signe probable de la banalisation de ces notions et du lien même entre équations et courbes : ces objets étant plus couramment et plus immédiatement mis en relation, les noms de leurs taxons respectifs tendent dans le même temps à être échangés entre eux.

Il est cependant une caractéristique très stable dans les textes observés, à savoir que « ordre », « genre » et « degré » désignent invariablement des catégories de courbes ou d'équations, et pas les nombres associés à ces objets (les dimensions des équations ou les nombres de points d'intersection des courbes avec des droites), même si les liens forts entre nombres et catégories sont bien entendu connus des mathématiciens.

On l'a vu dans toutes les citations données plus haut, où ordres, genres et degrés sont toujours qualifiés par des nombres ordinaux, et joints aux objets correspondants par des prépositions marquant l'appartenance, comme dans le groupe nominal « une ligne du troisième ordre ». D'autres indices vont dans le même sens : Cramer, par exemple, parle bien du « nombre qui marque l'ordre » d'une ligne (p. 62), et même une expression comme « une ligne de l'ordre n » (p. 76) fait bien référence à une acception ordinale des ordres, qui sont numérotés par les nombres n : à titre de comparaison, l'expression « une ligne d'ordre n » (qu'on trouvera seulement à partir du XIXe siècle) manifesterait plutôt une acception cardinale de l'ordre, qui serait ainsi *égal* à n.

Il en est de même pour les degrés (d'équations) : Silvestre-François Lacroix écrit qu'« il y a [...] *dans* tous les degrés, des équations qui n'expriment qu'un assemblage de lignes droites[63] », et Biot rappelle qu'« on classe les courbes algébriques d'après le degré de leur équation » et que « l'ordre de la courbe est marqué par l'exposant de ce degré[64] » : ni l'ordre, ni le degré ne sont des nombres, au contraire de l'exposant du degré.

De très nombreuses désignations utilisées dans diverses publications du XIXe siècle attesteront encore des racines ordinales des termes classificateurs d'ordre, classe, degré et genre, le

[59] Jean-Baptiste Biot, *Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré* (Paris : Duprat, 1802).
[60] Joseph-Diez Gergonne, Essai sur l'expression analitique des courbes, indépendamment de leur situation dans un plan, *Annales de Mathématiques pures et appliquées* 4 (1813/1814), 42-55.
[61] August Ferdinand Möbius, *Der barycentrische Calcul* (Leipzig : Barth, 1827). Citation p. 82.
[62] Cramer, *op. cit. in* n. 52, p. 54 ; Euler, *op. cit. in* n. 54, p. 24.
[63] Sylvestre François Lacroix, *Traité du calcul différentiel et intégral,* t. 1 (Paris : Duprat, 1797), p. 338. Mon soulignement.
[64] Biot, *op. cit. in* n. 59, p. 145.

glissement progressif des taxons vers les nombres qui les caractérisent se constatant à partir de la fin des années 1830.

2. Les classes et la dualité

Le sens des classes des courbes algébriques tel qu'il est connu au tournant du XX^e^ siècle se fixe au cours de la polémique qui a vu s'affronter Gergonne et Jean-Victor Poncelet (et dans laquelle Julius Plücker est aussi impliqué), autour de questions de priorité et de contenu mathématique relatives à la dualité projective. Si cet épisode a déjà été largement documenté en regard de diverses problématiques historiques[65], j'y reviens ici encore une fois en y insistant sur le cadre classificatoire dans lequel il s'inscrit et les questions terminologiques qu'il charrie.

2.1 Classer en classes

Pour Gergonne[66], il existe en géométrie projective[67] un principe de dualité, qui affirme que chaque théorème possède un théorème jumeau, obtenu à partir du premier par simple échange des mots « points » et « droites », ainsi que de certains verbes et adjectifs afférents : ainsi, un certain nombre de points situés sur une droite ont pour équivalents duaux un même nombre de droites concourant en un point ; de même, des points appartenant à une courbe correspondent à autant de droites tangentes à une autre courbe.

Gergonne affirmait en outre que deux courbes se correspondant de manière duale sont nécessairement du même ordre. Mis en conjonction avec la propriété précédemment énoncée et le fait qu'une courbe du n-ième ordre possède n points d'intersection avec une droite donnée, cela impliquait par exemple qu'il est possible de tirer, à partir d'un point donné du plan, n tangentes à une courbe de cet ordre. Or, de tels résultats avaient tout de suite été signalés comme inexacts par Poncelet[68].

De manière frappante, l'article de Gergonne visant à rectifier ces erreurs inscrit le problème dans un contexte classificatoire dès son commencement : « L'habitude que l'on a contractée, depuis

---

[65] Voir en particulier Mario H. Otero, Joseph-Diez Gergonne (1771-1859) : histoire et philosophie des sciences, *Sciences et techniques en perspective* 37 (1997) ; Jeremy Gray, *Worlds out of Nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century* (London : Springer, 2010) ; Jemma Lorenat, Polemics in Public: Poncelet, Gergonne, Plücker, and the Duality Controversy, *Science in Context* 28/4 (2015), 545-585 ; Frank Etwein, Jean-Daniel Voelke et Klaus Volkert, *Dualität als Archetypus mathematischen Denkens – Klassische Geoemtrie und* Polyedertheorie, avec des contributions de Jean-Pierre Friedelmeyer et Erhardt Scholz, (Göttingen : Cuvillier Verlag, 2019).

[66] Joseph-Diez Gergonne, Recherches sur quelques lois générales régissant les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres, *Annales de Mathématiques pures et appliquées* 17 (1826/1827), 214-252.

[67] La géométrie projective se caractérise essentiellement par la prise en compte d'objets géométriques situés « à l'infini », de sorte que, par exemple, deux droites parallèles s'intersectent en un point à l'infini.

[68] Jean-Victor Poncelet, Note sur divers articles du *Bulletin des sciences* de 1826 et de 1827, relatifs à la *Théorie des polaires réciproques*, à la *dualité* des propriétés de situation de l'étendue, etc. *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques* 8 (1827), 109-117, p. 117. Parmi les autres propriétés qui ressortissaient comme fausses était celle affirmant que deux courbes des n-ième et m-ième ordres possèdent nm tangentes communes, propriété duale du théorème de Bezout. Comme plusieurs passages le montrent (voir par exemple la citation donnée *infra*), Gergonne envisageait ces questions de comptage en incluant tant des objets réels qu'« idéaux ». Du point de vue des coordonnées (ce qui n'est pas l'approche de Gergonne), cela signifie que celles des objets peuvent être des nombres réels ou complexes.

Descartes, de représenter les lignes [...][69] courbes par des équations entre deux [...] variables, a conduit naturellement à les classer d'après le *degré* plus ou moins élevé de ces équations que l'on a dit aussi être celui de ces lignes[70] ». Gergonne poursuit en rappelant que cette classification est néanmoins incompatible avec la géométrie de situation, dans laquelle ni axes ni coordonnées ne peuvent être employés, et, par conséquent, que « le mot *degré*, pris dans son sens qu'on y attache habituellement, y est un mot tout-à-fait vide de sens » (p. 150). Il ajoute cependant qu'un autre « mode de classification qui a un rapport très-intime avec celui-là » (p. 150) consiste à distribuer les courbes selon le nombre de points d'intersection qu'elles sont susceptibles de présenter avec une droite donnée.

Ayant ainsi débarrassé le fondement de la classification usuelle des courbes de toute considération relative aux coordonnées, Gergonne peut alors lui appliquer le principe de dualité, obtenant une nouvelle classification consistant à rassembler les courbes en fonction du nombre de tangentes passant par un point donné qu'elles peuvent avoir.

L'introduction de cette nouvelle classification est immédiatement suivie d'une réflexion sur la terminologie[71] :

> Nous aurions présentement besoin de deux mots, l'un pour exprimer qu'une courbe est telle qu'une droite la coupe en m points [...], et l'autre pour exprimer qu'une courbe est telle qu'on peut lui mener m tangentes par un même point du plan [...] ; mais, pour ne pas introduire ici des mots nouveaux pour lesquels la répugnance du public, bien qu'assez peu fondée peut-être, est néanmoins presque invincible, nous adopterons le mot *degré* pour le premier cas, et le mot *classe* pour le second, c'est-à-dire que nous introduirons les définitions suivantes :
>
> *Définition I.* Une courbe plane est dite du $m^{\text{ième}}$ degré, lorsqu'elle a avec une même droite m intersections réelles ou idéales.
>
> *Définition I.* Une courbe plane est dite de $m^{\text{ième}}$ classe, lorsqu'on peut lui mener d'un même point m tangentes réelles ou idéales.

Les mots « degré » et « classe » sont donc choisis car ils sont censés ne pas être exotiques aux yeux des lecteurs de Gergonne et, si le premier garde la définition qu'on lui connaissait déjà, le second se voit affecté d'une signification nouvelle. Quand bien même ses occurrences originelles chez Gergonne n'étaient pas toutes fautives, le mot « ordre » est quant à lui complètement évacué, probablement parce que son emploi à mauvais escient cristallisait les critiques.

Cette révision de la dualité ne met toutefois pas son auteur à l'abri d'une nouvelle salve de blâmes par Poncelet, qui lui reproche de « torturer le sens des mots, en admettant simultanément deux classifications essentiellement distinctes pour ces courbes [...], chose jusqu'alors inusitée en mathématiques, et qu'on ne saurait justifier sous aucun prétexte[72] ». Comparant avec sa propre approche, il souligne en outre que lui-même n'a « pas reculé devant la difficulté de conserver [à la classification] des courbes [sa] définition légitime et universellement [admise] » (p. 302).

[69] Dans cet article correctif, Gergonne parle tout aussi bien des courbes que des surfaces, qu'il avait incluses dans sa présentation de la dualité. J'ai ôté ici et dans la suite tout ce qui se rapporte à ces dernières.
[70] Joseph-Diez Gergonne, Rectification de quelques théorèmes énoncés dans les *Annales*, *Annales de Mathématiques pures et appliquées* 18 (1827/1828), 149-154. Citation p. 149-150.
[71] Gergonne, *op. cit. in* n. 70, p. 151.
[72] Jean-Victor Poncelet, Sur la dualité de situation et sur la théorie des polaires réciproques, 2e article en réponse aux observations de M. Gergonne, mentionnées pag. 23, cahier de janvier du présent *Bulletin des Sciences*, et insérées dans le tome XVIII des *Annales de Mathématiques*, p. 125 et suiv., *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques* 9 (1828), 292-302. Citation p. 300.

S'ils sont polarisés différemment, ces commentaires n'entrent pas moins en écho avec ceux de Gergonne cités plus haut : les deux portent sur les aspects de classification et de dénomination, et montrent les liens entre l'intelligibilité d'un discours mathématique et l'introduction de mots nouveaux ou le recyclage de termes existants[73].

La réaction de Poncelet montre par ailleurs à quel point la proposition d'une nouvelle classification des courbes, concurrente à celle organisée en ordres, pouvait ne pas aller de soi[74]. En particulier, il faut souligner que la distribution par classes proposée par Gergonne a effectivement ceci d'original d'être pensée et présentée comme une alternative à celle par ordres (ou par degrés), opérant *a priori* au même niveau que celle-ci. Il ne s'agit pas pour lui de proposer une subdivision des ordres, comme c'était par exemple le cas pour les genres, classes et espèces de Cramer et d'Euler, ni de rappeler la distinction des lignes et courbes à l'aide de deux mots classificatoires différents : l'objectif est bien de présenter une autre manière de concevoir la division de l'ensemble de toutes les courbes algébriques, reflétant et donnant corps au principe de dualité que Gergonne cherche à défendre.

Cette mise en parallèle masque néanmoins la question d'articuler de manière effective les deux classifications : comme Poncelet ne manque de le faire remarquer[75], Gergonne ne mentionne pas le problème de savoir déterminer la classe d'une courbe connaissant son ordre, c'est-à-dire d'évaluer le nombre de ses tangentes passant par un point arbitraire. Ce problème, qui avait justement été abordé par Poncelet une dizaine d'années auparavant sans qu'une réponse claire y soit apportée[76], est ainsi remis sur le devant de la scène puis intégré dans des articles publiés autour de 1830 qui réexposent la théorie de la dualité et les critiques contre Gergonne[77]. Quelques améliorations sont apportées à sa solution, mais c'est Plücker qui règlera la question de manière plus satisfaisante quelques années plus tard.

2.2 Autour de Julius Plücker

Plücker, qui est malgré lui le troisième participant à la polémique de la dualité, adopte rapidement les classes (et les degrés) de Gergonne, déjà dans un article publié en 1828 dans les *Annales* de ce dernier[78]. Si le lieu de publication pourrait laisser planer le doute sur sa réelle intention d'utiliser les doubles-colonnes et les classifications de Gergonne[79], plusieurs publications postérieures montrent que Plücker a bel et bien endossé ces points de vue, à quelques modulations près.

---

[73] À ce sujet, voir aussi Lorenat, *op. cit. in* n. 65, p. 563, 579.

[74] Il est bien sûr délicat de déceler le point de vue strictement scientifique de Poncelet derrière le glacis polémique et d'estimer dans quelle mesure son opinion est représentative de celle de ses contemporains. Mais le fait même que Poncelet attaque son opposant sur ce point met en évidence que la question n'est pas triviale pour eux.

[75] Jean-Victor Poncelet, Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et des surfaces géométriques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 8 (1832), 21-41, 117-137, 213-252, 370-410. Citation p. 389.

[76] Jean-Victor Poncelet, Solution du dernier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 36 de ce volume ; Suivie d'une théorie des *pôlaires réciproques*, et de réflexions sur l'élimination, *Annales de Mathématiques pures et appliquées* 8 (1817/1818), 201-232.

[77] Jean-Victor Poncelet, Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 4 (1829), 1-71 ; Poncelet, *op. cit. in* n. 75.

[78] Julius Plücker, Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés, *Annales de Mathématiques pures et appliquées* 19 (1828-1829), 97-106.

[79] Rappelons que le profond remaniement opéré par Gergonne sur un manuscrit que Plücker lui avait envoyé est une des étincelles ayant mis le feu aux poudres de la polémique. Voir Lorenat, *op. cit. in* n. 65. Au sujet de Plücker, voir Mechthild Plump, « Julius Plücker — Leben und Werk eines analytischen Geometers im 19. Jahrhundert », thèse de doct., Bergischen Universität Wuppertal, 2014.

Par exemple, dans un article du *Journal für die reine und angewandte Mathematik* de 1830 où il présente un nouveau système de coordonnées (dites « tangentielles ») décrivant non pas les points mais les droites du plan, Plücker explicite son adoption des classes et en profite pour revenir sur la distinction entre ordres et degrés :

> J'emploie ici le mot *classe* en suivant M. Gergonne, qui donne le nom de courbe de la $m^{\text{ième}}$ *classe* à une courbe à laquelle on peut en général tirer m tangentes à partir d'un point donné, de même qu'on appelle courbe du $m^{\text{ième}}$ *ordre*, une courbe coupée en m points par une droite. (Il me semble plus approprié d'utiliser ici le mot *ordre* à la place du mot *degré*, puisque qu'une courbe de la $m^{\text{ième}}$ classe est aussi représentée par une équation du $m^{\text{ième}}$ degré[80].)

Alors que les ordres et les classes sont affectés aux courbes, les degrés sont donc réservés aux équations. Cette redistribution partielle des termes classificateurs est significative et montre à la fois l'importance et l'ambivalence des équations dans l'approche de Plücker : le degré d'une équation indique l'ordre de la courbe décrite lorsque les inconnues sont vues comme des coordonnées ponctuelles, alors qu'il s'agit de la classe quand les inconnues sont des coordonnées tangentielles.

Plücker fait voir dans d'autres publications que son acceptation des classes de Gergonne ne se limite pas à la seule terminologie renvoyant au nombre de tangentes, mais comprend plus largement le contexte classificatoire dans lequel elles avaient été introduites : « Cette nouvelle classification des courbes me parait très importante ; en l'adoptant je me plais de reconnaitre que la méprise même d'un homme d'esprit porte ses fruits », écrit-il dans l'article où il élucide le lien précis entre la classe et l'ordre d'une courbe[81] — plus précisément, il s'agit du lien entre la classe et le degré, le mot « ordre » n'étant curieusement jamais utilisé dans cet article, ce qui renvoie plus strictement aux choix de Gergonne. Le résultat, qui affine ce que Poncelet avait annoncé plus tôt, est qu'une courbe du m-ième degré a en général $m(m-1)$ tangentes passant par un point donné du plan, et que ce nombre diminue de $2N+3M$ si la courbe possède Npoints doubles et M points de rebroussement. Autrement dit, Plücker montre qu'une courbe du m-ième degré est de la $(m(m-1)-2N-3M)$-ième classe.

Dans une publication suivante[82], trois autres formules analogues rejoignent celle exprimant la classe, donnant ce qui sera appelé plus tard les quatre formules de Plücker. La terminologie est encore celle des degrés et des classes (sans ordres), mais un autre phénomène intéressant est à remarquer, puisqu'on peut voir le degré et la classe d'une courbe désigner clairement des nombres, et pas des catégories de courbes (p. 11) :

---

[80] « Ich gebrauche hier das Wort *Classe* nach Hrn. Gergonne, der einer Curve, an die sich im Allgemeinen von einem gegebenen Puncte aus mTangenten legen lassen, den Namen einer Curve $m$ter *Classe* giebt, dem analog, wie man einer Curve, die von einer geraden Linie in m Puncten geschnitten wird, eine Curve $m$ter *Ordnung* nennt. (Mir scheint es passender, hier das Wort *Ordnung* statt des Wortes *Grad* zu gebrauchen, weil auch eine Curve $m$ter Classe durch eine Gleichung $m$ten Grades dargestellt wird.) » Julius Plücker, Über eine neue Art, in der analytischen Geometrie Puncte und Curven durch Gleichungen darzustellen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 6 (1830), 107-146. Citation p. 109.

[81] Julius Plücker, Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 12 (1834), 105-108. Citation p. 105.

[82] Julius Plücker, Note sur les points singuliers des courbes, *Journal de Mathématiques pures et appliquées* 2 (1837), 11-15.

> Une courbe quelconque étant proposée, je désignerai 1° Par n son degré, ou le nombre de ses points d'intersection avec une ligne droite ; 2° Par m sa classe (mot introduit par M. Gergonne) ou le nombre de ses tangentes, passant par un même point [...].

Ce glissement de sens entre taxon et nombre peut aussi se voir dans le grand livre *Theorie der algebraischen Curven*[83], quoique de façon plus discrète : la grande majorité des mots classificatoires (ordre et classe pour les courbes, degré pour les équations) apparaissent comme des catégories, auxquelles se substituent parfois des interprétations directes en nombres. Par exemple, dans le passage relatif aux formules de Plücker, celui-ci parle d'une « courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre » et, au moment de récapituler ses résultats, indique que « n désigne l'ordre d'une courbe donnée [...] ou le nombre de points en lesquels [elle] est coupée par une droite[84] ».

2.3 La classe dans trois ouvrages

Parmi les autres travaux où l'on voit la classification par classes adoptée et attribuée à Gergonne[85], relevons le *Systematische Entwicklung der abhängigkeit geometrische Gestalten von einander* de Jacob Steiner[86] : cet exemple montre que cette classification a bien été reprise, dès le début des années 1830, par des mathématiciens n'ayant pas les mêmes prédilections géométriques que Plücker[87].

Deux décennies plus tard, si les classes semblent être devenues monnaie courante dans les livres avancés de géométrie, le nom de Gergonne n'apparaît plus systématiquement à côté de leur définition. Par exemple, dans un chapitre de son *Traité de géométrie supérieure* de 1852 où sont présentées les coordonnées tangentielles, Michel Chasles rappelle :

> On distingue les courbes ainsi représentées par une équation entre les coordonnées de leurs tangentes, par le degré de cette équation, et l'on appelle courbe de seconde ou troisième, etc. *classe* les courbes dont l'équation est du second, ou troisième, etc., degré.
>
> On peut dire aussi que la *classe* d'une courbe indique le nombre de tangentes, réelles ou imaginaires, qu'on peut lui mener par un point[88].

L'utilisation des adjectifs ordinaux « seconde » et « troisième », ainsi que celle du verbe « indique » (et pas « est égal à ») font bien référence aux classes en tant que taxons. Il en est

---

[83] Julius Plücker, *Theorie der algebraischen Curven* (Bonn : Adolph Marcus, 1839).

[84] « [E]ine Curve n. Ordnung » et, plus loin : « Es bezeichne n die Ordnung einer gegebenen Curve [...] oder die Anzahl der Puncte, in welchen die gegebene Curve von einer gegebenen geraden Linie geschnitten wird ». Plücker, *op. cit. in* n. 83, p. 210.

[85] Les résultats de cette section se basent sur une étude de l'ensemble des livres donnés dans les bibliographies générales des chapitres de l'*Encyklopädie* cités en introduction. Pour des raisons de place, seuls trois exemples sont brièvement décrits ici, qui me semblent représentatifs du corpus consulté.

[86] Jacob Steiner, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (Berlin : Fincke, 1832). Voir p. 149.

[87] L'opposition mainte fois décrite entre le géomètre analyste Plücker et le géomètre pur Steiner est prise comme objet d'étude dans Jemma Lorenat, Synthetic and Analytic Geometries in the Publications of Jakob Steiner and Julius Plücker (1827-1829), *Archive for History of Exact Sciences* 70/4 (2016), 413-462. Au sujet du livre de Steiner, voir Viktor Blåsjö, Jakob Steiner's *Systematische Entwicklung*: The Culmination of Classical Geometry, *The Mathematical Intelligencer* 31/1 (2009), 21-29.

[88] Michel Chasles, *Traité de géométrie supérieure* (Paris : Bachelier, 1852). Citation p. 356.

d'ailleurs de même dans le chapitre consacré aux équations ponctuelles : les expressions qui y sont employées (« une équation du degré m », « une courbe du degré ou de l'ordre m ») renvoient encore à des acceptions ordinales du nombre m, même si la disparition des suffixes « -ième » tend à rapprocher le taxon du nombre qui le caractérise et le numérote. Il ne s'agit toutefois pas encore d'un glissement de sens complet vers le nombre lui-même, comme une expression « une courbe d'ordre m » le refléterait.

Une telle évolution peut être observée dans l'influent *Treatise on the Higher Plane Curves* de George Salmon, dans sa première édition de 1852[89], où la double classification par ordres et classes est d'ailleurs mise en exergue de manière bien plus spectaculaire. À peine passées l'introduction et la table des matières, le livre s'ouvre en effet sur des explications quant au fait qu'« il existe deux points de vue, aussi naturels l'un que l'autre, à partir desquels les courbes peuvent être considérées et selon lesquelles elles peuvent être classifiées[90] », consistant à les appréhender comme lieux d'un point mobile ou comme enveloppes d'une droite mobile. À ces deux conceptions sont associés deux types de classement, présentés comme universellement acceptés par les mathématiciens de l'époque :

> Ces deux principes de classification ont été adoptés par les géomètres modernes. Une courbe est dite du $n^{\text{ième}}$ *degré* ou *ordre* quand toute droite la rencontre en n points ; et de la $n^{\text{ième}}$ *classe* quand n tangentes peuvent lui être menées à partir d'un point quelconque donné[91].

Les lignes qui suivent précisent ensuite le lien entre ordres, classes et degrés des équations définissant les courbes, suivant qu'elles lient des coordonnées ponctuelles ou tangentielles.

La plupart des expressions employées dans livre sont des désignations ordinales, auxquelles s'ajoutent quelques-unes qui renvoient à une acceptation cardinale des ordres, degrés ou classes : par exemple, Salmon énonce le résultat de Plücker sur la classe d'une courbe n'ayant comme singularités que des points doubles ordinaires de la manière suivante : « le degré de la réciproque [duale] d'une courbe du $n^{\text{ième}}$ degré avec δ points doubles est $n(n-1)-2\delta$ »[92]. Ce dernier nombre est donc bien égal au degré, et ne se contente pas de le numéroter. Plus loin, Salmon démontre que « le nombre de normales pouvant être menées d'un point donné est égal à la somme des degrés de la courbe et de sa réciproque[93]. » Il s'agit donc d'additionner des degrés pour obtenir un certain nombre, ce qui montre encore une fois que les degrés sont bien considérés comme des nombres.

---

89 George Salmon, *A Treatise on the Higher Plane Curves*, 1re éd. (Dublin : Hodges et Smith, 1852).

90 « There are two points of view, both equally natural, from which curves may be considered, and according to which they may be classified. » Salmon, *op. cit. in* n. 89, p. 1.

91 « Both these principles of classification have been adopted by modern geometers. A curve is said to be of the n^{th} *degree* or *order* when any right line meets it in n points; and of the n^{th} *class* when n tangents can be drawn to it through any assumed point. » Salmon, *op. cit. in* n. 89, p. 1.

92 « [T]he degree of the reciprocal of a curve of the n^{th} degree having δ double points is $n(n-1)-2\delta$. » Salmon, *op. cit. in* n. 89, p. 63.

93 « [T]he number of normals which can be drawn to the curve from a given point is equal to the sum of the degrees of the curve and its reciprocal. » Salmon, *op. cit. in* n. 89, p. 110.

2.4 Hiérarchiser ordres et classes

Un autre aspect relatif aux classifications des courbes ressort du traité de Salmon, une fois passées les premières pages : contrairement à la présentation initiale de Gergonne mettant sur un même niveau (dual) celles par ordres et par classes, et qui est reprise dans les premières lignes du traité, c'est tout de même la notion d'ordre qui continue de régir en première instance la conception des courbes, au détriment des classes.

La structuration même du livre témoigne de cela, puisque ce sont uniquement les ordres que l'on voit apparaître comme objets de certains chapitres : après un premier chapitre sur les coordonnées, les trois suivants concernent respectivement les « propriétés générales des courbes du n-ième ordre, les courbes du troisième degré et celles du quatrième degré, tandis que les chapitres restants renvoient successivement aux courbes transcendantes, aux « méthodes générales » et à l'application du calcul intégral : les classes n'interviennent pas dans l'organisation générale du savoir sur les courbes.

Cette hiérarchie est également visible à un niveau plus fin d'observation, puisque les courbes des troisième et quatrième ordres sont chacune classifiées à l'aide des classes. Pour les premières, par exemple :

> La division la plus importante des courbes du troisième degré est faite en référence à la classe de la courbe. Nous avons vu [...] que si la courbe n'a pas de point multiple, elle sera de la sixième classe et [...] que la courbe peut avoir un point double, mais pas davantage. Les cubiques — pour éviter l'agaçante répétition de la périphrase « courbe du troisième degré », j'ai pris la liberté d'étendre l'utilisation du terme « cubique », appliqué en algèbre pour les équations du troisième degré — peuvent ainsi être sous-divisées en (A) des courbes de la sixième classe ; (B) des courbes de la quatrième classe, (a) avec un point nœud, (b) avec un point conjugué ; et (C) des courbes avec un point de rebroussement de première espèce, qui doivent être de la troisième classe[94].

La sous-classification consiste ainsi à répartir les courbes du troisième ordre en trois classes (les troisième, quatrième et sixième), déterminées par les points singuliers qu'elles sont susceptibles de présenter. En particulier, cela montre bien que toutes les classes n'apparaissent pas au sein d'un ordre donné, les possibilités étant fixées par la formule de Plücker. Ce même phénomène implique d'ailleurs que les différents ordres ne sont pas divisés en un même nombre de classes : alors que le troisième ordre est constitué de trois classes, le quatrième en compte dix (voir la p. 195 du livre et la figure 3, *infra*).

Pour finir, on notera encore que cette classification des courbes du troisième ordre est celle qui est présentée par Salmon comme la plus importante, tandis que celle basée sur la considération des branches infinies (qui se rapproche de la classification de Newton) est reléguée à un rang de moindre intérêt car, le nombre de branches infinies étant « perdu par projection, [elle] ne

---

[94] « The most important division of curves of the third degree is made with reference to the class of the curve. We have seen (Art. 70) that if a curve have no multiple point, it will be of the sixth class, and (Art. 34) that the curve may have one double point, but no more. Cubics—to escape the irksome repetition of the periphrasis,
"curve of the third degree," I have taken the liberty to extend the use of the term "cubic," applied in algebra to equations of the third degree—may then be subdivided into (A) curves of the sixth class; (B) curves of the fourth class, (a) having a node, (b) having a conjugate points ; and (C) curves having a cusp, which must be of the third class. » La phrase sur le terme « cubique », mis ici en incise, est en note de bas de page dans le livre de Salmon. Salmon, *op. cit. in* n. 89, p. 131.

peut être considérée comme fondée sur des différences essentielles des courbes[95]. » On retrouve donc un commentaire sur la stabilité des notions classificatrices, comme on avait pu en voir pour les ordres ; il ne s'agit toutefois plus ici d'indépendance par rapport au choix des axes de coordonnées mais d'invariance vis-à-vis d'un type de transformations particulières, les projections, dont l'importance pour Salmon influe donc directement sur l'évaluation de ce qu'est une bonne classification des courbes.

Ces mêmes éléments se retrouvent encore lors de discussions qui entourent l'introduction d'une nouvelle notion de genre.

3. De nouveaux genres

3.1 Fonctions abéliennes et courbes algébriques

Cette nouvelle notion, qui est celle qui apparaît dans l'organisation géométrique de la fin du xixe siècle, est définie dans deux articles de 1865 d'Alfred Clebsch, publiés au sein d'un même volume du *Journal für die reine und angewandte Mathematik*[96]. La classification par genres est fondée sur les valeurs d'un certain nombre entier p, qui jouait déjà un rôle de grande importance dans un mémoire antérieur de Clebsch[97], consacré à l'application des fonctions abéliennes à la géométrie[98]. Plus précisément, il s'agissait d'un des principaux fruits du processus de relecture des travaux de Bernhard Riemann sur les fonctions abéliennes publiés quelques années auparavant, dans lesquels le nombre p était aussi présent, bien que sous un apparat différent[99].

Ce mémoire de 1864 de Clebsch consistait à saisir objets et techniques issues de la géométrie projective pour réécrire (et mieux comprendre) les idées de Riemann, puis à utiliser les nouveaux théorèmes obtenus pour démontrer divers résultats sur les courbes algébriques. Un des points cruciaux était que pour chaque courbe algébrique du n-ième ordre, le nombre p associé peut se calculer par la formule

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d,$$

[95] « We might, however, have classified curves of the third [...] degree with reference to the number of their infinite branches; a distinction, however, which, being lost in projection, cannot be considered as founded on essential differences of the curves. » Salmon, *op. cit. in* n. 89, p. 131.

[96] Alfred Clebsch, Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 64 (1865), 43-65; Id., Ueber die Singularitäten algebraischer Curven, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 64 (1865), 98-100.

[97] Alfred Clebsch, Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 63 (1864), 189-243.

[98] Les fonctions abéliennes sont des fonctions particulières de la variable complexe. Les plus simples d'entre elles sont les fonctions rationnelles, qui peuvent s'exprimer comme sommes, différences, produits et quotients de la variable. Un autre type de fonctions abéliennes sont les fonctions dites elliptiques.

[99] Bernhard Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 54 (1857), 115-155. Les modalités techniques de la relecture par Clebsch des travaux de Riemann sont étudiées dans François Lê, « Are the *genre* and the *Geschlecht* one and the same number? » An inquiry into Alfred Clebsch's *Geschlecht*, *Historia Mathematica* 53 (2020), 71-107.

où d est le nombre de points doubles de la courbes — pour démontrer cette formule, Clebsch avait d'ailleurs utilisé l'estimation de Plücker donnant le nombre de tangentes à une courbe passant par un point donné[100].

Le premier article de 1865 où Clebsch présente la classification en genres — en *Geschlechter*, pour reprendre le terme allemand d'origine — s'ouvre sur des rappels sur le lien entre fonctions abéliennes et courbes algébriques, incarné en particulier par le nombre p, avant que la classification ne soit explicitée :

> Au lieu de classer les courbes algébriques en ordres et d'y faire des sous-divisions en fonction des nombres de points doubles et de rebroussement qu'elles présentent, on peut les classer en *genres* d'après le nombre p ; au premier genre appartiennent donc celles pour lesquelles $p = 0$, au deuxième genre celles pour lesquelles $p = 1$, etc. Ainsi, les différents ordres apparaissent réciproquement comme des sous-divisions des genres, et chaque ordre apparaît dans tous les genres jusqu'à $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, où se trouve la courbe la plus générale (c'est-à-dire sans point double et sans point de rebroussement) du n-ième ordre[101].

Clebsch explique ensuite qu'il est aussi possible définir les courbes d'un même genre comme étant celles pouvant être paramétrées par le même type de fonctions abéliennes[102] : par exemple, les courbes du premier genre, c'est-à-dire pour lesquelles $p = 0$, sont les courbes qui sont paramétrables par des fonctions rationnelles, tandis que celles du deuxième genre le sont par les fonctions elliptiques.

Il est intéressant de remarquer que Clebsch présente cette nouvelle classification par genres non pas comme un raffinement de celle par ordres, mais bien comme une alternative à cette dernière. En outre, contrairement au cas de l'introduction des classes par Gergonne, qui étaient mises *a priori* au même niveau que les ordres, il y a ici une volonté de renverser la classification usuelle, comme le montre l'indication de la sous-distribution des ordres dans chaque genre. Incarnation directe de cette nouvelle manière de penser l'organisation des courbes, l'article où celle-ci est introduite est dévolu à l'étude des courbes du premier genre (d'ordre indifférent) ; un autre article, publié quelques pages plus loin dans le même volume du journal de Crelle, s'attache quant à lui à comprendre les courbes du deuxième genre[103].

---

[100] Les courbes considérées par Clebsch dans le mémoire de 1864 étaient supposées être sans point de rebroussement. Le cas où r tels points existent est traité dans Alfred Clebsch et Paul Gordan, *Theorie der Abelschen Functionen* (Leipzig : Teubner, 1866), la formule devenant $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$.

[101] « Statt die algebraischen Curven nach Ordnungen einzutheilen, und in diesen Unterabtheilungen zu machen nach der Anzahl der Doppel- und Rückkehrpunkte, welche dieselben aufweisen, kann man dieselben in *Geschlechter* eintheilen nach der Zahl p ; zu dem ersten Geschlecht also alle diejenigen für welche $p = 0$, zum zweiten diejenigen, für welche $p = 1$, u.s.w. Dann erscheinen umgekehrt die verschiedenen Ordnungen als Unterabtheilungen in den Geschlechtern ; und zwar kommt jede Ordnung in allen Geschlechtern vor bis zu $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, wo dann die allgemeinste, d.h. von Doppel- und Rückkehrpunkten völlig freie Curve $n$ter Ordnung ihre Stelle findet. » Clebsch, Ueber diejenigen ebenen Curven..., *op. cit. in* n. 96, p. 43.

[102] Dire qu'une courbe peut être paramétrée par des fonctions signifie que les coordonnées de ses points peuvent être décrites comme des fonctions d'une variable auxiliaire. Par exemple, le cercle $x^2 + y^2 = 1$ est paramétré par la formule $(x, y) = (cos\,\theta, sin\,\theta)$.

[103] Alfred Clebsch, Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 64 (1865), 210-270.

Si les paramétrages des courbes par les fonctions abéliennes forment ainsi une facette majeure de l'introduction des genres, c'est l'invariance du nombre p qui est davantage mise en lumière dans l'autre article où la classification en genres est définie[104] :

> D'après les principes donnés [dans mon mémoire de 1864], on peut classifier les courbes en *genres* d'après la classe de fonctions abéliennes auxquelles elles mènent, ou d'après la valeur correspondante du nombre p. Si de la courbe donnée se déduit une autre courbe, de sorte qu'à chaque point ou chaque tangente de l'une corresponde en général seulement un unique point ou une unique tangente de l'autre, *les deux courbes mènent aux mêmes fonctions abéliennes*, appartiennent donc au même *genre*, et possèdent le même p.

Les transformations en jeu sont ce que Clebsch appelle ailleurs des « transformations univoques » (*eindeutige Transformationen*), qui seront appelées plus tard des transformations birationnelles[105].

Comme l'attestent à la fois leurs numérotations ordinales (décalées par rapport aux nombres p) et le vocabulaire de l'appartenance des courbes qui les constituent, les genres sont bien présentés ici comme des catégories de courbes, et pas comme des nombres. Un ajustement sera toutefois rapidement opéré, de sorte que le mot « genre » désignera le nombre p lui-même : par exemple, dans une note où Clebsch cherche à étendre la notion de genre aux surfaces algébriques, il rappelle :

> J'ai proposé de nommer *genre* d'une courbe le nombre $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$ (*deficiency* de M. Cayley[106]), n étant l'ordre de la courbe, d le nombre de ses points doubles ou de rebroussement[107].

Le genre change donc de statut ontologique, mais de nombreuses formulations rappelleront encore en filigrane son acception originelle. Outre les exemples que nous verrons plus bas, la suite de la citation donnée à l'instant en est un témoin direct, puisqu'il y est question de courbes « du même genre » ou «de ce genre», et pas «ayant le même genre» ou « ayant ce genre » :

> Toutes les courbes du même genre peuvent être transformées algébriquement dans une espèce particulière de ce genre [...] ; pour $p > 2$, ces *courbes normales* sont de l'ordre $p + 1$, et le nombre de leurs points doubles ou de rebroussement est égal à $p(p - 3)$. (*Voir* Clebsch *und* Gordan, *Theorie der Abelschen Functionen*.)

Cet extrait renvoie au fait que les transformations birationnelles, si elles laissent le genre invariant, altèrent l'ordre d'une courbe : il s'agit alors de déterminer l'ordre minimal que la transformée d'une courbe de genre donné peut atteindre. Ce sujet montre bien que même si les

---

[104] « Nach den dort gegebenen Principien kann man die Curven in *Geschlechter* eintheilen nach der Classe Abelscher Functionen, auf welche sie führen, oder nach dem ihnen entsprechenden Werthe der Zahl p. Wenn nun aus der gegebenen Curve eine andere so abgeleitet wird, dass jedem Punkte oder jeder Tangente der einen Curve im Allgemeinen immer nur ein einziger Punkt oder eine einzige Tangente der andern entspricht, *so führen beide Curven auf dieselben Abelschen Integrale,* gehören also demselben *Geschlechte* an, und besitzen dasselbe p. » Clebsch, Ueber die Singularitäten…, *op. cit. in* n. 96, p. 98. L'article cité de Riemann est celui portant sur les fonctions abéliennes : Riemann, *op. cit. in* n. 99.

[105] Il s'agit essentiellement de transformations par lesquelles les coordonnées des objets de départ sont exprimables rationnellement en fonction de celles des objets d'arrivée, et réciproquement.

[106] Cette allusion à Cayley prendra sens au prochain paragraphe.

[107] Alfred Clebsch, Sur les surfaces algébriques, *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* 67 (1868), 1238-1239. Citation p. 1238.

genres sont vus comme les divisions premières des courbes, la notion d'ordre reste cruciale pour Clebsch, permettant par exemple de distinguer des représentants particuliers — ou plutôt, des espèces particulières — au sein de chaque genre.

Cette question avait reçu une réponse par Clebsch et Gordan dans leur livre cité, de 1866. Elle avait aussi été abordée peu auparavant par Arthur Cayley, auquel nous avons vu Clebsch faire référence.

3.2 Genre(s) ou déficience ?

L'article de Cayley relatif à cette question est intitulé *On the transformation of plane curves*[108]. Cayley y rappelle que toute courbe de d'ordre n possède au plus $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ « points doubles », expression recouvrant la notion usuelle de point double (ou nœud) et celle de point de rebroussement, puis montre qu'une courbe peut être paramétrée de manière rationnelle si elle possède ce nombre maximal de points doubles.

Après avoir fait référence aux travaux de Riemann sur les fonctions abéliennes et de Clebsch sur les courbes rationnelles (où est proposée la classification par genres), Cayley ajoute :

> Avant de poursuivre, il sera commode d'introduire le terme « déficience », à savoir qu'une courbe de l'ordre n avec $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-D$ points doubles est dite avoir une déficience $= D$ [...][109].

Un des principaux objectifs de l'article de Cayley consiste en fait à calculer l'ordre minimal d'une courbe obtenue par transformation birationnelle à partir d'une courbe d'ordre donné. La question elle-même est structurée entièrement autour de la notion d'ordre — contrairement à la formulation de Clebsch, où la courbe donnée est caractérisée par son genre — et la déficience, introduite dans cette perspective, possède ainsi un statut auxiliaire bien que de grande importance. Le résultat auquel Cayley aboutit est qu'une courbe d'ordre n et de déficience D peut-être transformée en une courbe d'ordre $D+2$. Il ajoute cependant que Clebsch lui a communiqué qu'en utilisant des transformations mieux choisies, cet ordre peut même être abaissé à $D+1$ dans le cas où $D>2$.

Comme cela fut remarqué par Cayley, Clebsch et leurs contemporains, la déficience et le nombre p sont égaux[110]. Mais les manières dont ces nombres sont introduits et utilisés par leurs auteurs sont sensiblement différentes : en particulier, on ne trouve aucune trace, chez Cayley, de volonté de fonder une nouvelle classification des courbes sur la base de leur déficience — le mot lui-même, au contraire de *Geschlecht*, n'évoque pas de taxon potentiel et semble plutôt vu comme un caractère nouveau des courbes, jouant certes un rôle essentiel dans les propriétés de transformations de celles-ci.

---

[108] Arthur Cayley, On the Transformation of Plane Curves, *Proceedings of the London Mathematical Society* 1 (1865/1866), 1-11.

[109] « Before going further, it will be convenient to introduce the term "Deficiency," viz., a curve of the order n with $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-D$ dps, is said to have a deficiency $= D$ [...]. ». Cayley, *op. cit. in* n. 108, p. 2.

[110] Lê, *op. cit. in* n. 99, p. 92.

3.3 Une indispensable classification

La notion de genre (et celle de déficience) circule très rapidement à partir de 1865[111], et plusieurs mathématiciens y voient effectivement une classification nouvelle et meilleure que celle où les ordres sont les divisions principales, notamment parce que c'est celle qui reflète le mieux la gradation de la difficulté dans l'étude des courbes. Par exemple, dans un livre de 1866 sur la théorie des surfaces algébriques, Luigi Cremona écrit :

> La division des courbes planes [...] en *genres*, proposée par le Pr. Clebsch, est de la plus haute importance. Elle permet de rassembler et de lier les propriétés de formes géométriques très différentes en apparence. Ce qui mesure la difficulté que peut présenter l'étude d'une [courbe] n'est ni l'ordre, ni la classe, mais bien le genre[112].

Le genre est ainsi adopté sans réserve par un géomètre se décrivant plutôt comme un synthétiste, tandis que la notion était introduite par un géomètre analyste : de manière analogue à ce que nous avons relevé pour les classes, la circulation de la nouvelle classification n'est pas entravée par les préférences méthodologiques de ces mathématiciens. Au-delà de ces différences de méthode, l'importance que Cremona accorde à la notion de genre est sans doute à rapprocher de son intérêt pour l'utilisation des transformations birationnelles en géométrie, pour lesquelles le genre est un invariant[113].

Il est aussi intéressant de remarquer que Cremona, un peu plus tard, associera la classification par genres de Clebsch à une forme de modernité en géométrie : écrivant en 1868 à Wilhelm Fiedler, le futur traducteur en allemand du *Treatise on the Higher Plane Curves* de Salmon, il explique :

> [C]e livre est maintenant démodé et la science a fait de grands pas notamment grâce à l'activité de Clebsch. Il est aujourd'hui indispensable de traiter de la classification des courbes par genres eu égard aux idées de Riemann[114].

La notion de genre, sous son avatar de la déficience, est justement intégrée à la deuxième édition du traité de Salmon, dont la préface indique que Cayley a contribué à y inclure de nouvelles sections relatives aux « derniers progrès de la science[115] ». La déficience est décrite comme un

---

[111] Voir Lê, *op. cit. in* n. 99, p. 90-101, où est étudié un corpus d'articles publiés dans diverses revues académiques et où est notamment décrite la persistance des anglophones à utiliser la terminologie de Cayley jusqu'à la fin du xixe siècle. J'utilise ici un autre corpus, qui est celui déjà évoqué dans la section précédente, constitué des livres listés dans les bibliographies générales des chapitres de l'*Encyklopädie* consacrés aux courbes algébriques.

[112] « La divisione delle curve piane [...] in *generi*, proposta dal prof. Clebsch, è della massima importanza. Per essa si ravvicinano e si connettono le proprietà di forme geometriche in apparenza differentissime. Ciò che dà la misura delle difficoltà che può offrire lo studio di una [curva] non è l'ordine o la classe, ma bensì il genere. » Luigi Cremona, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie* (Bologne : Tipi Gamberini e Parmeggiani, 1866), p. 45.

[113] Au sujet des différences d'approche de Clebsch et Cremona, ainsi que leurs intérêts communs (en particulier pour les transformations birationnelles), voir Aldo Brigaglia, Ciro Ciliberto et Claudio Pedrini, The Italian School of Algebraic Geometry and Abel's Legacy, in Olav Arnfinn Laudal et Ragni Piene (éds.), *The Legacy of Niels Henrick Abel* (Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2004), 295-347. Voir en particulier p. 300-305.

[114] « [D]ieses Buch ist jetzt altmodisch und die Wissenschaft hat insbesondere dank Clebschs Schaffens große Fortscrhitte gemacht. Heute ist es unerlässlich, die Klassifikation der Kurven nach Geschlechter in Hinblick auf Riemanns Ideen zu behandeln. » Extrait d'une lettre de Cremona à Fiedler datée du 5 mars 1868, éditée dans Sara Confalioneri, Peter-Maximilian Schmidt et Klaus Volkert (éds.), *Der Briefwechsel von Wilhelm Fiedler mit Alfred Clebsch, Felix Klein und italienischen Mathematikern* (Siegen : Universitätsverlag Siegen, 2019), p. 197.

[115] George Salmon, *A Treatise on the Higher Plane Curves,* 2e éd. (Dublin : Hodges, Foster, and Co., 1873), p. v.

« nombre jouant un rôle très important dans la théorie des courbes[116] » ; son lien avec les courbes rationnelles (ou « unicursales », dans le langage de Cayley[117]) est établi immédiatement après cette définition, tandis que l'invariance par transformation birationnelle est traitée plus tard, dans le chapitre correspondant (p. 314).

La déficience est aussi mise à contribution dans le chapitre consacré aux courbes du quatrième ordre : leur classification, faite selon les « caractéristiques de Plücker et la déficience », est incarnée en une division en dix *genera* (voir la figure 3). Ces genres, qui ne sont bien entendu pas ceux de Clebsch, sont ainsi des taxons dont l'existence même reflète les différentes combinaisons possibles des nombres caractéristiques et met encore une fois en évidence que la déficience est perçue comme un nombre-caractère.

In this way we have ten genera, of which the Plückerian characteristics and the deficiency (Art. 32) are

	m	δ	κ	n	τ	ι	D
I.	4	0	0	12	28	24	3
II.	4	1	0	10	16	18	2
III.	4	0	1	9	10	16	2
IV.	4	2	0	8	8	12	1
V.	4	1	1	7	4	10	1
VI.	4	0	2	6	1	8	1
VII.	4	3	0	6	4	6	0
VIII.	4	2	1	5	2	4	0
IX.	4	1	2	4	1	2	0
X.	4	0	3	3	1	0	0

viz. in each of the last four cases the curve is unicursal.

Figure 3 : Classification des courbes du quatrième ordre dans le *Treatise on the Higher Plane Curves* de Salmon (1873), p. 206. Les lettres m, δ, κ, n, τ, ι et D désignent respectivement l'ordre, le nombre de points doubles, celui de points de rebroussement, la classe, le nombre de tangentes doubles, celui de points d'inflexion et enfin la déficience.

Par ailleurs, le soulignement des quatre cas de courbes unicursales que l'on peut voir dans la figure 3 est significatif. En effet, la déficience n'est pas le critère premier d'appréhension des courbes dans le livre de Salmon : conformément à la première édition, les courbes auxquelles sont dévolus des chapitres spécifiques sont celles des troisième et quatrième ordre. Mais la deuxième édition voit apparaître, dans chacun de ces chapitres, une section qui aborde les courbes unicursales des ordres concernés. La déficience apparaît donc de cette manière, distinguant au sein de ces ordres des courbes admettant des paramétrages rationnels.

Ce même phénomène se voit dans de nombreux autres ouvrages consacrés aux courbes algébriques. Citons par exemple un livre de Richard Baltzer intitulé *Analytische Geometrie*[118]. Après avoir défini le genre comme la différence entre le nombre maximal et le nombre effectif de points doubles d'une courbe et rappelé que « au 0ème genre appartiennent, d'après ce comptage, les lignes du 2ème ordre et toutes les lignes les plus singulières[119] » — on notera

---

[116] « We call *deficiency* of a curve the number D, by which its number of double points is short of the maximum; this number playing a very important role in the theory of curves. » Salmon, *op. cit. in* n. 115., p. 28.
[117] Cayley, *op. cit. in* n. 108, p. 2.
[118] Richard Baltzer, *Analytische Geometrie* (Leipzig : Hirzel, 1882).
[119] « Zum 0ten Geschlecht gehören nach dieser Zählung die Linien 2ter Ordnung und alle singulärsten Linien ». Baltzer, *op. cit. in* n. 118, p. 334.

encore une fois les formulations qui renvoient au genre comme une catégorie de courbes, quand bien même celui-ci a été défini comme un nombre — Baltzer indique ces dernières sont aussi « les plus élémentaires de leur ordre[120] ». L'enjeu de simplicité est donc bien lié à la valeur (d'autant plus petite) du genre, mais est discutée à l'intérieur des ordres, et pas en amont de ceux-ci. Notons toutefois que le livre de Baltzer, de niveau plutôt élémentaire, passe en fait assez rapidement sur les courbes unicursales et se contente surtout d'étudier les courbes du deuxième ordre.

Les courbes d'ordre supérieur sont en revanche l'objet de la *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung* de Heinrich Wieleitner[121]. La cinquième chapitre est intitulé « Genre, courbes rationnelles » ; le genre est défini comme le nombre $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$ et présenté comme « un troisième élément de classification [des courbes], à côté de l'ordre n et de la classe ν »[122]. S'il n'y a donc pas de hiérarchie présentée ici entre ces trois notions classificatrices, le découpage des chapitres et sections du livre met toutefois en avant d'abord les courbes rationnelles, étudiées de manière générale avant que les cubiques rationnelles soient examinées de plus près, et, plusieurs chapitres plus loin, les courbes des troisième et quatrième ordre non nécessairement rationnelles. Le genre, s'il intervient donc effectivement dans la structuration du livre, est donc surtout visible à travers la mise en évidence des courbes rationnelles. Le titre même du livre est d'ailleurs révélateur : c'est l'ordre qui continue d'apparaître comme critère premier pour la conception de la division des courbes.

En fait, le genre apparaît de manière plus nette comme principe organisateur dans des ouvrages d'analyse contenant des chapitres d'application aux courbes algébriques. C'est par exemple le cas dans le premier tome de la première édition du *Cours d'analyse de l'École polytechnique* de Camille Jordan[123]. Le chapitre final, consacré aux courbes algébriques, est divisé en deux sections, dont la première est simplement intitulée « Genre » et la deuxième « Coordonnées homogènes ». L'ordre d'une courbe y est bien sûr utilisé (sans être défini) dès les premières lignes, mais c'est donc le genre qui ressort comme sujet important dans le livre de Jordan.

Il en va de même dans le deuxième volume du *Traité d'analyse* d'Émile Picard[124], qui présente, entre autres sujets, la théorie des intégrales abéliennes et des surfaces de Riemann. La notion de genre des courbes est définie via ces objets, le lien avec la formule $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$ étant établi simultanément. Surtout, il est frappant de voir dans la table des matières du livre que c'est le genre seulement qui apparaît dans les titres des différents chapitres ou sections relatifs aux courbes. Ainsi, une section est consacrée aux courbes de genre deux lors de la recherche des courbes d'ordre minimal birationnellement équivalentes à une courbe donnée, et l'ultime chapitre du livre se propose d'étudier spécifiquement les « courbes des genres zéro et un ».

[120] « Die singulärsten Linien nter Ordnung, die elementarsten ihrer Ordnung [...] sind durch mehrere Eigenschaften ausgezeichnet. » Baltzer, *op. cit. in* n. 118, p. 335.
[121] Heinrich Wieleitner, *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung* (Leipzig : Göschen, 1905).
[122] « Die Zahl p, die wir als Geschlecht definierten, stellt sich als drittes Klassifikationselement neben die Ordnung n und die Klasse ν. » Wieleitner, *op. cit. in n.* 121, p. 71.
[123] Camille Jordan, *Cours d'analyse de l'École polytechnique,* t. 1. Calcul différentiel (Paris : Gauthier-Villars, 1882).
[124] Émile Picard, *Traité d'analyse,* t. 2 (Paris : Gauthier-Villars, 1893).

3.4 Hiérarchiser ordres et genres

Comme le montrent ces exemples, le genre — effectivement devenu un nombre, même si certaines expressions continuent de faire écho à son acception en tant que catégorie — est bien intégré au savoir géométrique de la fin du XIX^e^ siècle. Les ouvrages de géométrie consultés tendent toutefois à être toujours structurés par la notion d'ordre, à l'image de ce que nous avions relevé en introduction au sujet de l'*Encyklopädie* et du *Répertoire bibliographique*. Le cas des livres d'analyse est un peu plus délicat à interpréter : pour le *Traité* de Picard, la focalisation sur le genre semble être liée au sujet même des fonctions abéliennes, qui en occupe une grande partie et impose en quelque sorte le traitement des courbes sous le point de vue du genre. Ce n'est cependant pas ce qui se passe pour le *Cours d'analyse* de Jordan, et il ne s'agit probablement là que de la manifestation de ce que ce dernier juge être le plus important à présenter au sujet des courbes algébriques.

S'il a donc été reconnu comme étant la bonne notion classificatrice des courbes algébriques par plusieurs mathématiciens de la deuxième moitié du XIXe siècle, le genre semble encore avoir un statut hiérarchique un peu incertain par rapport à l'ordre, au moins dans la manière dont est structuré le savoir au début du XXe siècle.

Évidemment, cette image épouse l'empan chronologique choisi et ne préjuge en rien de la manière dont les rapports entre ordre et genre ont pu évoluer par la suite : pour mettre les choses en perspective, remarquons simplement que la *Mathematics Subject Classification*[125] de 2020 consacre bien une section aux courbes algébriques dans la partie sur la géométrie algébrique, mais qu'aucune des sous-sections qui la composent ne fait référence à des courbes particulières distinguées par leur ordre. Au contraire, l'une d'elle est intitulée « Courbes algébriques spéciales et courbes de petit genre », une autre « Courbes elliptiques » (ce qui renvoie au genre 1), et d'autres encore font par exemple référence aux modules de courbes, un sujet lié de près aux transformations birationnelles de celles-ci et donc, en filigrane, à leur genre.

Nul doute que des mutations de la géométrie algébrique au XXe siècle, comme l'accent toujours plus important sur les aspects birationnels des courbes et surfaces, ont joué un rôle à une telle occultation de l'ordre au profit du genre.

J'aimerais aussi mentionner rapidement un autre facteur explicatif probable de cette montée en puissance du genre : l'enchevêtrement disciplinaire qui s'est opéré au début du XXe siècle surtout entre arithmétique et théorie des courbes algébriques, consistant à interpréter la recherche des solutions rationnelles d'une équation diophantienne comme celle d'autant de points à coordonnées rationnelles de la courbe définie par cette équation[126]. En effet, comme l'explique Henri Poincaré dans un célèbre article sur le sujet[127], un des points cruciaux dans cette approche est que les courbes en jeu sont à considérer à transformation birationnelle près : dès lors, la notion invariante de genre devient centrale et gradue la difficulté du problème arithmétique sous-jacent. Ainsi, dans sa thèse de 1928 sur *L'arithmétique sur les courbes*

[125] Il s'agit de la classification établie par les deux grands outils de recension actuels que sont le *Zentralblatt* et les *Mathematical Reviews*, et utilisée actuellement de manière quasi systématique par les mathématiciens et mathématiciennes pour indexer leurs travaux.

[126] À ce sujet, voir Norbert Schappacher, « Développement de la loi de groupe sur une cubique », in *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988/89* 91 (1991), 159-184 ; Catherine Goldstein, Descente infinie et analyse diophantienne : programmes de travail et mise en œuvre chez Fermat, Levi, Mordell et Weil, *Cahiers du Séminaire d'histoire et de philosophie des mathématiques*, sér. 2, vol. 3 (1993), 25-49.

[127] Henri Poincaré, Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, sér. 5, vol. 7 (1901), 161-233.

algébriques, André Weil rappellera encore que « l'élément fondamental de classification des équations diophantiennes à deux variables est le genre de l'équation et non son degré[128] ». La préférence du genre est donc de nouveau mise en avant, survenant par un autre chemin que celui de l'étude des courbes algébriques en elles-mêmes : les domaines mathématiques se rapprochant, les acquis géométriques sur les courbes sont réinvestis à nouveaux frais en arithmétique, leur octroyant potentiellement un surplus d'importance en retour.

4. Conclusion

Les classifications des courbes algébriques que nous avons suivies, loin d'être figées dans le temps et les pratiques, sont donc bien soumises à des dynamiques historiques qui en modifient tant la constitution que l'organisation.

L'apparition et la disparition de certains taxons, ainsi que leurs éventuels changements de signification, témoignent ainsi des évolutions des mathématiques, reflétant des changements de point de vue sur les objets (comme la distinction, abandonnée, entre lignes et courbes), des ajustements techniques à réaliser pour expurger une théorie (celle de la dualité) de ses scories, ou des articulations disciplinaires nouvelles permettant d'irriguer certaines parties des mathématiques (la géométrie des courbes, enrichie par la théorie des fonctions abéliennes).

Il en va de même pour les rapports hiérarchiques changeants entre ordres, classes et genres. S'ils ne semblent pas se stabiliser une fois pour toutes, ni diachroniquement ni même synchroniquement, c'est qu'ils suivent les objectifs de ceux qui les emploient, que ce soit une question de recherche précise ou l'approche pédagogique d'un sujet, par exemple : l'ordre est susceptible d'être présenté comme notion divisionnaire première des courbes parce que, se lisant directement sur leurs équations, son compréhension est plus directe pour quiconque débute son apprentissage géométrique; mais l'experte intéressée par des problèmes birationnels des courbes privilégiera certainement plutôt le genre.

Cette sorte de relativisme des hiérarchies classificatrices n'est toutefois pas une caractéristique systématiquement partagée par d'autres cas mathématiques que celui des courbes. Les formes quadratiques par exemple, objets issus de l'arithmétique, ont aussi été distribués au xixe siècle en ordres, genres et classes[129]. Plus précisément, ces formes ont été classées par Carl Friedrich Gauss dans ses *Disquisitiones arithmeticae* (1801) suivant un système où les classes forment les divisions de base et sont ensuite regroupées en genres, eux-mêmes rassemblés en ordres. Cette organisation, fixée définitivement, n'a pas été remise en cause par la suite, même si certaines variations ont existé parmi les successeurs de Gauss sur ce que sont les bonnes catégories ou le bon niveau hiérarchique à considérer.

La comparaison avec les formes quadratiques permet aussi de revenir sur le rapport entre les taxons de courbes et les nombres qui les définissent et finissent par incarner. En effet, les

[128] André Weil, « L'arithmétique sur les courbes algébriques », thèse de doct., Faculté des sciences de Paris, 1928. Citation p. 2.

[129] J'utilise ici les informations de Franz Lemmermeyer, The Development of the Principal Genus Theorem, in Catherine Goldstein, Norbert Schappacher et Joachim Schwermer (éds.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae* (Berlin : Springer, 2007), 527-561 ; Catherine Goldstein, « Découvrir des principes en classant » : la classification des formes quadratiques selon Charles Hermite, *Cahiers François Viète*, sér. 3, vol. 1 (2016), 103-135.

diverses catégories de formes sont elles aussi associées à des nombres divers qui les caractérisent mais il n'y a pas de glissement sémantique analogue à celui que nous avons décrit pour les courbes. Un autre type d'ontologisation est en fait à l'œuvre chez Gauss, qui définit une opération de composition des classes elles-mêmes, qui deviennent ainsi « objets (de second niveau) à part entière[130] ». Les taxons de formes en ressortent ainsi douées d'une importance renforcée, tandis que les catégories de courbes se font oublier au profit des seuls nombres qui en héritent les noms[131].

La relation étroite entre nombres et catégories de courbes met aussi directement en évidence des différences notables avec les entreprises de classifications naturalistes. L'indexation des ordres, classes et genres de courbes par l'ensemble des entiers positifs dévoile ainsi d'un geste immédiat leur infinité et leur ordonnancement : l'exhaustivité du système classificatoire choisi est donc assurée dès le départ et il n'est pas question d'ajouter de nouveaux genres, par exemple, qui auraient été découverts à d'autres occasions[132]. Les distributions des sous-divisions dans chaque taxon sont également gérées par les formules de Plücker ou de Clebsch qui, liant les nombres entre eux, en circonscrivent et déterminent directement les possibilités. Si, enfin, certains des mathématiciens rencontrés s'emparent effectivement de questions de terminologie, celles-ci portent sur la dénomination des types de catégories ; le problème de la dénomination en langage naturel des catégories de rang donné, si importante pour les naturalistes, est en revanche complètement évitée par le recours direct aux nombres pour les désigner, ce qui est d'ailleurs aussi le cas des formes quadratiques.

D'autres points de rapprochement ou de différenciation entre les classifications de courbes, de formes quadratiques voire d'êtres vivants pourraient encore être développés, comme la recherche de représentants privilégiés au sein des divers taxons ou le rôle des transformations des objets examinés.

Mais on l'aura compris. Sous leur vocabulaire parfois commun d'ordres, de genres et de classes, ces diverses classifications cachent des particularités de mise en œuvre, de conception, d'évolutions historiques qui en font souvent des produits collectifs et mouvants. Le cas des courbes algébriques est exemplaire à ce titre, permettant de suivre et d'éclairer d'une nouvelle manière une partie du développement de la géométrie sur un temps relativement long, en contextualisant de manière alternative certains épisodes connus ou en attirant le regard sur des éléments en apparence anodins comme l'emploi ou non d'adjectifs numériques ordinaux ; bref, en offrant une épaisseur supplémentaire à la description de l'histoire de ces courbes algébriques.

---

[130] Goldstein, *op. cit. in* n. 129, p. 131.

[131] Appréhender les ensembles de courbes birationnellement équivalentes comme des objets en soi est plutôt lié à la considération (plus tardive) de l'espace des modules des courbes de genre donné, dont chaque point correspond à une et une seule classe de courbes.

[132] Soulignons que ce point est bien propre aux classifications par ordres, classes ou genres : rappelons par exemple que celle de Newton des lignes du troisième ordre passait à côté de quelques espèces, oubliées dans une disjonction de cas. Voir aussi Lê et Paumier, De la science comme classification à la classification comme pratique scientifique, *Cahiers François Viète*, sér. 3, vol. 1 (2016), 9-33, pour un cas analogue en théorie des surfaces.