DES TAXONS ET DES NOMBRES : QUELQUES REMARQUES SUR LES ORDRES, CLASSES ET GENRES DES COURBES ALGEBRIQUES

François Lê

Version postprint. Août 2022

Règnes, embranchements, classes, ordres, familles, genres, espèces. Tels sont les noms bien connus des catégories emboîtées de la taxinomie classique, systématisée par les célèbres travaux de Carl von Linné mais également discutée par d'autres naturalistes des XVIII^e^ et XIX^e^ siècles autour de questions relatives à la délimitation de ces catégories, leur formation successive à partir des individus ou leur dénomination, par exemple. Certaines de ces catégories apparaissent aussi dans les écrits de savants ayant abordé la classification du vivant avant Linné : en particulier, le couple formé des taxons de genre et d'espèce, dans leur sens relatif aristotélicien, a été abondamment utilisé pour décrire l'ordonnancement des plantes, des animaux et des minéraux[1].

L'activité classificatoire n'est cependant pas l'exclusivité de l'histoire naturelle, formant la base de problèmes essentiels tant en psychiatrie qu'en chimie, en astronomie ou en logique, pour ne citer que quelques autres domaines scientifiques[2]. Il en va de même pour les mathématiques, au sujet desquelles des recherches historiques récentes ont mis en évidence certaines spécificités de la pratique du classement, et étudié comment cette pratique est susceptible de mobiliser et faire jouer les interfaces disciplinaires ou d'intervenir dans le processus de découverte mathématique lui-même[3].

---

[1] Devant l'étendue de la littérature sur ce sujet, je ne renverrai qu'aux contributions récentes suivantes : Thierry

[2] Voir respectivement Julie Mazaleigue-Labaste, Les limites de l'acceptable : petites et grandes « perversions », *Criminocorpus* (2016), en ligne, http://journals.openedition.org/criminocorpus/3371 ; Stéphanie Ruphy, La classification des étoiles : un nouvel allié pour le pluralisme scientifique, in Soazig Le Bihan (éd.), *Précis de philosophie de la physique* (Paris : Vuibert, 2013), 274-294 ; Bernadette Bensaude-Vincent, Classification. Chimie, in Dominique Lecourt (éd.), *Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences* (Paris : Presses universitaires de France, 2003), 179-180 ; Jean-Marie Chevalier, La logique est-elle une science de classification ? Sur une crise de la classification dans la logique au XIX^e^ siècle, *Cahiers François Viète*, sér. 3, vol. 1 (2016), 61-81.

[3] Voir les différents articles de : François Lê et Anne-Sandrine Paumier (éds.), La classification comme pratique scientifique, *Cahiers François Viète*, sér. 3, vol. 1 (2016).

J'aimerais ici continuer dans cette voie, en m'intéressant à des classifications de certains des objets centraux de la géométrie : les courbes algébriques[4]. Plus précisément, je souhaite me focaliser sur les classifications de ces courbes qui ont été bâties à l'aide des notions d'ordre, de classe et de genre.

Le choix de suivre ces trois mots classificatoires, dont nous verrons qu'ils ont désigné d'abord des catégories de courbes puis les nombres qui les définissent, est motivé par le fait que ce sont eux qui apparaissent explicitement dans la représentation du savoir relatif aux courbes algébriques au tournant du XX[e] siècle. Plus encore, ils l'organisent en partie, c'est-à-dire que la structuration de ce savoir est calquée sur la classification des objets.

Regardons ainsi l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*[5]. La distinction des chapitres se rapportant aux courbes algébriques est faite en suivant les différents ordres : un chapitre concerne les coniques, autre nom des courbes du second ordre, un autre se rapporte aux courbes des troisième et quatrième ordres, un dernier est dévolu à celles d'ordre supérieur au quatrième[6]. Les notions de classe et de genre apparaissent quant à elles au sein des architectures internes de ces chapitres. Par exemple, le deuxième paragraphe sur les courbes du troisième ordre traite de leur « classification par classe et par genre », tandis que pour les courbes du quatrième ordre, trois sections sont respectivement consacrées aux cas des courbes de genre 0, 1 et 2.

La situation est un peu différente dans *l'Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*[7]. Les courbes du second ordre constituent là aussi un sujet à part, mais d'autres sections mettent en avant d'abord les « courbes au point de vue de leur genre » puis

[4] Une courbe algébrique (plane) est une courbe pouvant être définie par une équation polynomiale entre deux inconnues. Le cercle unité, d'équation $x^2 + y^2 = 1$, est une telle courbe, tandis qu'une spirale est un exemple de courbe non algébrique.

[5] L'*Encyklopädie* est le fruit d'un projet collectif initié puis supervisé par Felix Klein et visant à présenter l'état des mathématiques à la fin du XIX[e] siècle et leur histoire au cours de ce siècle. Voir Renate Tobies, Mathematik als Bestandteil der Kultur: Zur Geschichte des Unternehmens *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, *Mitteilungen der Österreichischen Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte*, 14 (1994), 1-90 ; Hélène Gispert, Les débuts de l'histoire des mathématiques sur les scènes internationales et le cas de l'entreprise encyclopédique de Felix Klein et Jules Molk, *Historia Mathematica*, 26 (1999), 344-360.

[6] Il s'agit respectivement de Friedrich Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, t. III. C. 1. (Leipzig : Teubner, 1903), 1-160 ; Gustav Kohn, Ebene Kurven dritter und vierter Ordnung, in *Encyklopädie…* (Leipzig : Teubner, 1908), 457-570 ; Gino Loria, Spezielle ebene algebraische Kurven von höherer als der vierten Ordnung, in *Encyklopädie...* (Leipzig : Teubner, 1914), 571-634.

[7] Le *Répertoire* a été publié en 1889, à l'occasion d'une entreprise de recension et de classement des publications mathématiques du XIX[e] siècle. Voir Philippe Nabonnand et Laurent Rollet, Une bibliographie mathématique idéale ? Le Répertoire bibliographique des sciences mathématiques, *Gazette des Mathématiciens*, 92 (2002), 11-26.

les « courbes du troisième ordre ou de la troisième classe », celles « du quatrième ordre ou de la quatrième classe » et enfin celles « d'ordre ou de classe supérieurs à quatre ». Genres et classes sont donc susceptibles d'intervenir à un niveau hiérarchique plus élevé que dans l'*Encyklopädie*, bien que le genre organise aussi certaines des sous-divisions relatives aux courbes du troisième ordre ou de troisième classe (voir la figure 1).

5. Courbes du troisième ordre ou de la troisième classe.

a. Courbes unicursales; généralités; construction; génération; α. Polygones inscrits et circonscrits.
b. Hypocycloïde à trois rebroussements.

c. Courbes particulières unicursales du troisième ordre : α. Strophoïdes, focale à nœud; β. Cissoïde; γ. Autres courbes unicursales spéciales d'ordre ou de classe 3.
d. Courbes du troisième ordre ou de la troisième classe de genre un. Généralités.

Figure 1. Extrait de l'index du *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques.* Les courbes rationnelles sont des courbes de genre 0, dont les hypocycloïdes à trois rebroussements sont des cas particuliers.

Une telle présence à ces niveaux d'organisation du savoir indique qu'ordres, classes et genres de courbes algébriques sont des notions bien connues et relativement stabilisées au tournant du siècle, même si leurs rapports hiérarchiques mutuels ne semblent pas tout à fait fixés[8].

Mais ces notions possèdent bien sûr leurs histoires, parfois distinctes, parfois entrelacées, que je souhaite retracer.

Il est généralement accepté qu'ordres, classes et genres, au moins dans leurs acceptions communément partagées à la fin du XIX^{e} siècle, sont apparus explicitement sous les plumes respectives d'Isaac Newton (1704), de Joseph-Diez Gergonne (1828) et d'Alfred Clebsch (1865), et les épisodes au cours desquels ils ont été introduits ont déjà été étudiés historiquement, souvent de manière séparée les uns des autres[9]. La question classificatoire des courbes en général n'y a cependant pas toujours été mise au centre de l'attention, étant située

[8] Le *Catalogue of scientific papers* et le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* sont d'autres entreprises de recension et de classification qui existent au début du XX^{e} siècle. Les divisions adoptées pour le sujet des courbes sont moins détaillées que celles de l'*Encyklopädie* et du *Répertoire*, et sont fondées uniquement sur l'ordre.
[9] Les références à la littérature en question seront données au fil de l'article.

quelque peu en retrait par rapport à d'autres questions historiques vis-à-vis desquelles il était intéressant d'interroger ces épisodes : la classification plus particulière des courbes du troisième ordre par Newton, la polémique de la dualité dans laquelle Gergonne est impliqué, l'utilisation par Clebsch des fonctions dites abéliennes pour l'étude des courbes. Ordres, classes et genres ont en effet la spécificité d'avoir été définis dans des travaux dont le but ne se réduit pas à leur seule introduction. C'est tout particulièrement le cas des ordres et des genres, rapidement définis par Newton et Clebsch en un ou deux courts paragraphes situés au début de leurs écrits, lesquels contiennent bien d'autres développements. Comme nous aurons l'occasion de le constater, qu'une telle portion congrue leur soit initialement accordée n'est toutefois synonyme d'indifférence ni pour leurs auteurs, ni pour leurs lecteurs ; cela ne signifie pas non plus que les aspects techniques qui les sous-tendent ne s'ancrent pas dans des travaux antérieurs plus approfondis.

Le récit que je propose est structuré autour des trois épisodes mentionnés, qui seront revisités à l'aune de questions ayant trait au thème de la classification. Ils seront aussi complétés et liés entre eux à l'aide de corpus de textes qui ne s'y rapportent pas directement et dont les auteurs ne sont pas Newton, Gergonne ou Clebsch, mais qui permettent de suivre la circulation et l'adoption collective des notions classificatrices qui nous intéressent[10].

Pour décrire la trame ainsi construite, j'insisterai sur plusieurs points. Je ferai d'abord voir comment les différentes classifications sont introduites et s'articulent entre elles, ce qui permettra de souligner que la chronologie décrite précédemment ne correspond pas à la recherche d'un raffinement successif d'une unique classification des courbes, et que les rapports hiérarchiques des ordres, classes et genres se sont modifiés au cours du temps, suivant les évolutions de la géométrie. Par ailleurs, plusieurs questions terminologiques seront soulevées par l'étude de certains textes, que ce soit par des commentaires explicites de leurs auteurs ou par des traces plus discrètes. Elles seront examinées de près. Enfin, je chercherai à décrire un phénomène qui me semble d'un vif intérêt au regard de la problématique classificatoire : le passage progressif d'une conception des ordres, classes et genres en tant que catégories de courbes à une conception en tant que nombres, dont un des effets est de permettre aux mathématiciens d'opérer arithmétiquement sur eux. Ce processus n'est cependant ni explicité ni commenté par les auteurs de l'époque : pour le suivre, l'attention

[10] La formation des corpus en question sera décrite en temps voulu. Pour des raisons de place, la description des corpus complémentaires sera plus succincte que celle des textes où les ordres, classes et genres sont introduits.

sera portée sur diverses formulations textuelles utilisées dans les publications du passé et témoignant de ce glissement sémantique subreptice.

En parcourant les travaux de mathématiciens des XVII^{e} et XVIII^{e} siècles autour de la catégorie d'ordre, nous verrons que certains ont défini et utilisé des notions de classe et de genre qui ne correspondent pas à celles fixées plus tard par Gergonne et Clebsch. Nous les étudierons elles aussi afin d'apporter un éclairage supplémentaire sur la situation. Mais ces notions sont bien distinctes de celles du XIX^{e} siècle, et aucun lien direct ne semble avoir été voulu par Gergonne et Clebsch. La réutilisation des mêmes noms témoigne donc simplement d'un contexte classificatoire général commun, dont les réalisations techniques à différents moments historiques demeurent différentes : en particulier, il ne s'agit pas d'interpréter cette réutilisation comme une trace de continuités historiques résultant de réappropriations mathématiques successives visant à redéfinir classes et genres, et que l'on pourrait par exemple détecter en suivant les citations faites par les mathématiciens dans leurs écrits. La cohérence du récit proposé ici est d'une autre nature, assurée par le fil conducteur classificatoire que permet de suivre l'étude des divers taxons d'ordre, de classe et de genre.

Une synthèse des éléments les plus saillants de ce récit est proposée en conclusion. Elle sera appuyée sur une rapide comparaison avec le cas des formes quadratiques, autres objets mathématiques qui ont été distribués en ordres, classes et genres au XIX^{e} siècle, et, à une échelle moins fine, avec celui des classifications naturalistes.

1. Des genres et des ordres autour de Newton

La classification par ordres proposée par Newton est introduite au début de l'*Enumeratio linearum tertii ordinis*, dont le but principal est d'établir une classification plus fine des constituants du troisième de ces ordres[11]. Les ordres concernent en fait les lignes, qui englobent les courbes proprement dites et les droites, alors que les courbes elles-mêmes sont classées par Newton en genres[12].

[11] Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, in *Opticks: or, a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light* (London : Smith et Walford, 1704), 139-211.
[12] Dans toute cette section, la distinction entre lignes et courbes sera soigneusement respectée. Nous verrons qu'elle cessera d'être adoptée dans le courant du XVIII^{e} siècle.

Ces modes de classement s'appuient sur la possibilité de définir lignes et courbes par des équations entre deux inconnues. Newton avait probablement appris cette possibilité au cours de ses lectures de jeunesse, dans les années 1660, car ses sources de l'époque incluent la deuxième édition de la traduction latine de la *Géométrie* de René Descartes[13]. Comme on le sait, ce dernier avait montré comment former des équations entre deux grandeurs inconnues pour résoudre des problèmes de géométrie, et comment interpréter de telles équations comme définissant des lignes courbes, solutions des problèmes posés[14]. Descartes lui-même ayant établi une certaine classification des courbes en genres, il est intéressant pour nous de faire un détour par ses travaux et par ceux de quelques-uns de ses successeurs[15].

1.1 Des genres de lignes au Grand Siècle

Descartes avait proposé de « distinguer [les lignes courbes] par ordre en certains genres » à l'aide des équations qui les représentent[16]. Plus précisément, les lignes courbes dont l'équation fait intervenir les inconnues à la deuxième « dimension » (c'est-à-dire que l'équation est du second degré) forment « le premier et plus simple genre[17] », tandis que les genres suivants regroupent les lignes courbes par paires de degrés de la façon suivante : le n-

---

[13] René Descartes, *La géométrie*, in *Discours de la méthode* (Leyde : Ian Maire, 1637), 295-413; René Descartes, *Geometria a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita,* trad. par Frans van Schooten, avec des comment. de Florimond De Beaune, Frans van Schooten, Jan Hudde, Hendrik van Heuraet et Jan de Witt (Amsterdam : Apud Ludovicum et Danielem Elzevirios, 1659/1661).

[14] Les sources mathématiques de jeunesse de Newton sont décrites dans Niccolò Guicciardini, *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method* (Cambridge, Massachusetts & London, England : The MIT Press, 2009), p. 5. Soulignons que dans l'*Enumeratio*, Newton étudie les lignes courbes définies par une équation du troisième degré sans les lier *a priori* à un problème géométrique. Il s'agit donc plutôt de l'approche présentée par Pierre Fermat dans l'*Ad locos planos et solidos isagoge*, que Newton ne semblait toutefois pas connaître à l'époque. Voir Pierre Fermat, *Œuvres complètes*, t. 1, Charles Henry et Paul Tannery (éds.) (Paris : Gauthier-Villars, 1891), 91-103. L'*Isagoge* a circulé parmi les correspondants de Fermat dès 1637 mais n'a été publié qu'en 1679. Voir Michael S. Mahoney, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601–1695)* (Princeton : Princeton University Press, 1999), p. 72.

[15] Alors que nous débutons notre analyse par la *Géométrie*, notons que Roshdi Rashed s'est intéressé aux classifications des courbes depuis l'Antiquité grecque jusqu'à Descartes. Voir Roshdi Rashed, Les premières classifications des courbes, *Physis*, 42/1 (2005), 1-64. Comme cela a été souligné dans ce texte, rappelons que les liens nouveaux instaurés entre équations et courbes algébriques modifient substantiellement les possibles manières de classer ces dernières.

[16] Voir Descartes (1637), *op. cit. in* n. 13, p. 319. Au sujet de la *Géométrie*, je renvoie à Henk J. M. Bos, *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction* (New York : Springer, 2001) ; Michel Serfati, René Descartes, *Géométrie*, Latin Edition (1649), French Edition (1637), in Ivor Grattan-Guinness (éd.), *Landmark Writings in Western Mathematics, 1640-1940* (Amsterdam : Elsevier Press, 2005), 1-22, ainsi qu'à Alain Herreman, La fonction inaugurale de *La Géométrie* de Descartes, *Revue d'histoire des mathématiques*, 18 (2012), 67-156 ; Alain Herreman, L'introduction des courbes algébriques par Descartes : genèse et inauguration. Complément à la conjecture de H. Bos sur le rôle historique du problème de Pappus, *Revue d'histoire des mathématiques*, 22 (2016), 97-137.

[17] Descartes (1637), *op. cit. in* n. 13, p. 319. Bos, *op. cit. in* n. 16, ch. 25, discute du lien entre simplicité et classification des lignes courbes, en insistant davantage sur le degré comme division classificatoire plutôt que le genre. Notons par ailleurs que les degrés ne sont pas présentés comme des nombres chez les auteurs des XVII^e et XVIII^e siècles suivis ici. Il s'agit plutôt de divisions empilées d'équations reflétant leur dimension.

ième genre, pour $n \geq 2$, est constitué des courbes dont l'équation est du $(2n-1)$-ième ou du $2n$-ième degré[18] — le cas exceptionnel du premier genre renvoie au fait que les lignes droites ne sont pas comptées parmi les courbes par Descartes.

La seule justification donnée explicitement par Descartes de cette manière de grouper les lignes courbes est une allusion au fait que les « difficultés » du quatrième degré se « réduisent » toujours au troisième et que celles du sixième degré s'abaissent au cinquième[19] : cette allusion est unanimement comprise par la littérature historique comme une référence à la réduction des équations en une inconnue du quatrième degré à celles du troisième degré, dont Descartes pensait, à tort, qu'elle se généralisait aux degrés supérieurs et aux équations à deux inconnues. D'autres interprétations de la raison de la classification par genres, qui ne se rapportent pas à la justification explicite de Descartes, sont liées à la construction des courbes correspondant à la solution du problème de Pappus et à la classification cartésienne des problèmes géométriques.

Quoi qu'il en soit, si cette classification a bien été reprise par plusieurs de ses lecteurs du XVII^e^ siècle, comme Florimond de Beaune — qui intègre toutefois les lignes droites dans le premier genre[20] —, Frans van Schooten[21], Philippe de Lahire[22] ou Jacques Ozanam[23], d'autres ont adopté une posture plus critique à son égard[24]. Par exemple, dans une lettre à Kenelm Digby de 1657 reprenant des arguments développés dans sa *Dissertation en trois parties*, Fermat explique pourquoi, « quand [Descartes] range ces courbes en espèces ou genres déterminés, il assigne tout à fait à tort la même espèce à la courbe cubique et quadratoquadratique, ainsi qu'à la courbe quadratocubique et cubocubique. Et ainsi à l'infini par une même et uniforme

[18] En traitant un exemple de recherche d'un certain lieu géométrique à l'aide d'une mise en équation, Descartes fait remarquer (sans le démontrer) que les différentes manières d'obtenir une telle équation n'influent pas sur le genre de la courbe correspondante. Une interprétation actuelle de ce résultat (en fait, d'une propriété qui implique ce dernier) est l'invariance du degré d'une équation par transformation affine. Cette question de l'indépendance du degré sera reprise, explicitée et démontrée par d'autres mathématiciens que nous rencontrerons dans la suite.
[19] Descartes (1637), *op. cit. in* n. 13, p. 323.
[20] Florimond De Beaune, *In Geometriam Renati Des Cartes notœ breves*, in Descartes (1659/1661), *op. cit. in* n. 13, 119-161. Voir en particulier p. 142.
[21] Frans van Schooten, *Exercitationes mathematicarum* (Leiden : Johannis Elsevirii, 1657). Cet ouvrage fait aussi partie des livres de jeunesse de Newton.
[22] Philippe de Lahire, *Nouveaux elemens des sections coniques, les lieux géométriques, la construction, ou effection des équations* (Paris : André Pralard, 1679).
[23] Jacques Ozanam, *Traité des lignes du premier genre* (Paris : Estienne Michallet, 1687).
[24] Pour les résultats de ce paragraphe, j'ai analysé les textes cités par Carl B. Boyer dans *History of Analytic Geometry* (New York : Scripta Mathematica, 1956), notamment dans le chapitre dévolu aux commentateurs de Descartes et de Fermat.

disposition[25]. » Sa proposition consiste à regrouper les lignes degré par degré, en incluant au passage les lignes droites dans la classification :

> Les lignes du premier degré, c'est-à-dire les droites, revendiquent pour elles-mêmes la première espèce de lignes ; les lignes du second degré la deuxième, c'est-à-dire le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse ; la troisième, les courbes cubiques (représentant la troisième puissance) ; la quatrième, quadratoquadratiques, etc.

Un autre exemple connu est celui de Jacques Bernoulli, qui a lui aussi exprimé ses réserves quant à la classification cartésienne, et a préféré rassembler les lignes degré par degré[26].

Notons enfin que l'*Application de l'algèbre à la géométrie* de Nicolas Guisnée[27] est un exemple de texte qui ne se présente pas comme une critique de *La Géométrie*, tant s'en faut, mais qui introduit et utilise une classification des lignes courbes par genres différente de celle de Descartes[28]. Chaque genre y rassemble en effet les lignes courbes définies par une équation d'un degré donné : « Lorsque l'une ou toutes les deux [inconnues], ou leur produit, a trois dimensions : comme $x^3 + axy = a^3$ [...], l'équation est du *troisième degré*, & la courbe dont elle exprime la nature, est du *second genre*, & ainsi de suite », le n-ième genre étant ainsi formé des courbes correspondant à une équation du $(n + 1)$-ième degré. Il est en outre intéressant de noter que pour Guisnée, « c'est le degré d'une équation indéterminée qui fait connoître que la courbe dont elle exprime la nature est plus ou moins simple », signifiant donc que les genres les plus bas correspondent aux lignes les plus simples.

---

[25] Cet extrait et celui cité plus bas sont issus de la traduction française de la lettre, donnée dans Pierre Fermat, *Œuvres de Pierre Fermat,* trad. par Paul Tannery, avec des comment. de Roshdi Rashed, Christian Houzel et Gilles Christol, t. 1, La théorie des nombres (Paris : Blanchard, 1999), 491-497 ; voir aussi Mahoney, *op. cit. in* n. 14, p. 141-142. La *Dissertation en trois parties* est reproduite dans Fermat, *op. cit. in* n. 14, p. 118-132. D'après Mahoney, *op. cit. in* n. 14, p. 130, elle aurait probablement été écrite au début des années 1640.

[26] La critique de Bernoulli est liée aux équations qui permettent à Descartes de résoudre le problème de Pappus. Voir Jacques Bernoulli, *Notae et animadversiones tumultuariae in universum opus*, in René Descartes, *Geometria*, trad. par Frans van Schooten, avec des comment. de Florimond De Beaune, Frans van Schooten, Jan Hudde, Hendrik van Heuraet, Jan de Witt et Jacques Bernoulli (Frankfurt am Main : Friderici Knochii, 1695), 423-468. Voir aussi les pages 246-255 de Clara Silvia Roero, *Geometria algebrica. Introduzione*, in Jacques Bernoulli, *Die Werke von Jakob Bernoulli. Band 2: Elementarmathematik*, Clara Silvia Roero et Tullio Viola (éds.) (Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 1989), 237-260. Sur la critique de Descartes par Bernoulli, voir enfin les pages 358-359 et 365 de Henk J. M. Bos, Arguments on Motivation in the Rise and Decline of a Mathematical Theory; the "Construction of Equations," 1637 – ca. 1750, *Archive for History of Exact Sciences*, 30 (1984), 331-380.

[27] Nicolas Guisnée, *Application de l'algèbre à la géométrie* (Paris : Boudot et Quillau, 1705), 19 pour les deux citations qui suivent.

[28] Au sujet de ce traité de Guisnée, voir Jeanne Peiffer, Annotations marginales de Montesquieu à Nicolas Guisnée, *Application de l'algèbre à la géométrie*, in Rolando Minuti (éd.), *Œuvres complètes de Montesquieu*, t. 17. Extraits et notes de lecture II (Paris : ENS Éditions et Classiques Garnier, 2017), 107-184.

1.2 Ordres et genres newtoniens

Comme écrit précédemment, la classification de Newton est exposée dans le paragraphe introductif de l'*Enumeratio*, où les courbes sont aussi différenciées des lignes. Ces dernières sont classées en ordres « d'après les dimensions de l'équation exprimant la relation entre abscisse et ordonnée, ou, ce qui revient au même, d'après le nombre de points en lesquels elles peuvent être coupées par une ligne droite[29]» : le n-ième ordre est ainsi formé des lignes définies par une équation du n-ième degré, ce qui correspond à celles ayant au plus n points d'intersection avec une droite. Les courbes sont quant à elles divisées en genres, le n-ième genre étant constitué de celles définies par une équation du degré $n + 1$, de sorte que, par exemple, « une courbe du second genre est la même chose qu'une ligne du troisième ordre[30] ».

On retrouve donc la classification des courbes qui a aussi été donnée par Guisnée[31], ainsi que celle des lignes par Fermat, quoique ce dernier ait utilisé plutôt les taxons d'espèces. Deux éléments démarquent toutefois nettement Newton de ces deux auteurs. Le premier est la caractérisation des lignes définies par une équation du n-ième degré par le nombre de leurs points d'intersection avec une droite quelconque. Si cette propriété, ou sa version plus générale selon laquelle deux lignes courbes correspondant respectivement à des équations des n-ième et m-ième degrés s'intersectent en nm points au plus, était implicitement utilisée par Descartes[32], elle se trouve écrite en toutes lettres et mise en pleine lumière dès la première phrase de l'*Enumeratio*[33]. Comme nous le verrons, cette propriété sera prise plus tard comme définition même de l'ordre d'une (ligne) courbe par des mathématiciens cherchant à éviter tout recours aux équations entre coordonnées.

---

[29] « *Lineae Geometricae secundum numerum dimensionum aequationis qua relatio inter Ordinatas & Abscissas definitur, vel (quod perinde est) secundum numerum punctorum in quibus a linea recta secari possunt, optimè distinguuntur in Ordines* ». Newton, *op. cit. in* n. 11, p. 139. Mes traductions sont basées sur la version anglaise de l'*Enumeratio* : Christopher R. M. Talbot, *Sir Isaac Newton's Enumeration of Lines of the Third Order* (London : Bohn, 1860).

[30] « *Curva secundi generis eadem cum Linea Ordinis tertii*. » Newton, *op. cit. in* n. 11, p. 139.

[31] Le livre de Guisnée est publié un an après l'*Enumeratio* mais n'y fait pas référence. Réciproquement, Newton ne cite aucun ouvrage antérieur.

[32] Voir Bos, *op. cit. in* n. 16, p. 360.

[33] La version plus générale du théorème (qui est une version faible de ce qu'on connaît aujourd'hui comme le théorème de Bezout) est donnée sans démonstration dans les *Principia Mathematica*, à travers plusieurs cas correspondant aux premiers degrés. Voir Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Londres : Joseph Streater, 1687), p. 106. Newton y affirmait par exemple qu'une section conique et une « courbe de la troisième puissance » peuvent se couper en six points.

L'autre nouveauté newtonienne est l'emploi du mot « ordre », aucun des textes publiés entre *La Géométrie* et l'*Enumeratio* ne l'utilisant pour désigner des catégories de lignes courbes. Attardons-nous un peu sur ce point terminologique.

D'abord, le vocabulaire des lignes et de leurs ordres est en fait utilisé surtout dans le titre et le paragraphe introductif de l'*Enumeratio*. Le reste du texte, en revanche, est écrit en faisant presque exclusivement référence aux courbes et aux genres : l'objectif principal est ainsi de classifier les courbes du second genre en soixante-douze espèces[34]. À l'issue de cette classification, Newton fait aussi remarquer que les genres sont stables par projection, c'est-à-dire que la projection d'une courbe d'un genre donné appartient au même genre, et que cinq courbes particulières suffisent pour engendrer, par projection, toutes les courbes du second genre[35].

Si la terminologie des ordres est donc très visible par sa présence dans le titre et les premières lignes du texte, c'est plutôt celle des genres (et des espèces) qui apparaît de façon effective dans le corps de l'*Enumeratio*.

Ensuite, un examen de certains manuscrits de Newton concernant la géométrie, dont plusieurs versions antérieures de l'*Enumeratio*, montre une évolution remarquable du vocabulaire classificatoire des lignes courbes. Vers 1667/1668, les objets qui allaient être désignés comme des lignes du troisième ordre sont en effet encore principalement appelés « courbes de la troisième dimension », même si Newton écrit aussi que « les courbes diffèrent en genres, qui diffèrent en dimensions[36] ». De rares ordres surviennent, et désignent alors des catégories intermédiaires (non systématisées) entre genres et espèces[37].

La notion d'ordre, dans un sens qui se rapproche de celui exposé dans l'*Enumeratio*, apparaît dans deux manuscrits de la fin des années 1670. L'un d'eux est dévolu aux « erreurs dans la

[34] Les espèces ne sont pas caractérisées par une définition claire ou donnée *a priori*. Le mot est plutôt utilisé pour désigner des types de courbes auxquels aboutit la discussion de Newton. Quatre espèces sont oubliées et seront mises en évidence par certains de ses successeurs. Voir Guicciardini, *op. cit. in* n. 14, p. 109-136 et Walter William Rouse Ball, On Newton's Classification of Cubic Curves, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 22 (1891), 104-143.

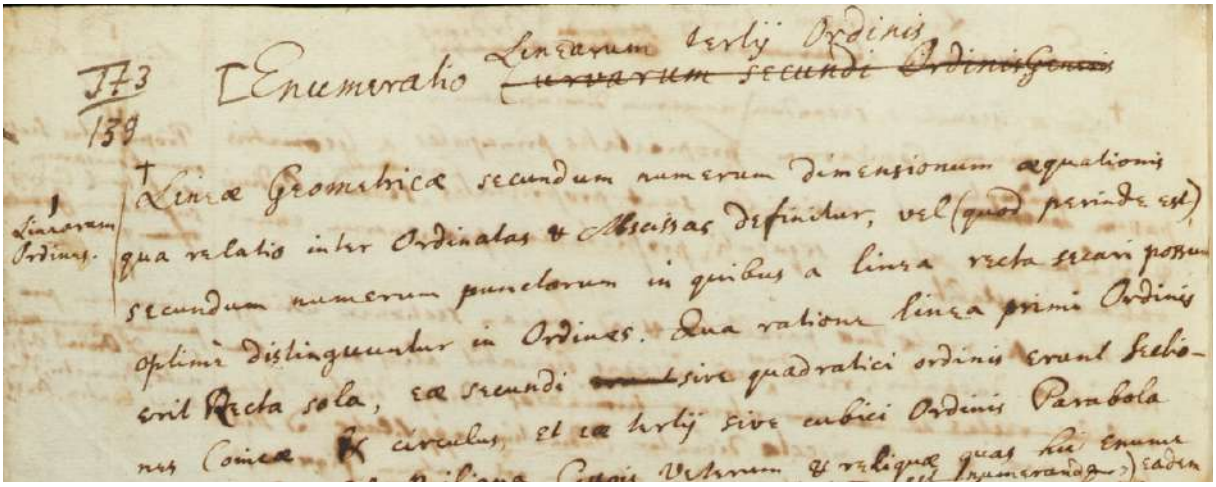
[35] Voir la section V de l'*Enumeratio*. Il serait tentant de voir dans ce dernier résultat une classification des courbes du second genre en cinq catégories définies par une propriété d'invariance par projection et caractérisées chacune par un représentant particulier, mais les paragraphes correspondants me semblent trop allusifs pour interpréter la génération par les ombres comme un véritable versant du problème classificatoire.

[36] « *Enumeratio curvarum trium dimensionum* ». Voir Isaac Newton, *The Mathematical Papers of Isaac Newton. Volume II: 1667–1670,* Derek T. Whiteside (éd.) (Cambridge : Cambridge University Press, 1968), p. 10, 18, 36, et « *Curvae genere differunt quae differunt dimensionibus* », ibid., p. 96. Je me suis ici aidé des traductions anglaises de D. Whiteside données dans l'édition citée des *Mathematical Papers* de Newton.

[37] Newton, *op. cit. in* n. 36, p. 96.

Géométrie de Descartes » ; on y trouve de nombreuses expressions comme « les courbes de l'ordre cubico-cubique[38]» — Derek Whiteside avait déjà relevé l'apparition particulière du mot « ordre » dans ce contexte de critique de la *Géométrie*[39]. Le deuxième manuscrit en question est un autre brouillon de l'*Enumeratio*, où Newton, après avoir brièvement mentionné les « courbes de la troisième dimension », fait référence à ces dernières comme des « courbes du second ordre », des « courbes de l'ordre cubique », voire des « courbes cubiques[40] ».

Enfin, dans le manuscrit de l'*Enumeratio* de 1695 qui était destiné à l'imprimeur[41], Newton avait visiblement commencé par écrire tout son texte en ne parlant que de « courbes du second ordre », au sens de courbes définies par une équation du troisième degré, mais les occurrences du mot « ordre » avaient finalement été rayées et remplacées par « genre ». En outre, les ratures du titre et ce qui semble être l'insertion d'une feuille supplémentaire sur laquelle figure le premier paragraphe de la version imprimée (où est présentée la classification générale des lignes et des courbes) indiquent que ce premier paragraphe et la terminologie des lignes et des ordres ont été introduites en toute fin de procédé (voir la figure 2).


173
139
[Enumeratio Linearum tertij Ordinis ~~Curvarum secundi Ordinis~~
1 Linearum Ordines. Lineae Geometricae secundum numerum dimensionum aequationis
qua relatio inter Ordinatas & Abscissas definitur, vel (quod perinde est)
secundum numerum punctorum in quibus a linea recta secari possunt
optime distinguuntur in Ordines. Qua ratione linea primi Ordinis
erit Recta sola, eae secundi sive quadratici ordinis erunt Sectio-
nes Conicae & circulus, et eae tertij sive cubici Ordinis Parabola

---

[38] « *[C]urvas ordinis cubo cubici* », Isaac Newton, *The Mathematical Papers of Isaac Newton. Volume IV: 1674–1684,* Derek T. Whiteside (éd.) (Cambridge : Cambridge University Press, 1971), p. 342. Au sujet de ce texte, voir Massimo Galuzzi, I *marginalia* di Newton alla seconda edizione latina della *Geometria* di Descartes e i problemi ad essi collegati, in Guilia Belgioioso (éd.), *Descartes, il Metodo e i Saggi: atti del convegno per il 350º anniversario della pubblicazione del* Discours de la méthode *e degli* Essais (Firenze : Istituto della Enciclopedia italiana, 1990), 387-417.

[39] Newton, *op. cit. in* n. 38, p. 341.

[40] « *Curvae secundi ordinis* », « *curvas ordinis cubici* », « *curvis cubicis* », Newton, *op. cit. in* n. 38, p. 358, 360.

[41] Voir Isaac Newton, *The Mathematical Papers of Isaac Newton. Volume VII: 1691–1695,* Derek T. Whiteside (éd.) (Cambridge : Cambridge University Press, 1976), p. 588, ainsi que les manuscrits disponibles en ligne sur le site de la *Digital Library* de l'Université de Cambridge, https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03961/109.

Figure 2. Extrait du manuscrit de l'*Enumeratio*. Cette feuille semble avoir été ajoutée au dernier moment.

Cette évolution du vocabulaire classificatoire n'est pas commentée par Newton dans les manuscrits que j'ai parcourus, et je n'ai pas trouvé trace de ce sujet dans sa correspondance publiée[42], tant et si bien qu'il est difficile de l'interpréter de manière catégorique. Si le début de l'utilisation de la notion d'ordre comme taxon de courbes semble bien corrélé à une certaine mise à distance de la *Géométrie* de Descartes, il est un peu curieux que Newton ait choisi de reprendre la terminologie des genres et de lui superposer celle des lignes et des ordres uniquement dans le titre et l'introduction. Une explication pourrait être que Newton ait simplement opté pour le vocabulaire classificateur le plus courant à son époque.

En effet, plusieurs dictionnaires mathématiques du tournant du XVIII^e^ siècle montrent que la notion d'ordre n'était pas alors perçue comme une catégorie usuelle de classement. Par exemple, le *Dictionnaire mathématique* d'Ozanam[43] définit les genres des lignes courbes dans le sens de Descartes, alors que l'entrée correspondant à la notion d'ordre renvoie uniquement aux ordres architecturaux (ionique, corinthien...) et aux ordres de bataille. Il en va de même dans le *Mathematical Dictionary* de Joseph Raphson, qui s'inspire en fait de celui d'Ozanam et qui emploie d'ailleurs le mot anglais *genders* pour faire référence aux genres cartésiens de courbes[44]. Le *Mathematisches Lexicon* de Christian Wolff renvoie quant à lui seulement aux ordres architecturaux ; mais si l'entrée *Genus curvarum algebraicum* attribue la paternité de la notion de genre (ou *Geschlecht*, pour l'équivalent allemand choisi) à Descartes, la définition qui y est proposée est celle qui rassemble dans le n-ième genre les lignes (courbes) correspondant à une équation du $(n+1)$-ième degré[45]. Ainsi, si des notions mathématiques d'ordre, au sens classificateur, pouvaient exister au XVII^e^ siècle[46], il semble qu'elles aient été trop peu répandues pour apparaître dans les dictionnaires spécialisés.

---

42 Isaac Newton, *The Correspondence of Isaac Newton (7 volumes),* Herbert W. Turnbul, Joseph F. Scott, Alfred Rupert Hall et Laura Tilling (éds.), (Cambridge : Cambridge University Press, 1959-1977).

43 Jacques Ozanam, *Dictionnaire mathématique, ou idée générale des mathématiques* (Amsterdam : Huguetan, 1691).

44 Joseph Raphson, *A Mathematical Dictionary* (London : Nicholson, 1702).

45 Christian Wolff, *Mathematisches Lexicon* (Leipzig : Gleditisch, 1716).

46 Par exemple, dans son *Traité du triangle arithmétique* (vers 1654), Blaise Pascal reconnaît différents ordres de nombres figurés, dont le premier est formé de l'unité seule, le deuxième de tous les entiers naturels, le troisième des nombres triangulaires, etc. Il ne s'agit cependant pas d'une classification au sens strict du terme, puisque ces ordres ne sont pas disjoints : l'unité est commune à tous les ordres, le nombre 10 est à la fois dans le troisième et le quatrième ordre, etc. Voir Laurent Kyriacopoulos, Peut-on tout de même parler d'un « triangle de Pascal » ?, *Revue d'histoire des mathématiques*, 6 (2000), 167-217.

Cette constatation entre en écho avec l'examen de dictionnaires plus généraux, où la notion d'ordre renvoie à l'idée d'ordonnancement non nécessairement hiérarchisé plutôt qu'à une catégorie de classement scientifique, comme c'est le cas pour le genre. La première édition du dictionnaire de l'Académie française (1694) définit ainsi[47] en premier lieu le genre comme « ce qui est commun à plusieurs espèces différentes, ce qui a sous soi plusieurs espèces différentes », en prenant pour exemple « le genre animal [sous lequel] il y a deux espèces comprises, celle de l'homme, celle de la bête ». L'ordre, au contraire, renvoie principalement à l'« arrangement, [la] disposition des choses mises en leur rang[48] », même si certaines utilisations renvoient aussi à des regroupements d'entités, comme les neuf ordres des anges, l'ordre des chevaliers ou l'ordre des Frères mineurs.

Cette asymétrie existe aussi en histoire naturelle, puisque les classifications botanistes du XVII^e siècle sont principalement articulées en genres et espèces, dans leur sens relatif[49]. Ce n'est justement qu'à la toute fin du siècle que ces catégories deviennent fixes chez certains auteurs, et que des « classes » commencent à être introduites dans les hiérarchies ; quant aux ordres, ils ne le seront qu'au cours des premières décennies du XVIII^e siècle, dans les travaux de Linné lui-même[50].

Comme écrit précédemment, le choix de Newton de n'utiliser finalement que partiellement la notion d'ordre dans l'*Enumeratio* fait apparaître principalement la subdivision d'un genre en espèces : au vu de ce qui précède, il est possible que cela reflète une volonté de se conformer au mieux aux pratiques terminologiques de l'époque, la notion d'ordre n'étant alors pas courante pour désigner des catégories d'objets au sein de classifications. C'est néanmoins cette notion, et pas celle de genre, qui a été principalement reprise des travaux de Newton et est passée à la postérité.

1.3 Ordres, genres et degrés au XVIII^e siècle

[47] Des commentaires analogues peuvent être faits sur des dictionnaires d'autres langues, comme : John Kersey, *Dictionarium Anglo-Britannicum: Or, a General Dictionary* (London : Wilde, 1708).
[48] C'est bien dans ce sens qu'il faut comprendre la phrase de Descartes citée plus haut : « distinguer [les lignes courbes] par ordre en certains genres ».
[49] Rappelons que cela signifie que plusieurs genres correspondant à un niveau donné pouvaient eux-mêmes devenir des espèces d'un genre supérieur, etc.
[50] Alan G. Morton, *History of Botanical Sciences* (London, New York : Academic Press, 1981), ch. 6-7.

La première moitié du XVIII^e siècle voit la double classification des lignes en ordres et des courbes en genres continuer d'apparaître dans plusieurs ouvrages mathématiques[51]. Par exemple, un mémoire de Christophe-Bernard Bragelongne est dévolu à un « Examen des lignes du quatrième ordre ou courbes du troisième genre[52] », tandis que Colin Maclaurin rappelle dans son *Treatise of Algebra*[53] que les lignes courbes se divisent en ordres selon les dimensions de leurs équations (ou le nombre de points d'intersections avec une ligne droite), et indique que « les *lignes droites* constituent le *premier* ordre des lignes » avant d'aborder le cas du « *second ordre* des lignes, et *premier genre* des *courbes*[54] ».

Cependant, il est frappant que presque toutes les références qui mentionnent les courbes et leurs genres ne fassent intervenir ce vocabulaire que de manière superficielle, uniquement dans les titres (généraux ou de sections) ou de manière très réduite dans les énoncés et démonstrations de résultats — il s'agit donc de la situation exactement opposée à celle de l'*Enumeratio* de Newton. Si les genres au sens de Newton (ou de Guisnée) sont donc encore évoqués, ils n'apparaissent plus dans le cœur des textes et y laissent la place aux ordres.

Ce même phénomène s'observe dans l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de Gabriel Cramer, ouvrage célèbre du milieu du XVIII^e siècle[55]. Dans le préambule, Cramer rappelle en effet que « l'Algèbre seule fournit le moyen de distribuer les Courbes en Ordres, Classes, Genres & Espèces » et que « c'est à l'illustre Newton que la Géométrie est surtout redevable de cette distribution » (p. VIII). Plus loin, il définit l'ordre

[51] Dans cette section, je base mon étude sur l'ensemble des références citées dans Boyer, *op. cit. in* n. 24 et publiées entre le début du XVIII^e siècle et la fin des années 1820, moment où débutera notre prochaine section. Un certain nombre de ces textes ne font pas (ou presque pas) intervenir explicitement d'ordre ou de genre car, cantonnés aux cas des lignes définies par des équations des premier et deuxième degrés, ils utilisent plutôt le vocabulaire des « droites » et des « sections coniques ». Remarquons en outre qu'une partie des travaux qui portent sur les lignes d'ordres supérieurs sont des compléments ou des prolongements de l'*Enumeratio* de Newton.

[52] Christophe-Bernard Bragelongne, Examen des lignes du quatrième ordre ou courbes du troisième genre, *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France,* année 1730 (1732), 158-216, 363-434.

[53] Colin MacLaurin, *A Treatise of Algebra* (London : Millar & Nourse, 1748).

[54] « *[Curve lines] are divided into Orders according to the Dimensions of their Equations, or Number of Points in which they can intersect a strait Line. The* strait Lines *themselves constitute the* first *Order of Lines. [...] Those Curves whose equations are of* two *Dimensions constitute the* second Order *of Lines, and the* first Kind *of* Curves. » MacLaurin, *op. cit. in* n 53, p. 304-305. Remarquer l'équivalent *kind* choisi ici comme taxon anglais correspondant aux genres.

[55] Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève : Frères Cramer et Cl. Philibert, 1750). Au sujet de la composition et de la circulation de l'*Introduction* de Cramer, voir Thierry Joffredo, « Approches biographiques de l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de Gabriel Cramer », thèse de doct., Nancy : Université de Lorraine, 2017 ; Thierry Joffredo, Une analyse génétique de l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de Gabriel Cramer, *Revue d'histoire des mathématiques*, 25 (2019), 235-289.

d'une ligne à partir du degré de son équation[56] et démontre que le choix d'une origine et d'axes de coordonnées n'influe pas sur cette définition, ce qui est pour lui « ce qu'il y a de plus important à remarquer sur cette distribution des Lignes algébriques par Ordres » (p. 53).

Il précise aussi, dans une note de bas de page (p. 53) :

> Mr. Newton distingue les *Ordres des Lignes* & les *Genres des Courbes*. Comme le premier Ordre ne renferme que la Ligne droite [...], il appelle Courbes du premier Genre, les Lignes du second Ordre, Courbes du second Genre, les Lignes du troisième Ordre, & ainsi de suite. Quelque répugnance qu'on ait à s'écarter des dénominations établies par ce Grand Homme, il m'a paru que cette distinction génoit trop l'expression, & je me suis déterminé à dire indifféremment, Courbes ou Lignes du second Ordre, Courbes ou Lignes du troisième Ordre, &c.

La différence entre courbes et lignes disparaît donc pour des raisons de commodité du langage, et avec elle s'efface la notion de genre telle que l'entendait Newton. Cramer n'est pas explicite à ce sujet, mais il est possible que ce soient les ordres qui subsistent parce que leur numérotation est exactement alignée avec celle des degrés, ce qui participe aussi au processus de simplification terminologique. Le mot « genre » survit cependant : il désigne une sous-catégorie potentielle de chaque ordre, susceptible d'une propre ramification en espèces : « C'est par les Branches infinies qu'on divise les Courbes de chaque Ordre en leurs Genres, & c'est par les Points singuliers qu'on subdivise en Espèces les Courbes de chaque Genre. » (p. XVI).

Les classes, au contraire, ne sont pas dotées d'une telle signification technique et générale dans le préambule. Elles apparaissent au cours de la division par Cramer des lignes du quatrième ordre, qui fait suite à celle des lignes du troisième ordre en quatorze genres. Imitant la démonstration opérée pour ces dernières, Cramer commence par dégager huit cas d'équations à discuter, dont les trois premiers donnent différents genres. Mais à l'issue des calculs relatifs au cas suivant, Cramer avoue qu'« [o]n ne saurait énumérer tous les genres des courbes comprises dans ce IV^e^ *Cas* : mais on peut les réduire à cinq *Classes* » (p. 379).

[56] Cramer, comme Euler (cf. *infra*), énonce et démontre qu'une ligne du n-ième ordre est coupée en n points au plus par une droite quelconque, mais n'utilise pas ce résultat comme définition des ordres. Voir Cramer, *op. cit. in* n. 55, p. 62 ; Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum,* t. 2 (Lausanne : Marcum-Michaelem Bousquet, 1748), p. 33.

Le choix de l'échelle classificatoire adéquate est donc induit par des raisons techniques concrètes, liées à la situation traitée : les genres se surmultipliant, leur énumération complète n'est plus tenable et Cramer se replie alors sur une catégorie de classe intermédiaire entre l'ordre et le genre.

On peut trouver ce même type de discussion dans un autre ouvrage du milieu du siècle, au moins tout aussi célèbre que celui de Cramer : l'*Introductio in analysin infinitorum* de Leonhard Euler, et plus précisément son deuxième livre, qui se rapporte à la géométrie des lignes courbes et, dans une moindre mesure, des surfaces[57]. Euler définit lui aussi les ordres des lignes courbes d'après le degré des équations et remarque qu'ils ne dépendent pas du choix des axes, mais il ne mentionne pas les genres au sens de Newton. Un mot est tout de même glissé sur la terminologie des courbes : « le premier ordre comprend la seule ligne droite, qui est la plus simple de toutes les lignes ; & comme par cette raison le nom de courbe ne convient pas au premier ordre, nous ne distinguerons pas les différents ordres par le nom de *lignes courbes*, mais simplement par le terme générique de *lignes* ; ainsi le premier ordre des lignes ne renferme aucune courbe, & comprend uniquement la ligne droite » (p. 26).

Les divisions des différents ordres de lignes sont alors faites en genres ou en espèces, notamment pour les deuxième et troisième ordres. Pour les lignes du troisième ordre, Euler explique au préalable que leur classification en espèces est faite en regard de la nature et du nombre de branches infinies. Après avoir dégagé seize espèces de cette sorte, il ajoute (p. 126) :

> La plupart de ces espèces sont si étendues qu'elles comprennent chacune des variétés assez considérables, si on a égard à la forme qu'elles présentent dans un espace fini. C'est pour cette raison que Newton a multiplié le nombre des espèces, afin de distinguer l'une de l'autre les courbes qui offrent des différences notables dans cet espace. Il sera donc plus à propos d'appeler *Genres* ce que nous avons désigné par *Espèces*, et de rapporter aux espèces les variétés qu'elles renferment.

[57] Euler, *op. cit. in* n. 56. Les traductions qui suivent sont celles de Leonhard Euler, *Introduction à l'analyse infinitésimale,* t. 2, trad. par Jean Baptiste Labey, (Paris : Barrois, 1797). Les pages données sont celles de l'édition originale en latin.

Euler revient donc sur la terminologie même des espèces, et propose de les renommer en genres en raison du nombre important de sous-collections qui peuvent y être distinguées en fonction de la forme des lignes, et qui deviennent alors des espèces[58].

À l'image de ce qu'on observe dans ces livres de Cramer et d'Euler, l'usage de n'employer que le vocabulaire des lignes et des ordres (et de réserver celui de genres à d'éventuelles sous-divisions) semble se généraliser au cours de la deuxième moitié du XVIIIe siècle. Mais deux autres mouvements terminologiques parallèles peuvent aussi être repérés : d'une part, celui (déjà constaté) consistant à estomper la distinction entre lignes et courbes ; d'autre part, celui substituant le mot « degré » au mot « ordre ». Par exemple, dans un mémoire de 1731 (publié en 1764), Alexis Clairaut ne parle que de courbes, qu'il précise indifféremment comme étant « du 3me degré » ou « du 3me ordre[59] », tandis que dans un article publié quelques pages plus loin dans le même volume du même périodique, François Nicole parle plutôt des « lignes du 3me ordre[60] ». Ces mêmes tendances se poursuivent jusqu'au début du XIXe siècle : ainsi, alors que Jean-Baptiste Biot[61] parle aussi bien des « courbes du second ordre » que des « courbes du second degré », Joseph-Diez Gergonne[62] fait côtoyer les « lignes du second ordre » et les « courbes des degrés supérieurs », et Ferdinand Möbius se réfère aux lignes du n-ième ordre (« *Linien* n*ten Ordnung*[63] »). Notons enfin que la substitution inverse, consistant à différencier les équations en ordres plutôt qu'en degrés, est également observable, bien que plus rarement[64].

1.4 Des ordinaux

Le vocabulaire des lignes et des courbes, mais aussi des ordres et des degrés, commence donc à s'entremêler dans les écrits des mathématiciens de cette période, signe probable de la banalisation de ces notions et du lien même entre équations et courbes : ces objets étant plus

[58] Ce commentaire d'Euler rappelle que genres et espèces sont encore pensés de manière relative.
[59] Alexis Clairaut, Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque, par un plan donné de position, *Histoire de l'Académie royale des sciences*, année 1731 (1764), 483-493. Citations p. 489-490.
[60] François Nicole, Manière d'engendrer dans un corps solide toutes les lignes du troisième ordre, *Histoire de l'Académie royale des sciences*, année 1731 (1764), 494-510. Citation p. 494.
[61] Jean-Baptiste Biot, *Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré* (Paris : Duprat, 1802).
[62] Joseph-Diez Gergonne, Essai sur l'expression analitique des courbes, indépendamment de leur situation sur un plan, *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 4 (1813/1814), 42-55.
[63] August Ferdinand Möbius, *Der barycentrische Calcul* (Leipzig : Barth, 1827). Citation p. 82.
[64] Cramer, *op. cit. in* n. 55, p. 54 ; Euler, *op. cit. in* n. 56, p. 24.

couramment et plus immédiatement mis en relation, les noms de leurs taxons respectifs tendent dans le même temps à être échangés entre eux[65].

Il est cependant une caractéristique très stable dans les textes observés, à savoir que « ordre », « genre » et « degré » désignent invariablement des catégories de courbes ou d'équations, et pas les nombres associés à ces objets et servant à les définir, comme les dimensions des équations ou le nombre de points d'intersection d'une courbe avec une droite.

Nous l'avons vu dans toutes les citations données plus haut, dans lesquelles ordres, genres et degrés sont toujours qualifiés par des nombres ordinaux et joints aux objets correspondants par des prépositions marquant l'appartenance, comme dans le groupe nominal « une ligne du troisième ordre ». D'autres indices vont dans le même sens : Cramer, par exemple, parle bien du « nombre qui marque l'ordre » d'une ligne (p. 62), et même une expression comme « une ligne de l'ordre n » (p. 76) fait bien référence à une acception ordinale des ordres, qui sont numérotés par les nombres n : à titre de comparaison, l'expression « une ligne d'ordre n » (qu'on trouvera seulement à partir du XIX[e] siècle) manifesterait plutôt une acception cardinale de l'ordre, qui serait ainsi *égal* à n.

Il en est de même pour les degrés d'équations. Ainsi, Silvestre-François Lacroix écrit qu'« il y a [...] *dans* tous les degrés, des équations qui n'expriment qu'un assemblage de lignes droites[66] ». Biot rappelle quant à lui qu'« on classe les courbes algébriques d'après le degré de leur équation » et que « l'ordre de la courbe est marqué par l'exposant de ce degré[67] » : ni l'ordre, ni le degré ne sont des nombres, au contraire de l'exposant du degré.

Ces traces textuelles montrent bien qu'il n'y a pas d'amalgame entre les taxons et les nombres qui les caractérisent, bien que les mathématiciens de l'époque soient bien sûr très au fait des liens forts qui les unissent. Le glissement sémantique consistant à utiliser les termes d'ordre, classe, degré et genre pour nommer les nombres associés s'observe à partir de la fin des années 1830, même si de nombreuses désignations utilisées après cette date attesteront encore de leurs origines catégorielles.

[65] Je n'exclus bien entendu pas que d'autres facteurs puissent contribuer à ces amalgames terminologiques.
[66] Sylvestre François Lacroix, *Traité du calcul différentiel et intégral,* t. 1 (Paris : Duprat, 1797), p. 338. Mon soulignement.
[67] Biot, *op. cit. in* n. 61, p. 145.

2. Les classes et la dualité

Le sens des classes des courbes algébriques tel qu'il est connu à la fin du XIX^e siècle se fixe au cours de la polémique qui a vu s'affronter, au début de ce siècle, Gergonne et Jean-Victor Poncelet (et dans laquelle Julius Plücker est aussi impliqué), autour de questions de priorité et de contenu mathématique relatives à la dualité projective. Si cet épisode a déjà été largement documenté en regard de diverses problématiques historiques[68], j'y reviens ici encore une fois en insistant sur le cadre classificatoire dans lequel il s'inscrit et sur les questions terminologiques qu'il véhicule.

2.1 Classer en classes

Pour Gergonne[69], il existe en géométrie projective[70] un principe de dualité qui affirme que chaque théorème possède un théorème jumeau, obtenu à partir du premier par simple échange des mots « points » et « droites », ainsi que de certains verbes et adjectifs afférents. Ainsi, un certain nombre de points situés sur une droite ont pour équivalents duaux un même nombre de droites concourant en un point ; de même, des points appartenant à une courbe correspondent à autant de droites tangentes à une autre courbe.

Gergonne affirmait en outre que deux courbes se correspondant de manière duale sont nécessairement du même ordre. Or, ce résultat avait tout de suite été signalé comme inexact par Poncelet[71], de même que d'autres propriétés qui en découlent. Par exemple, mise en conjonction avec la propriété énoncée dans le paragraphe précédent et le fait qu'une courbe

[68] Voir en particulier Mario H. Otero, Joseph-Diez Gergonne (1771-1859) : histoire et philosophie des sciences, *Sciences et techniques en perspective*, 37 (1997) ; Jeremy Gray, *Worlds out of Nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century* (London : Springer, 2010) ; Jemma Lorenat, Polemics in Public: Poncelet, Gergonne, Plücker, and the Duality Controversy, *Science in Context*, 28/4 (2015), 545-585 ; Frank Etwein, Jean-Daniel Voelke et Klaus Volkert, *Dualität als Archetypus mathematischen Denkens – Klassische Geometrie und Polyedertheorie*, avec des contributions de Jean-Pierre Friedelmeyer et Erhardt Scholz (Göttingen : Cuvillier Verlag, 2019).

[69] Joseph-Diez Gergonne, Recherches sur quelques lois générales régissant les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres, *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 17 (1826/1827), 214-252.

[70] La géométrie projective se caractérise essentiellement par la prise en compte d'objets géométriques situés « à l'infini », de sorte que, par exemple, deux droites parallèles s'intersectent en un point à l'infini.

[71] Jean-Victor Poncelet, Note sur divers articles du *Bulletin des sciences* de 1826 et de 1827, relatifs à la *Théorie des polaires réciproques*, à la *dualité* des propriétés de situation de l'étendue, etc. *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*, 8 (1827), 109-117.

du n-ième ordre possède n points d'intersection avec une droite donnée, la conservation de l'ordre par dualité impliquait la possibilité de tirer, à partir d'un point donné du plan, n tangentes à une courbe de cet ordre. Un autre résultat erroné, obtenu par dualité à partir du théorème de Bezout, était que deux courbes des n-ième et m-ième ordres possèdent nm tangentes communes[72].

En réponse à cela, Gergonne avait admis qu'il n'aurait pas dû affirmer que la courbe duale à une courbe d'ordre donné est du même ordre que celle-ci. Pour assurer cependant la validité des théorèmes obtenus par dualité, il expliquait qu'il fallait différencier les catégories de courbes initiales de celles obtenues par dualité : dans les faits, il s'agissait de remplacer « ordre » par « classe » pour ces dernières. Ainsi, à l'existence des n points d'intersection d'une courbe du n-ième ordre avec une droite, correspond l'existence de n tangentes passant par un point donné à une courbe de n-ième classe. La version correcte du dual du théorème de Bezout est quant à elle que deux courbes des n-ième et m-ième classes possèdent nm tangentes communes.

Attardons-nous sur quelques détails de cette solution apportée par Gergonne. De manière frappante, l'article rectificatif[73] inscrit le problème dans un contexte classificatoire dès son commencement : « L'habitude que l'on a contractée, depuis Descartes, de représenter les lignes [...][74] courbes par des équations entre deux [...] variables, a conduit naturellement à les classer d'après le *degré* plus ou moins élevé de ces équations que l'on a dit aussi être celui de ces lignes » (p. 149-150). Gergonne poursuit en rappelant que cette classification est néanmoins incompatible avec la géométrie de situation, dans laquelle ni axes ni coordonnées ne peuvent être employés, et, par conséquent, que « le mot *degré*, pris dans son sens qu'on y attache habituellement, y est un mot tout-à-fait vide de sens » (p. 150). Il ajoute cependant qu'un autre « mode de classification qui a un rapport très-intime avec celui-là » (p. 150) consiste à distribuer les courbes selon le nombre de points d'intersection qu'elles sont susceptibles de présenter avec une droite donnée.

[72] Comme plusieurs passages le montrent (voir par exemple la citation donnée *infra*), Gergonne envisageait ces questions de comptage en incluant tant des objets réels qu'« idéaux ». Du point de vue des coordonnées (ce qui n'est pas l'approche de Gergonne), cela signifie que celles des objets considérés peuvent être des nombres réels ou complexes.

[73] Joseph-Diez Gergonne, Rectification de quelques théorèmes énoncés dans les *Annales*, *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 18 (1827/1828), 149-154.

[74] Dans cet article correctif, Gergonne parle tout aussi bien des courbes que des surfaces, qu'il avait incluses dans sa présentation de la dualité. J'ai ôté ici et dans la suite tout ce qui se rapporte à ces dernières.

Ayant ainsi débarrassé le fondement de la classification usuelle des courbes de toute considération relative aux coordonnées, Gergonne peut alors lui appliquer le principe de dualité : cela engendre une nouvelle classification consistant à rassembler les courbes en fonction du nombre de tangentes passant par un point donné qu'elles peuvent avoir.

L'introduction de cette nouvelle classification est immédiatement suivie d'une réflexion sur la terminologie[75] :

> Nous aurions présentement besoin de deux mots, l'un pour exprimer qu'une courbe est telle qu'une droite la coupe en m points [...], et l'autre pour exprimer qu'une courbe est telle qu'on peut lui mener m tangentes par un même point du plan [...] ; mais, pour ne pas introduire ici des mots nouveaux pour lesquels la répugnance du public, bien qu'assez peu fondée peut-être, est néanmoins presque invincible, nous adopterons le mot *degré* pour le premier cas, et le mot *classe* pour le second, c'est-à-dire que nous introduirons les définitions suivantes :

[75] Gergonne, *op. cit. in* n. 73, p. 151.

Définition I. Une courbe plane est dite du $m^{\text{ième}}$ degré, lorsqu'elle a avec une même droite m intersections réelles ou idéales.

Définition I. Une courbe plane est dite de $m^{\text{ième}}$ classe, lorsqu'on peut lui mener d'un même point m tangentes réelles ou idéales.

Les mots « degré » et « classe » sont donc choisis car ils sont censés ne pas être exotiques aux yeux des lecteurs de Gergonne. Le premier, s'il est redéfini dans le cadre de la géométrie pure, garde *in fine* le sens technique qu'on lui connaissait déjà dans la deuxième moitié du XVIII[e] siècle, en tant que synonyme d'ordre. Quant au second, il se voit affecté d'une signification nouvelle, qui est celle qu'on retrouvera tout au long des XIX[e] et XX[e] siècles. En revanche, bien que ses occurrences originelles chez Gergonne n'aient pas été toutes fautives, le mot « ordre » est quant à lui complètement évacué, probablement parce que c'est son emploi à mauvais escient qui cristallisait les critiques.

Cette révision de la dualité ne met toutefois pas son auteur à l'abri d'une nouvelle salve de blâmes de la part de Poncelet, qui lui reproche de « torturer le sens des mots, en admettant simultanément deux classifications essentiellement distinctes pour ces courbes [...], chose jusqu'alors inusitée en mathématiques, et qu'on ne saurait justifier sous aucun prétexte[76] ». Comparant avec sa propre approche, il souligne en outre que lui-même n'a « pas reculé devant la difficulté de conserver [à la classification] des courbes [sa] définition légitime et universellement [admise] » (p. 302).

Bien qu'ils visent un objectif opposé, ces commentaires n'entrent pas moins en écho avec ceux de Gergonne cités plus haut : les deux portent sur les aspects de classification et de dénomination, et montrent l'enjeu d'intelligibilité sous-jacent à l'introduction de mots nouveaux ou au recyclage de termes existants dans le discours mathématique[77].

La réaction de Poncelet montre par ailleurs à quel point la proposition d'une nouvelle classification des courbes, concurrente de celle organisée en ordres, pouvait ne pas aller de soi[78]. En particulier, il faut souligner que la distribution par classes proposée par Gergonne a

[76] Jean-Victor Poncelet, Sur la dualité de situation et sur la théorie des polaires réciproques, 2e article en réponse aux observations de M. Gergonne, mentionnées pag. 23, cahier de janvier du présent *Bulletin des Sciences*, et insérées dans le tome XVIII des *Annales de Mathématiques*, p. 125 et suiv., *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*, 9 (1828), 292-302. Citation p. 300.

[77] À ce sujet, voir aussi Lorenat, *op. cit. in* n. 68, p. 563, 579.

[78] Il est bien sûr délicat de déceler le point de vue strictement scientifique de Poncelet derrière le glacis polémique et d'estimer dans quelle mesure son opinion est représentative de celle de ses contemporains. Mais le fait même que Poncelet attaque son opposant sur ce point met en évidence que la question n'est pas triviale pour eux.

effectivement ceci d'original d'être pensée et présentée comme une alternative à celle par ordres (ou par degrés), opérant *a priori* au même niveau que celle-ci. Il ne s'agit pas pour lui de proposer une subdivision des ordres, comme c'était par exemple le cas pour les genres, classes et espèces de Cramer et d'Euler, ni de rappeler la distinction des lignes et courbes à l'aide de deux mots classificatoires différents : l'objectif est bien de présenter une autre manière de concevoir la division de l'ensemble de toutes les courbes algébriques, reflétant et donnant corps au principe de dualité que Gergonne cherche à défendre.

Cette mise en parallèle masque néanmoins la question de l'articulation effective des deux classifications : comme Poncelet ne manque pas de le faire remarquer[79], Gergonne ne mentionne pas le problème de savoir déterminer la classe d'une courbe dont l'ordre est donné, c'est-à-dire de calculer le nombre de tangentes passant par un point fixe que possède une courbe du n-ième ordre. Ce problème, qui avait justement été abordé par Poncelet une dizaine d'années auparavant sans qu'une réponse claire y soit apportée[80], est ainsi remis sur le devant de la scène puis intégré dans des articles publiés autour de 1830 qui réexposent la théorie de la dualité et les critiques contre Gergonne[81]. Quelques améliorations sont apportées à sa solution, mais c'est Plücker qui règlera la question de manière plus satisfaisante quelques années plus tard.

2.2 Autour de Julius Plücker

Plücker, qui est malgré lui le troisième participant à la polémique de la dualité, adopte rapidement les classes (et les degrés) de Gergonne, déjà dans un article publié en 1828 dans les *Annales* de ce dernier[82]. Si le lieu de publication pourrait laisser planer le doute sur son intention réelle d'utiliser la double classification de Gergonne[83], plusieurs publications

[79] Jean-Victor Poncelet, Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et des surfaces géométriques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 8 (1832), 21-41, 117-137, 213-252, 370-410. Voir p. 389 pour le point en question.

[80] Jean-Victor Poncelet, Solution du dernier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 36 de ce volume ; Suivie d'une théorie des *pôlaires réciproques*, et de réflexions sur l'élimination, *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 8 (1817/1818), 201-232.

[81] Jean-Victor Poncelet, Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 4 (1829), 1-71 ; Poncelet, *op. cit. in* n. 79.

[82] Julius Plücker, Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés, *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 19 (1828-1829), 97-106.

[83] Rappelons que le profond remaniement opéré par Gergonne sur un manuscrit que Plücker lui avait envoyé est une des étincelles ayant mis le feu aux poudres de la polémique. Voir Lorenat, *op. cit. in* n. 68. Au sujet de

postérieures montrent que Plücker a bel et bien endossé ces points de vue, à quelques modulations près.

Par exemple, dans un article du *Journal für die reine und angewandte Mathematik* de 1830 où il présente un nouveau système de coordonnées (dites « tangentielles ») associées non pas aux points mais aux droites du plan, Plücker explicite son adoption des classes et en profite pour revenir sur la distinction entre ordres et degrés :

> J'emploie ici le mot *classe* en suivant M. Gergonne, qui donne le nom de courbe de la $m^{\text{ième}}$ *classe* à une courbe à laquelle on peut en général tirer m tangentes à partir d'un point donné, de même qu'on appelle courbe du $m^{\text{ième}}$ *ordre*, une courbe coupée en m points par une droite. (Il me semble plus approprié d'utiliser ici le mot *ordre* à la place du mot *degré*, puisque qu'une courbe de la $m^{\text{ième}}$ classe est aussi représentée par une équation du $m^{\text{ième}}$ degré[84].)

Plücker réintroduit donc les ordres que Gergonne avait délaissés. La notion de degré est aussi reprise mais est réservée aux équations, tandis que les ordres et les classes concernent les courbes. Cette redistribution partielle des termes classificateurs est significative et montre à la fois l'importance et l'ambivalence des équations dans l'approche de Plücker : le degré d'une équation indique l'ordre de la courbe décrite lorsque les inconnues sont vues comme des coordonnées ponctuelles, alors qu'il s'agit de la classe quand les inconnues sont des coordonnées tangentielles.

Il apparaît dans d'autres publications de Plücker que son acceptation des classes de Gergonne ne se limite pas à la seule terminologie renvoyant au nombre de tangentes, mais comprend plus largement le contexte classificatoire dans lequel elles avaient été introduites : « Cette nouvelle classification des courbes me parait très importante ; en l'adoptant je me plais de reconnaitre que la méprise même d'un homme d'esprit porte ses fruits », écrit-il dans l'article

---

Plücker, voir Mechthild Plump, « Julius Plücker — Leben und Werk eines analytischen Geometers im 19. Jahrhundert », thèse de doct., Bergischen Universität Wuppertal, 2014.

[84] « Ich gebrauche hier das Wort *Classe* nach Hrn. Gergonne, der einer Curve, an die sich im Allgemeinen von einem gegebenen Puncte aus m Tangenten legen lassen, den Namen einer Curve $m$ter *Classe* giebt, dem analog, wie man einer Curve, die von einer geraden Linie in m Puncten geschnitten wird, eine Curve $m$ter *Ordnung* nennt. (Mir scheint es passender, hier das Wort *Ordnung* statt des Wortes *Grad* zu gebrauchen, weil auch eine Curve $m$ter Classe durch eine Gleichung $m$ten Grades dargestellt wird.) » Julius Plücker, Über eine neue Art, in der analytischen Geometrie Puncte und Curven durch Gleichungen darzustellen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 6 (1830), 107-146. Citation p. 109.

où il élucide le lien précis entre la classe et l'ordre d'une courbe[85] — plus précisément, il s'agit du lien entre la classe et le degré, le mot « ordre » n'étant curieusement jamais utilisé dans cet article, ce qui renvoie plus strictement aux choix de Gergonne. Le résultat, qui affine ce que Poncelet avait annoncé plus tôt, est qu'une courbe du m-ième degré a en général $m(m-1)$ tangentes passant par un point donné du plan, et que ce nombre diminue de $2N + 3M$ si la courbe possède N points doubles et M points de rebroussement.

Dans une publication suivante[86], trois formules analogues rejoignent celle-ci, donnant ce qui sera appelé plus tard les quatre formules de Plücker. La terminologie est encore celle des degrés et des classes (sans ordres), mais un autre phénomène intéressant est à remarquer, puisqu'on peut voir le degré et la classe d'une courbe désigner clairement des nombres, et non des catégories de courbes (p. 11) :

> Une courbe quelconque étant proposée, je désignerai 1° Par n son degré, ou le nombre de ses points d'intersection avec une ligne droite ; 2° Par m sa classe (mot introduit par M. Gergonne) ou le nombre de ses tangentes, passant par un même point [...].

Ce glissement de sens entre taxon et nombre peut aussi se voir dans le grand livre *Theorie der algebraischen Curven*[87], quoique de façon plus discrète : une grande majorité des mots classificatoires (ordre et classe pour les courbes, degré pour les équations) apparaissent comme des catégories, auxquelles se substituent parfois des interprétations directes en nombres. Par exemple, dans le passage relatif aux formules de Plücker, celui-ci parle d'une « courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre » et, au moment de récapituler ses résultats, indique que « n désigne l'ordre d'une courbe donnée [...] ou le nombre de points en lesquels [elle] est coupée par une droite[88] ».

2.3 La classe dans trois ouvrages

[85] Julius Plücker, Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 12 (1834), 105-108. Citation p. 105.

[86] Julius Plücker, Note sur les points singuliers des courbes, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2 (1837), 11-15.

[87] Julius Plücker, *Theorie der algebraischen Curven* (Bonn : Adolph Marcus, 1839).

[88] « *[E]ine Curve* n. *Ordnung* » et plus loin : « *Es bezeichne* n *die Ordnung einer gegebenen Curve [...] oder die Anzahl der Puncte, in welchen die gegebene Curve von einer gegebenen geraden Linie geschnitten wird* ». Plücker, *op. cit. in* n. 87, p. 210.

Parmi les autres travaux où l'on voit la classification par classes adoptée et attribuée à Gergonne[89], relevons le *Systematische Entwicklung* de Jacob Steiner[90] : ce premier exemple montre que cette classification a bien été reprise, dès le début des années 1830, par des mathématiciens n'ayant pas les mêmes prédilections géométriques que Plücker[91].

Deux décennies plus tard, si les classes semblent être devenues monnaie courante dans les livres avancés de géométrie, le nom de Gergonne n'apparaît plus systématiquement à côté de leur définition. Par exemple, dans un chapitre de son *Traité de géométrie supérieure* de 1852 où sont présentées les coordonnées tangentielles, Michel Chasles rappelle :

> On distingue les courbes ainsi représentées par une équation entre les coordonnées de leurs tangentes, par le degré de cette équation, et l'on appelle courbe de seconde ou troisième, etc. *classe* les courbes dont l'équation est du second, ou troisième, etc., degré.
>
> On peut dire aussi que la *classe* d'une courbe indique le nombre de tangentes, réelles ou imaginaires, qu'on peut lui mener par un point[92].

L'utilisation des adjectifs ordinaux « seconde » et « troisième », ainsi que celle du verbe « indique » (et pas « est égal à ») font bien référence aux classes en tant que taxons. Il en est d'ailleurs de même dans le chapitre consacré aux équations ponctuelles : les expressions qui y sont employées (« une équation du degré m », « une courbe du degré ou de l'ordre m ») renvoient encore à des acceptions ordinales du nombre m, même si la disparition des suffixes « -ième » tend à rapprocher le taxon du nombre qui le caractérise et le numérote. Il ne s'agit toutefois pas encore d'un glissement de sens complet vers le nombre lui-même, comme une expression « une courbe d'ordre m » le refléterait.

---

[89] Les résultats de cette section se basent sur une étude de l'ensemble des livres figurant dans les bibliographies générales des chapitres de l'*Encyklopädie* cités en introduction. Pour des raisons de place, seuls trois exemples sont brièvement décrits ici, qui me semblent représentatifs du corpus consulté. Dans le présent article, l'*Encyklopädie* est donc utilisée à la fois comme témoin de la structuration du savoir géométrique au tournant du XX[e] siècle et comme ressource bibliographique me permettant de comprendre la mise en place des classifications qui informent cette structuration. Les risques méthodologiques liés à ce double statut me semblent limités car les ouvrages listés par l'*Encyklopädie* ne sont jamais dévolus au sujet précis des classifications et n'ont pas été retenus pour ce sujet. La situation serait différente si je prétendais écrire une histoire des classifications à partir de livres qui auraient été sélectionnés par les auteurs de l'*Encyklopädie* pour alimenter ce thème-là.

[90] Jacob Steiner, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (Berlin : Fincke, 1832). Voir p. 149.

[91] L'opposition mainte fois décrite entre le géomètre analyste Plücker et le géomètre pur Steiner est prise comme objet d'étude dans Jemma Lorenat, Synthetic and Analytic Geometries in the Publications of Jakob Steiner and Julius Plücker (1827-1829), *Archive for History of Exact Sciences*, 70/4 (2016), 413-462. Au sujet du livre de Steiner, voir Viktor Blåsjö, Jakob Steiner's *Systematische Entwicklung*: The Culmination of Classical Geometry, *The Mathematical Intelligencer*, 31/1 (2009), 21-29.

[92] Michel Chasles, *Traité de géométrie supérieure* (Paris : Bachelier, 1852). Citation p. 356.

Une telle évolution peut être observée dans l'influent *Treatise on the Higher Plane Curves* de George Salmon, dans sa première édition de 1852[93], où la double classification par ordres et classes est d'ailleurs mise en exergue de manière bien plus spectaculaire. À peine passées l'introduction et la table des matières, le livre s'ouvre en effet sur des explications quant au fait qu'« il existe deux points de vue, aussi naturels l'un que l'autre, à partir desquels les courbes peuvent être considérées et selon lesquelles elles peuvent être classifiées[94] », consistant à les appréhender comme lieux d'un point mobile ou comme enveloppes d'une droite mobile. À ces deux conceptions sont associés deux types de classement, présentés comme universellement acceptés par les mathématiciens de l'époque :

> Ces deux principes de classification ont été adoptés par les géomètres modernes. Une courbe est dite du $n^{\text{ième}}$ *degré* ou *ordre* quand toute droite la rencontre en n points ; et de la $n^{\text{ième}}$ *classe* quand n tangentes peuvent lui être menées à partir d'un point quelconque donné[95].

Les phrases qui suivent précisent le lien entre ordres, classes et degrés des équations définissant les courbes, suivant qu'elles lient entre elles des coordonnées ponctuelles ou tangentielles.

La plupart des expressions employées dans le livre sont des désignations ordinales. À celles-ci s'en ajoutent quelques autres qui renvoient à une acception cardinale des ordres, degrés ou classes. Par exemple, Salmon énonce le résultat de Plücker sur la classe d'une courbe n'ayant comme singularités que des points doubles ordinaires de la manière suivante : « le degré de la réciproque [duale] d'une courbe du $n^{\text{ième}}$ degré avec δ points doubles est $n(n-1)-2\delta$ »[96]. Ce dernier nombre est donc bien égal au degré, et ne se contente pas de le numéroter. Plus loin, Salmon démontre que « le nombre de normales pouvant être menées d'un point donné est égal à la somme des degrés de la courbe et de sa réciproque[97]. » Il s'agit donc

---

[93] George Salmon, *A Treatise on the Higher Plane Curves* (Dublin : Hodges et Smith, 1852).
[94] « *There are two points of view, both equally natural, from which curves may be considered, and according to which they may be classified*. » Salmon, *op. cit. in* n. 93, p. 1.
[95] « *Both these principles of classification have been adopted by modern geometers. A curve is said to be of the* n^{th} degree *or* order *when any right line meets it in* n *points; and of the* n^{th} class *when* n *tangents can be drawn to it through any assumed point*. » Salmon, *op. cit. in* n. 93, p. 1.
[96] « *[T]he degree of the reciprocal of a curve of the n^{th} degree having δ double points* is $n(n-1)-2\delta$. » Salmon, *op. cit. in* n. 93, p. 63.
[97] « *[T]he number of normals which can be drawn to the curve from a given point is equal to the sum of the degrees of the curve and its reciprocal*. » Salmon, *op. cit. in* n. 93, p. 110.

d'additionner des degrés pour obtenir un certain nombre, ce qui montre encore une fois que les degrés sont bien considérés comme des nombres.

Comme chez Plücker, le glissement de sens entre taxon et nombre s'observe surtout dans des passages où il s'agit d'évaluer le degré (ou la classe) d'une courbe en fonction de certaines données. Le nombre associé au degré cherché se déterminant par des opérations sur d'autres nombres, ce glissement de sens apparaît ainsi comme un raccourci commode permettant d'éviter des formulations encombrantes comme : « une courbe du $(n(n-1)-2\delta)$-ième degré ». Les noms des taxons se transmettent donc aux nombres qui les définissaient, et ce changement de vocabulaire implique en particulier que diverses opérations arithmétiques peuvent être effectuées sur les ordres, les classes et les degrés.

2.4 Hiérarchiser ordres et classes

Un autre aspect relatif aux classifications des courbes ressort du traité de Salmon, une fois passées les premières pages : contrairement à la présentation initiale de Gergonne mettant sur un même niveau (dual) les classifications par ordres et par classes, et qui est reprise dans les premières lignes du traité, c'est tout de même la notion d'ordre qui continue de régir en première instance la conception des courbes, au détriment des classes.

La structuration même du livre témoigne de cela, puisque ce sont uniquement les ordres que l'on voit apparaître comme objets de certains chapitres : après un premier chapitre sur les coordonnées, les trois suivants concernent respectivement les propriétés générales des courbes du n-ième ordre, les courbes du troisième degré et celles du quatrième degré, tandis que les chapitres restants renvoient successivement aux courbes transcendantes, aux « méthodes générales » et à l'application du calcul intégral. Les classes n'interviennent donc pas dans l'organisation générale du savoir sur les courbes.

Je n'ai pas trouvé de commentaires explicites sur un tel choix, mais il me semble que deux facteurs peuvent l'éclairer. D'abord, si la primauté accordée à l'ordre semble briser la symétrie garantie par la dualité, cette même symétrie permet en principe de déduire de tout théorème sur des courbes d'ordre donné, un théorème analogue sur des courbes de classe donnée. Une théorie des courbes développée en s'appuyant en premier lieu sur la notion d'ordre donne donc de la visibilité à celle-ci tout en contenant implicitement la théorie duale, et dans la mesure où le passage de l'une à l'autre est connu des mathématiciens, le choix de l'une est suffisant pour présenter le savoir géométrique. En outre, et peut-être plus pragmatiquement, la préférence pour l'ordre pourrait résulter d'une simple inertie historique : les courbes et leurs ordres (avec, en creux, l'utilisation des équations entre coordonnées ponctuelles) ayant été de longue date les objets principaux à considérer, les mathématiciens se contentent de poursuivre cette voie, d'autant qu'adopter les classes comme divisions premières ne comporte pas d'avantage décisif.

Notons en outre que la hiérarchisation entre ordres et classes que Salmon choisit est également visible à un niveau plus fin d'observation, puisque les courbes des troisième et quatrième ordres sont chacune classifiées à l'aide des classes. Pour les premières, par exemple :

> La division la plus importante des courbes du troisième degré est faite en référence à la classe de la courbe. Nous avons vu [...] que si la courbe n'a pas de point multiple, elle sera de la sixième classe et [...] que la courbe peut avoir un point double, mais pas davantage. Les cubiques — pour éviter l'agaçante répétition de la périphrase « courbe du troisième degré », j'ai pris la liberté d'étendre l'utilisation du terme « cubique », appliqué en algèbre pour les équations du troisième degré — peuvent ainsi être sous-divisées en (A) des courbes de la sixième classe ; (B) des courbes de la quatrième classe, (a) avec un point nœud, (b) avec un point conjugué ; et (C) des courbes avec un point de rebroussement de première espèce, qui doivent être de la troisième classe[98].

La sous-classification consiste ainsi à répartir les courbes du troisième ordre en trois classes (les troisième, quatrième et sixième), déterminées par les points singuliers qu'elles sont susceptibles de présenter. En particulier, cela montre bien que toutes les classes

[98] « *The most important division of curves of the third degree is made with reference to the class of the curve. We have seen (Art. 70) that if a curve have no multiple point, it will be of the sixth class, and (Art. 34) that the curve may have one double point, but no more. Cubics—to escape the irksome repetition of the periphrasis, "curve of the third degree," I have taken the liberty to extend the use of the term "cubic," applied in algebra to equations of the third degree—may then be subdivided into (A) curves of the sixth class; (B) curves of the fourth class, (a) having a node, (b) having a conjugate points; and (C) curves having a cusp, which must be of the third class.* » La phrase sur le terme « cubique », mis ici en incise, est en note de bas de page dans le livre de Salmon. Salmon, *op. cit. in* n. 93, p. 131.

n'apparaissent pas au sein d'un ordre donné, les possibilités étant fixées par la formule de Plücker. Ce même phénomène implique d'ailleurs que les différents ordres ne sont pas divisés en un même nombre de classes : alors que le troisième ordre est constitué de trois classes, le quatrième en compte dix (voir la p. 195 du livre et la figure 3, *infra*).

Pour finir, on notera encore que cette classification des courbes du troisième ordre est celle qui est présentée par Salmon comme la plus importante, tandis que celle basée sur la considération des branches infinies (qui se rapproche de la classification de Newton ou de celle de Cramer en genres) est reléguée à un rang de moindre intérêt : le nombre de branches infinies étant « perdu par projection, [cette distribution] ne peut être considérée comme fondée sur des différences essentielles des courbes[99]. » On retrouve donc un commentaire sur la stabilité des notions classificatrices, comme on avait pu en voir pour les ordres ; il ne s'agit toutefois plus d'indépendance par rapport au choix des axes de coordonnées mais d'invariance vis-à-vis d'un type de transformations particulières, les projections. C'est cette invariance qui permet de délimiter les caractères pertinents (ou « essentiels », pour reprendre le terme de Salmon) d'une classification. Autrement dit, l'importance pour Salmon de la stabilité par projection influe directement sur son évaluation de ce qu'est une bonne classification des courbes. Des éléments analogues se retrouvent encore lors de discussions qui entourent l'introduction d'une nouvelle notion de genre.

3. De nouveaux genres

3.1 Fonctions abéliennes et courbes algébriques

Cette nouvelle notion, qui est celle qui apparaît dans l'organisation géométrique de la fin du XIX[e] siècle, est définie dans deux articles de 1865 d'Alfred Clebsch, publiés au sein d'un

[99] « *We might, however, have classified curves of the third [...] degree with reference to the number of their infinite branches; a distinction, however, which, being lost in projection, cannot be considered as founded on essential differences of the curves*. » Salmon, *op. cit. in* n. 93, p. 131. Bien que Salmon ne soit pas explicite sur ce point, il se peut qu'il vise ici la génération par les ombres des courbes du troisième ordre que Newton avait présentée.

même volume du *Journal für die reine und angewandte Mathematik*[100]. La classification par genres est fondée sur les valeurs d'un certain nombre p, qui jouait déjà un rôle de grande importance dans un mémoire de 1864 de Clebsch[101], consacré à l'application des fonctions abéliennes à la géométrie[102]. Plus précisément, il s'agissait d'un des principaux fruits du processus de relecture des travaux de Bernhard Riemann sur les fonctions abéliennes publiés quelques années auparavant. Le nombre p était aussi présent dans ces travaux, quoique sous un apparat différent, et à chaque p correspondait un certain type de fonctions abéliennes[103].

Le mémoire de 1864 de Clebsch consistait à saisir objets et techniques issus de la géométrie projective pour réécrire (et mieux comprendre) les idées de Riemann, puis à utiliser les nouveaux théorèmes obtenus pour démontrer divers résultats sur les courbes algébriques. Un des points cruciaux était que chaque courbe algébrique se voyait associée à un type de fonctions abéliennes et donc à un nombre p. Clebsch avait alors montré que pour une courbe du n-ième ordre, ce nombre est donné par

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d,$$

où d est le nombre de points doubles de la courbe — pour établir cette formule, Clebsch avait d'ailleurs utilisé l'estimation de Plücker donnant la classe d'une courbe[104].

Le premier article de 1865 où Clebsch présente la classification en genres s'ouvre sur des rappels sur le lien entre fonctions abéliennes et courbes algébriques, incarné en particulier par le nombre p. La classification est ensuite explicitée :

[100] Alfred Clebsch, Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 64 (1865), 43-65 ; Alfred Clebsch, Ueber die Singularitäten algebraischer Curven, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 64 (1865), 98-100.

[101] Alfred Clebsch, Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 63 (1864), 189-243.

[102] Les fonctions abéliennes sont des fonctions particulières de la variable complexe. Les plus simples d'entre elles sont les fonctions rationnelles, qui peuvent s'exprimer comme sommes, différences, produits et quotients de la variable. Un autre type de fonctions abéliennes sont les fonctions dites elliptiques.

[103] Notons que Riemann n'insistait pas sur cette manière-là de classifier les fonctions abéliennes. Voir Bernhard Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 54 (1857), 115-155. Les modalités techniques de la relecture par Clebsch des travaux de Riemann sont étudiées dans François Lê, "Are the *genre* and the *Geschlecht* one and the same number?" An inquiry into Alfred Clebsch's *Geschlecht*, *Historia Mathematica*, 53 (2020), 71-107.

[104] Les courbes considérées par Clebsch dans le mémoire de 1864 étaient supposées être sans point de rebroussement. Le cas où r tels points existent est traité dans Alfred Clebsch et Paul Gordan, *Theorie der Abelschen Functionen* (Leipzig : Teubner, 1866), la formule devenant $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$.

> Au lieu de classer les courbes algébriques en ordres et d'y faire des sous-divisions en fonction des nombres de points doubles et de rebroussement qu'elles présentent, on peut les classer en *genres* d'après le nombre p ; au premier genre appartiennent ainsi celles pour lesquelles $p = 0$, au deuxième genre celles pour lesquelles $p = 1$, etc. Les différents ordres apparaissent alors réciproquement comme des sous-divisions des genres, et chaque ordre apparaît dans tous les genres jusqu'à $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, où la courbe la plus générale (c'est-à-dire sans point double et sans point de rebroussement) du n-ième ordre trouve alors sa place[105].

Le choix de la terminologie des genres — ou des *Geschlechter*, pour reprendre le mot allemand d'origine — n'est commenté par Clebsch ni dans ses publications ni dans les lettres que j'ai pu parcourir. Aucune notion de genre ne semblant être fixée et utilisée à l'époque pour les courbes[106], il est possible que Clebsch ait juste opté pour un terme taxinomique à la fois relativement courant dans le langage scientifique et pour ainsi dire disponible pour être affecté d'une nouvelle définition.

Il est intéressant de remarquer que Clebsch présente sa classification par genres non pas comme un raffinement de celle par ordres, mais bien comme une alternative à cette dernière. En outre, contrairement au cas des classes, que Gergonne mettait *a priori* au même niveau que les ordres, il y a ici une volonté de renverser la classification usuelle, comme le montre l'indication de la sous-distribution des ordres dans chaque genre. Incarnation directe de cette nouvelle manière de penser l'organisation des courbes, l'article où celle-ci est introduite est dévolu à l'étude des courbes du premier genre (et d'ordre indifférent) ; un autre article, publié quelques pages plus loin dans le même volume du journal de Crelle, s'attache quant à lui à comprendre celles du deuxième genre[107].

[105] « *Statt die algebraischen Curven nach Ordnungen einzutheilen, und in diesen Unterabtheilungen zu machen nach der Anzahl der Doppel- und Rückkehrpunkte, welche dieselben aufweisen, kann man dieselben in* Geschlechter *eintheilen nach der Zahl* p*; zu dem ersten Geschlecht also alle diejenigen für welche* $p = 0$*, zum zweiten diejenigen, für welche* $p = 1$*, u.s.w. Dann erscheinen umgekehrt die verschiedenen Ordnungen als Unterabtheilungen in den Geschlechtern; und zwar kommt jede Ordnung in allen Geschlechtern vor bis zu* $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$*, wo dann die allgemeinste, d.h. von Doppel- und Rückkehrpunkten völlig freie Curve* n*ter Ordnung ihre Stelle findet.* » Clebsch, Ueber diejenigen ebenen Curven*…, op. cit. in* n. 100, p. 43.

[106] J'appuie cette affirmation sur l'étude des sources primaires utilisées tout au long de cet article. En particulier, aucun indice ne laisse penser que Clebsch ait songé aux genres de Descartes ou Newton. Le mot « genre » n'était pas non plus utilisé pour classer les fonctions abéliennes.

[107] Alfred Clebsch, Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 64 (1865), 210-270.

Comme le montre la citation précédente, la nouvelle distribution des courbes en genres suit exactement celle des fonctions abéliennes par l'intermédiaire du nombre p. Mais le transfert disciplinaire ainsi opéré s'avère être plus profond qu'une simple mise en parallèle des possibilités de classement, étant renforcé par un autre résultat liant les deux types d'objets : Clebsch explique ensuite qu'il est aussi possible de définir les courbes d'un même genre comme étant celles pouvant être paramétrées par les fonctions abéliennes[108] associées au même nombre p : par exemple, les courbes du premier genre, c'est-à-dire pour lesquelles $p = 0$, sont les courbes qui sont paramétrables par des fonctions rationnelles, tandis que celles du deuxième genre le sont par les fonctions elliptiques. Cette correspondance donnée par les paramétrages contribue ainsi à fournir à la nouvelle classification une cohérence accrue.

Si les paramétrages des courbes par les fonctions abéliennes forment ainsi une facette majeure de l'introduction des genres, c'est l'invariance du nombre p qui est davantage mise en lumière dans l'autre article où la classification en genres est définie[109] :

> D'après les principes donnés [dans mon mémoire de 1864], on peut classifier les courbes en *genres* d'après la classe de fonctions abéliennes auxquelles elles mènent, ou d'après la valeur correspondante du nombre p. Si une courbe se déduit de la courbe donnée de sorte qu'à chaque point ou chaque tangente de l'une corresponde en général seulement un unique point ou une unique tangente de l'autre, *les deux courbes mènent aux mêmes fonctions abéliennes*, appartiennent donc au même *genre*, et possèdent le même p.

Les transformations en jeu sont ce que Clebsch appelle ailleurs des « transformations univoques » (*eindeutige Transformationen*), qui seront appelées plus tard des transformations birationnelles[110].

---

[108] Dire qu'une courbe peut être paramétrée par des fonctions signifie que les coordonnées de ses points peuvent être décrites comme des fonctions d'une variable auxiliaire. Par exemple, le cercle $x^2 + y^2 = 1$ est paramétré par les fonctions trigonométriques grâce à la formule $(x, y) = (cos\,\theta, sin\,\theta)$.

[109] « *Nach den dort gegebenen Principien kann man die Curven in* Geschlechter *eintheilen nach der Classe Abelscher Functionen, auf welche sie führen, oder nach dem ihnen entsprechenden Werthe der Zahl* p. *Wenn nun aus der gegebenen Curve eine andere so abgeleitet wird, dass jedem Punkte oder jeder Tangente der einen Curve im Allgemeinen immer nur ein einziger Punkt oder eine einzige Tangente der andern entspricht*, so führen beide Curven auf dieselben Abelschen Integrale*, gehören also demselben* Geschlechte *an, und besitzen dasselbe* p. » Clebsch, Ueber die Singularitäten…, *op. cit. in* n. 100, p. 98. L'article cité de Riemann est celui portant sur les fonctions abéliennes : Riemann, *op. cit. in* n. 103.

Comme l'attestent à la fois leur numérotation ordinale (décalée par rapport aux nombres p) et le vocabulaire de l'appartenance des courbes qui les constituent, les genres sont bien présentés ici comme des catégories de courbes, et pas comme des nombres. Un ajustement sera toutefois rapidement opéré : par exemple, dans une note où Clebsch cherche à étendre la notion de genre aux surfaces algébriques, il rappelle :

> J'ai proposé de nommer *genre* d'une courbe le nombre $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$ (*deficiency* de M. Cayley[111]), n étant l'ordre de la courbe, d le nombre de ses points doubles ou de rebroussement[112].

Le genre désigne donc le nombre p lui-même, mais de nombreuses formulations rappelleront encore en filigrane son acception originelle. Outre les exemples que nous verrons plus bas, la suite de la citation donnée à l'instant en est un témoin direct, puisqu'il y est question de courbes « du même genre » ou « de ce genre », et pas « ayant le même genre » ou « ayant ce genre » :

> Toutes les courbes du même genre peuvent être transformées algébriquement dans une espèce particulière de ce genre [...] ; pour $p > 2$, ces *courbes normales* sont de l'ordre $p + 1$, et le nombre de leurs points doubles ou de rebroussement est égal à $p(p - 3)$. (*Voir* Clebsch *und* Gordan, *Theorie der Abelschen Functionen*.)

Cet extrait renvoie au fait que les transformations birationnelles, si elles laissent le genre invariant, altèrent l'ordre d'une courbe : il s'agit alors de déterminer l'ordre minimal que la transformée d'une courbe de genre donné peut atteindre. Cette question montre bien que même si les genres sont vus comme les divisions premières des courbes, la notion d'ordre reste cruciale pour Clebsch, permettant de distinguer des espèces particulières au sein de chaque genre.

---

[110] Il s'agit essentiellement de transformations par lesquelles les coordonnées des objets de départ sont exprimables rationnellement en fonction de celles des objets d'arrivée, et réciproquement.
[111] Cette allusion à Cayley prendra sens au prochain paragraphe.
[112] Alfred Clebsch, Sur les surfaces algébriques, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 67 (1868), 1238-1239. Citation p. 1238.

Ce problème des courbes normales avait reçu une réponse de Clebsch et Gordan dans leur livre de 1866 cité. Il avait aussi été abordé un peu auparavant par Arthur Cayley, auquel nous avons vu Clebsch faire référence.

3.2 Genre(s) ou déficience ?

L'article de Cayley relatif à cette question est intitulé *On the Transformation of Plane Curves*[113]. Cayley y rappelle que toute courbe d'ordre n possède au plus $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ « points doubles », expression recouvrant la notion usuelle de point double (ou nœud) et celle de point de rebroussement. Il montre ensuite qu'une courbe peut être paramétrée de manière rationnelle si elle possède ce nombre maximal de points doubles.

Après avoir fait référence aux travaux de Riemann sur les fonctions abéliennes et de Clebsch sur les courbes rationnelles (où est proposée la classification par genres), Cayley ajoute :

> Avant de poursuivre, il sera commode d'introduire le terme « déficience », à savoir qu'une courbe de l'ordre n avec $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-D$ points doubles est dite avoir une déficience $= D$ [...][114].

Un des principaux objectifs de l'article de Cayley consiste en fait à calculer l'ordre minimal d'une courbe obtenue par transformation birationnelle à partir d'une courbe d'ordre donné. La question elle-même est ainsi structurée entièrement autour de la notion d'ordre, contrairement à la formulation de Clebsch, où la courbe donnée est caractérisée par son genre. La déficience, introduite dans le cadre de cette question, possède donc un statut auxiliaire bien que de grande importance[115].

---

[113] Arthur Cayley, On the Transformation of Plane Curves, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1 (1865/1866), 1-11.
[114] « *Before going further, it will be convenient to introduce the term "Deficiency," viz., a curve of the order* n *with* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-D$ *dps [double points], is said to have a deficiency* $= D$ [...]. ». Cayley, *op. cit. in* n. 113, p. 2.
[115] Cayley démontre qu'une courbe d'ordre n et de déficience D peut-être transformée en une courbe d'ordre $D+2$. Il ajoute cependant que Clebsch lui a indiqué que dans le cas où $D>2$, cet ordre peut même être abaissé à $D+1$ à l'aide de transformations mieux choisies.

Comme cela fut remarqué par Cayley, Clebsch et leurs contemporains, la déficience et le nombre p sont égaux[116]. Mais les manières dont ces nombres sont introduits et utilisés par leurs auteurs sont sensiblement différentes : en particulier, on ne trouve aucune trace, chez Cayley, de volonté de fonder une nouvelle classification des courbes sur la base de leur déficience. Le mot lui-même, au contraire de *Geschlecht*, n'évoque pas de taxon : il semble plutôt être vu comme un caractère nouveau des courbes renvoyant à la quantité manquante de points doubles pour qu'une courbe soit rationnelle, et ayant un rôle essentiel dans les propriétés de transformations de celles-ci.

3.3 Une indispensable classification

La notion de genre circule très rapidement à partir de 1865[117]. Plusieurs mathématiciens y voient effectivement une classification nouvelle et meilleure que celle où les ordres sont les divisions principales, notamment parce que c'est celle qui reflète le mieux la gradation de la difficulté dans l'étude des courbes. Par exemple, dans un livre de 1866 sur la théorie des surfaces algébriques, Luigi Cremona écrit :

> La division des courbes planes [...] en *genres*, proposée par le Pr Clebsch, est de la plus haute importance. Elle permet de rassembler et de lier les propriétés de formes géométriques très différentes en apparence. Ce qui donne la mesure des difficultés que peut présenter l'étude d'une [courbe] n'est ni l'ordre, ni la classe, mais bien le genre[118].

Le genre est ainsi adopté sans réserve par un géomètre se décrivant plutôt comme un synthétiste, tandis que la notion était introduite par un géomètre analyste : de manière analogue à ce que nous avons relevé pour les classes, la circulation de la nouvelle classification n'est pas entravée par les préférences méthodologiques des mathématiciens. Au-

[116] Lê, *op. cit. in* n. 103, p. 92.

[117] Voir Lê, *op. cit. in* n. 103, p. 90-101, où est étudié un corpus d'articles publiés dans diverses revues académiques et où est notamment décrite la persistance jusqu'à la fin du XIXe siècle de l'utilisation par les anglophones de la terminologie de Cayley. J'utilise ici le corpus déjà évoqué dans la section précédente, constitué des livres listés dans les bibliographies générales des chapitres de l'*Encyklopädie* consacrés aux courbes algébriques.

[118] « *La divisione delle curve piane [...] in generi, proposta dal prof. Clebsch, è della massima importanza. Per essa si ravvicinano e si connettono le proprietà di forme geometriche in apparenza differentissime. Ciò che dà la misura delle difficoltà che può offrire lo studio di una [curva] non è l'ordine o la classe, ma bensì il genere.* » Luigi Cremona, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie* (Bologne : Tipi Gamberini e Parmeggiani, 1866), p. 45.

delà de ces différences de méthode, l'importance que Cremona accorde à la notion de genre est sans doute à rapprocher de son intérêt pour l'utilisation des transformations birationnelles en géométrie, pour lesquelles le genre est un invariant[119].

Il est intéressant aussi de remarquer que Cremona, un peu plus tard, associera la classification par genres de Clebsch à une forme de modernité en géométrie : écrivant en 1868 à Wilhelm Fiedler, le futur traducteur en allemand du *Treatise on the Higher Plane Curves* de Salmon, il explique :

> [C]e livre est maintenant démodé et la science a fait de grands pas notamment grâce à l'activité de Clebsch. Il est aujourd'hui indispensable de traiter de la classification des courbes par genres eu égard aux idées de Riemann[120].

La notion de genre, sous son avatar de la déficience, est justement intégrée à la deuxième édition du traité de Salmon, dont la préface indique que Cayley a contribué à y inclure de nouvelles sections relatives aux « derniers progrès de la science[121] ». La déficience est décrite comme un « nombre jouant un rôle très important dans la théorie des courbes[122] » ; son lien avec les courbes rationnelles (ou « unicursales », dans le langage de Cayley[123]) est établi immédiatement après cette définition, tandis que l'invariance par transformation birationnelle est traitée plus tard, dans le chapitre correspondant (p. 314).

La déficience est aussi mise à contribution dans le chapitre consacré aux courbes du quatrième ordre : leur classification, faite selon les « caractéristiques de Plücker et la déficience », est incarnée en une division en dix *genera* (voir la figure 3). Ces genres, qui ne sont bien entendu pas ceux de Clebsch, sont ainsi des taxons qui reflètent chacun les

---

119 Au sujet des différences d'approche de Clebsch et Cremona, ainsi que de leurs intérêts communs (en particulier pour les transformations birationnelles), voir Aldo Brigaglia, Ciro Ciliberto et Claudio Pedrini, The Italian School of Algebraic Geometry and Abel's Legacy, in Olav Arnfinn Laudal et Ragni Piene (éds.), *The Legacy of Niels Henrick Abel* (Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2004), 295-347. Voir en particulier p. 300-305.

120 « *[D]ieses Buch ist jetzt altmodisch und die Wissenschaft hat insbesondere dank Clebschs Schaffens große Fortscrhitte gemacht. Heute ist es unerlässlich, die Klassifikation der Kurven nach Geschlechter in Hinblick auf Riemanns Ideen zu behandeln.* » Extrait d'une lettre de Cremona à Fiedler datée du 5 mars 1868. Voir Sara Confalioneri, Peter-Maximilian Schmidt et Klaus Volkert (éds.), *Der Briefwechsel von Wilhelm Fiedler mit Alfred Clebsch, Felix Klein und italienischen Mathematikern* (Siegen : Universitätsverlag Siegen, 2019), p. 197.

121 George Salmon, *A Treatise on the Higher Plane Curves,* 2e éd. (Dublin : Hodges, Foster, and Co., 1873), p. v.

122 « *We call* deficiency *of a curve the number D, by which its number of double points is short of the maximum; this number playing a very important role in the theory of curves.* » Salmon, *op. cit. in* n. 121, p. 28.

123 Cayley, *op. cit. in* n. 113, p. 2.

différentes combinaisons possibles des nombres caractéristiques, ce qui souligne encore une fois que la déficience est perçue comme un nombre-caractère.

In this way we have ten genera, of which the Plückerian characteristics and the deficiency (Art. 32) are

	m	δ	κ	n	τ	ι	D
I.	4	0	0	12	28	24	3
II.	4	1	0	10	16	18	2
III.	4	0	1	9	10	16	2
IV.	4	2	0	8	8	12	1
V.	4	1	1	7	4	10	1
VI.	4	0	2	6	1	8	1
VII.	4	3	0	6	4	6	0
VIII.	4	2	1	5	2	4	0
IX.	4	1	2	4	1	2	0
X.	4	0	3	3	1	0	0

viz. in each of the last four cases the curve is unicursal.

Figure 3. Classification des courbes du quatrième ordre dans le *Treatise on the Higher Plane Curves* de Salmon (1873), p. 206. Les lettres m, δ, κ, n, τ, ι et D désignent respectivement l'ordre, le nombre de points doubles, celui de points de rebroussement, la classe, le nombre de tangentes doubles, celui de points d'inflexion et enfin la déficience.

Par ailleurs, la mise en évidence des quatre cas de courbes unicursales (correspondant à $D = 0$) que l'on peut voir dans la figure 3 est significative. En effet, la déficience n'est pas le critère premier d'appréhension des courbes dans le livre de Salmon : conformément à la première édition, les courbes auxquelles sont dévolus des chapitres spécifiques sont celles des troisième et quatrième ordres. Mais la deuxième édition voit apparaître, dans chacun de ces chapitres, une section qui aborde les courbes unicursales des ordres concernés. La déficience apparaît donc de cette manière, distinguant au sein de ces ordres les courbes admettant des paramétrages rationnels.

Ce même phénomène se voit dans de nombreux autres ouvrages consacrés aux courbes algébriques. Citons par exemple un livre de Richard Baltzer intitulé *Analytische Geometrie*[124]. Le genre y est défini comme la différence entre le nombre maximal et le nombre effectif de points doubles d'une courbe et Baltzer rappelle que « au 0ème genre appartiennent, d'après ce comptage, les lignes du 2ème ordre et toutes les lignes les plus singulières[125] » . Il indique aussi

[124] Richard Baltzer, *Analytische Geometrie* (Leipzig : Hirzel, 1882).
[125] « *Zum 0ten Geschlecht gehören nach dieser Zählung die Linien 2ter Ordnung und alle singulärsten Linien* ». Baltzer, *op. cit. in* n. 124, p. 334. On peut noter encore une fois les formulations qui renvoient au genre comme catégorie de courbes, quand bien même il a été défini comme un nombre.

que ces dernières sont aussi « les plus élémentaires de leur ordre[126] » : l'enjeu de simplicité est donc bien lié à la valeur (d'autant plus petite) du genre, mais est discutée à l'intérieur des ordres, et pas en amont de ceux-ci. Notons toutefois que le livre de Baltzer, de niveau plutôt élémentaire, passe en fait assez rapidement sur les courbes unicursales et se contente surtout d'étudier les courbes du deuxième ordre.

Les courbes d'ordre supérieur sont en revanche l'objet de la *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung* de Heinrich Wieleitner[127]. Le cinquième chapitre est intitulé « Genre, courbes rationnelles » ; le genre est introduit par la formule $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$ et présenté comme « un troisième élément de classification [des courbes], à côté de l'ordre n et de la classe ν »[128]. S'il n'y a donc pas de hiérarchie explicitée *a priori* entre ces trois notions classificatrices, le découpage des chapitres et sections du livre met en avant d'abord les courbes rationnelles, étudiées de manière générale avant que les cubiques rationnelles soient examinées de plus près, et, plusieurs chapitres plus loin, les courbes des troisième et quatrième ordres non nécessairement rationnelles. Le genre, s'il intervient effectivement dans la structuration du livre, est donc surtout visible à travers la mise en évidence des courbes rationnelles. Le titre du livre lui-même est d'ailleurs révélateur : c'est l'ordre qui continue d'apparaître comme critère premier de la conception de la division des courbes.

En fait, le genre apparaît de manière plus nette comme principe organisateur dans des ouvrages d'analyse contenant des chapitres d'application aux courbes algébriques. C'est par exemple le cas dans le premier tome de la première édition du *Cours d'analyse de l'École polytechnique* de Camille Jordan[129]. Le chapitre final, consacré aux courbes algébriques, est divisé en deux sections, dont la première est simplement intitulée « Genre » et la deuxième « Coordonnées homogènes ». L'ordre d'une courbe y est bien sûr utilisé (sans être défini) dès les premières lignes, mais c'est donc le genre qui ressort comme sujet important dans le livre de Jordan.

---

[126] « *Die singulärsten Linien $n$ter Ordnung, die elementarsten ihrer Ordnung [...] sind durch mehrere Eigenschaften ausgezeichnet*. » Baltzer, *op. cit. in* n. 124, p. 335.

[127] Heinrich Wieleitner, *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung* (Leipzig : Göschen, 1905).

[128] « *Die Zahl p, die wir als Geschlecht definierten, stellt sich als drittes Klassifikationselement neben die Ordnung n und die Klasse ν*. » Wieleitner, *op. cit. in n.* 127, p. 71.

[129] Camille Jordan, *Cours d'analyse de l'École polytechnique,* t. 1. Calcul différentiel (Paris : Gauthier-Villars, 1882).

Il en va de même dans le deuxième volume du *Traité d'analyse* d'Émile Picard[130], qui présente, entre autres sujets, la théorie des intégrales abéliennes et des surfaces de Riemann. La notion de genre des courbes est définie via ces objets, le lien avec la formule $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$ étant établi simultanément. Surtout, il est frappant de voir dans la table des matières du livre que c'est le genre seulement qui apparaît dans les titres des différents chapitres ou sections relatifs aux courbes. Ainsi, une section est consacrée aux courbes de genre deux lors de la recherche des courbes d'ordre minimal birationnellement équivalentes à une courbe donnée, et l'ultime chapitre du livre se propose d'étudier spécifiquement les « courbes des genres zéro et un ».

3.4 Hiérarchiser ordres et genres

Comme le montrent ces exemples, le genre — effectivement devenu un nombre, même si certaines expressions continuent de faire écho à son acception en tant que catégorie — est bien intégré au savoir géométrique de la fin du XIX^e^ siècle. Les ouvrages de géométrie consultés tendent toutefois à être toujours structurés par la notion d'ordre, à l'image de ce que nous avions relevé en introduction au sujet de l'*Encyklopädie* et du *Répertoire bibliographique*. Le cas des livres d'analyse est un peu plus délicat à interpréter : pour le *Traité* de Picard, la focalisation sur le genre semble être liée au sujet même des fonctions abéliennes, qui en occupe une grande partie et impose en quelque sorte le traitement des courbes sous le point de vue du genre. Ce n'est cependant pas ce qui se passe pour le *Cours d'analyse* de Jordan, et il ne s'agit probablement là que de la manifestation de ce que ce dernier juge être le plus important à présenter au sujet des courbes algébriques.

S'il a donc été reconnu comme étant la bonne notion classificatrice des courbes algébriques par plusieurs mathématiciens de la deuxième moitié du XIX^e^ siècle, le genre semble avoir encore un statut hiérarchique un peu incertain par rapport à l'ordre, au moins dans la manière dont est structuré le savoir au début du XX^e^ siècle.

[130] Émile Picard, *Traité d'analyse,* t. 2 (Paris : Gauthier-Villars, 1893).

Évidemment, cette image épouse l'empan chronologique choisi et ne préjuge en rien de la manière dont les rapports entre ordre et genre ont pu évoluer par la suite[131] : pour mettre les choses en perspective, remarquons simplement que la *Mathematics Subject Classification*[132] de 2020 consacre bien une section aux courbes algébriques dans la partie sur la géométrie algébrique, mais aucune des sous-sections qui la composent ne fait référence à des courbes particulières distinguées par leur ordre. Au contraire, l'une d'elle est intitulée « Courbes algébriques spéciales et courbes de petit genre », une autre « Courbes elliptiques » (ce qui renvoie au genre 1), et d'autres encore font par exemple référence aux modules de courbes, un sujet lié de près aux transformations birationnelles de celles-ci et donc, en filigrane, à leur genre.

Une telle occultation de l'ordre au profit du genre a sans doute été nourrie par les diverses mutations de la géométrie algébrique au XX[e] siècle ayant entraîné un accent toujours plus fort mis sur les aspects birationnels de la théorie des courbes et surfaces.

J'aimerais aussi mentionner rapidement un autre facteur explicatif probable de cette montée en puissance du genre : l'enchevêtrement disciplinaire qui s'est opéré au début du XX[e] siècle entre arithmétique et théorie des courbes algébriques, consistant à interpréter la recherche des solutions rationnelles d'une équation diophantienne comme celle d'autant de points à coordonnées rationnelles de la courbe définie par cette équation[133]. En effet, comme l'explique Henri Poincaré dans un célèbre article sur le sujet[134], un des points cruciaux dans cette approche est que les courbes en jeu sont à considérer à transformation birationnelle près : dès lors, la notion invariante de genre devient centrale et gradue la difficulté du problème arithmétique sous-jacent. Ainsi, dans sa thèse de 1928 sur *L'arithmétique sur les courbes algébriques*, André Weil rappellera encore que « l'élément fondamental de classification des

[131] La question de l'empan se pose aussi à l'autre bout de la chronologie : avoir débuté par Descartes ne doit pas faire oublier qu'il existe de nombreuses questions sur les classifications de courbes en amont. Voir Rashed, *op. cit. in* n. 15.
[132] Il s'agit de la classification établie par les deux grands outils de recension actuels que sont le *Zentralblatt* et les *Mathematical Reviews*, et utilisée actuellement de manière quasi systématique par les mathématiciens et mathématiciennes pour indexer leurs travaux.
[133] À ce sujet, voir Norbert Schappacher, « Développement de la loi de groupe sur une cubique », in *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988/89*, 91 (1991), 159-184 ; Catherine Goldstein, Descente infinie et analyse diophantienne : programmes de travail et mise en œuvre chez Fermat, Levi, Mordell et Weil, *Cahiers du Séminaire d'histoire et de philosophie des mathématiques*, sér. 2, vol. 3 (1993), 25-49.
[134] Henri Poincaré, Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, sér. 5, vol. 7 (1901), 161-233.

équations diophantiennes à deux variables est le genre de l'équation et non son degré[135] ». La préférence du genre est donc de nouveau mise en avant, survenant par un autre chemin que celui de l'étude des courbes algébriques en elles-mêmes : les domaines mathématiques se rapprochant, les acquis géométriques sur les courbes sont réinvestis à nouveaux frais en arithmétique, ce qui leur octroie un surplus d'importance en retour.

4. Conclusion

Les classifications des courbes algébriques que nous avons suivies, loin d'être figées dans le temps et les pratiques, sont donc bien soumises à des dynamiques historiques qui en modifient tant la constitution que l'organisation.

L'apparition et la disparition de certains taxons, de même que leurs éventuels changements de signification, témoignent ainsi des évolutions de la géométrie : changements de point de vue sur les objets (comme la distinction, abandonnée, entre lignes et courbes), ajustements techniques à réaliser pour expurger une théorie (celle de la dualité) de ses scories, articulations disciplinaires nouvelles permettant d'irriguer certaines parties des mathématiques (la géométrie des courbes, enrichie par la théorie des fonctions abéliennes).

Il en va de même pour les rapports hiérarchiques changeants entre ordres, classes et genres. S'ils ne semblent pas se stabiliser une fois pour toutes, ni diachroniquement ni même synchroniquement, c'est qu'ils suivent les objectifs de ceux qui les emploient, que ce soit une question de recherche précise ou l'approche pédagogique d'un sujet : l'ordre est susceptible d'être présenté comme notion divisionnaire première des courbes parce que, se lisant directement sur leurs équations, sa compréhension est plus directe pour quiconque débute son apprentissage géométrique ; mais l'experte intéressée par des problèmes birationnels des courbes privilégiera certainement plutôt le genre.

[135] André Weil, « L'arithmétique sur les courbes algébriques », thèse de doct., Faculté des sciences de Paris, 1928. Citation p. 2.

Cette sorte de relativisme des hiérarchies classificatrices ne se retrouve pas systématiquement dans d'autres cas de classifications mathématiques[136]. Par exemple, les formes quadratiques, objets issus de l'arithmétique, ont aussi été distribuées au XIX[e] siècle en ordres, genres et classes[137]. Plus précisément, ces formes ont été rangées par Carl Friedrich Gauss dans ses *Disquisitiones arithmeticae* (1801) selon un système où les classes forment les divisions de base et sont ensuite regroupées en genres, eux-mêmes rassemblés en ordres. Cette organisation, fixée définitivement, n'a pas été remise en cause par la suite, même si certaines variations ont existé parmi les successeurs de Gauss sur ce que sont les bonnes catégories ou le bon niveau hiérarchique à considérer.

La comparaison avec les formes quadratiques permet aussi de revenir sur le rapport entre les taxons de courbes et les nombres qui les définissent et qui finissent par en porter le nom. En effet, les catégories de formes sont elles aussi associées à des nombres divers qui les caractérisent, mais il n'existe pas de glissement sémantique analogue à celui que nous avons observé pour les courbes : ordres, classes et genres désignent toujours des ensembles. Par contre, Gauss définit une opération de composition des classes elles-mêmes, qui deviennent ainsi des « objets (de second niveau) à part entière[138] ». L'aspect catégoriel des classes se dissipe donc d'une autre manière que dans le cas des courbes, où les taxons sont peu à peu oubliés au profit des nombres[139].

La relation étroite entre nombres et catégories de courbes met aussi en évidence des différences notables avec les entreprises de classifications naturalistes. L'indexation des ordres, classes et genres de courbes par l'ensemble des entiers positifs dévoile ainsi d'un seul geste tant leur infinité que leur ordonnancement : l'exhaustivité du système classificatoire choisi est assurée dès le départ et il n'est pas question d'ajouter de nouveaux genres, par

[136] N'ayant ni assez de points de comparaison, ni de commentaire des acteurs sur ce sujet, il est difficile de statuer sur le caractère normal ou exceptionnel du cas des courbes.
[137] J'utilise ici les informations de Franz Lemmermeyer, The Development of the Principal Genus Theorem, in Catherine Goldstein, Norbert Schappacher et Joachim Schwermer (éds.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae* (Berlin : Springer, 2007), 527-561 ; Catherine Goldstein, « Découvrir des principes en classant » : la classification des formes quadratiques selon Charles Hermite, *Cahiers François Viète*, sér. 3, vol. 1 (2016), 103-135.
[138] Goldstein, *op. cit. in* n. 137, p. 131.
[139] Appréhender les ensembles de courbes birationnellement équivalentes comme des objets en soi est plutôt lié à la considération (plus tardive) de l'espace des modules des courbes de genre donné, dont chaque point correspond à une et une seule classe d'équivalence de courbes.

exemple, qui auraient été découverts à d'autres occasions[140]. En outre, les distributions des sous-divisions dans chaque taxon sont régies par les formules de Plücker ou de Clebsch qui, liant entre eux les nombres caractéristiques des courbes, en circonscrivent et en déterminent directement les possibilités. Si, enfin, certains des mathématiciens rencontrés s'emparent effectivement de questions de terminologie de manière explicite, celles-ci se limitent essentiellement au choix du bon mot parmi « ordre », « degré », « classe » et « genre ». En revanche, le problème de la dénomination en langage naturel des catégories de rang donné, si important pour les naturalistes, est presque complètement évité par le recours à des désignations qui se contentent d'indiquer le nombre classificateur en jeu, comme dans « une courbe du troisième ordre » ou « une courbe cubique[141] ».

D'autres points de rapprochement ou de différenciation entre les classifications de courbes, de formes quadratiques voire d'êtres vivants pourraient encore être développés, comme la recherche de représentants privilégiés au sein des divers taxons ou le rôle des transformations des objets examinés[142].

Mais on l'aura compris. Sous leur vocabulaire parfois commun d'ordres, de genres et de classes, ces diverses classifications cachent des particularités de mise en œuvre, de conception, d'évolutions historiques qui en font des produits collectifs et mouvants. Le cas des courbes algébriques est exemplaire à ce titre, et permet de suivre et d'éclairer d'une nouvelle manière une partie du développement de la géométrie sur un temps relativement long : en contextualisant de manière alternative certains épisodes connus ou en attirant l'attention sur des éléments textuels qui pourraient être perçus comme anodins, comme l'emploi ou non d'adjectifs numéraux ordinaux, suivre le fil de leurs classifications est une manière d'offrir une épaisseur supplémentaire à la description de l'histoire des courbes algébriques.

---

[140] Ceci est bien propre aux classifications par ordres, classes ou genres : rappelons par exemple que celle de Newton des lignes du troisième ordre passait à côté de quelques espèces, oubliées dans une disjonction de cas. Voir aussi Lê et Paumier, De la science comme classification à la classification comme pratique scientifique, *Cahiers François Viète*, sér. 3, vol. 1 (2016), 9-33, pour un cas analogue en théorie des surfaces.

[141] Les rares cas où une désignation alternative est proposée sont ceux des droites, des coniques et des courbes rationnelles ou unicursales.

[142] Voir Goldstein, *op. cit. in* n. 137, p. 128-131.