# Le paramétrage elliptique des courbes cubiques d'Alfred Clebsch

François Lê [*]

Mai 2017

**Résumé**

La possibilité de paramétrer toute courbe cubique à l'aide des fonctions elliptiques est un résultat aujourd'hui classique en géométrie algébrique et en théorie des nombres. Dans cet article, nous nous intéressons à des travaux d'Alfred Clebsch (1833-1872) publiés en 1864, dans lesquels ce dernier établit un tel paramétrage dans le but principal de prouver un théorème énoncé sans démonstration vingt ans auparavant par Jacob Steiner. En examinant de près les sources et les démonstrations de Clebsch, nous mettons en évidence une configuration disciplinaire originale à l'œuvre dans ses travaux, à l'interface entre géométrie, analyse, algèbre et arithmétique.

## 1 Paramétrer les cubiques pour résoudre un problème de Steiner

Une courbe plane peut être décrite de plusieurs manières, comme au moyen d'une équation entre les deux coordonnées du plan, ou par des formules exprimant les coordonnées de ses points en fonction d'un paramètre auxiliaire : par exemple, à l'équation $x^2 + y^2 = 1$ du cercle unité correspond la représentation paramétrique bien connue $(x, y) = (\cos u, \sin u)$. Différentes études historiques ont souligné qu'une certaine volonté de systématiser la recherche de représentations paramétriques de courbes s'est

[*]Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS UMR 5208, Institut Camille Jordan, 43 blvd. du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne Cedex, France.

exprimée au milieu du XVIIIe siècle dans l'*Introductio in analysin infinitorum* de Leonhard Euler [1748] et l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de Gabriel Cramer [1750] [1]. En particulier, les exemples développés par Euler incluent le cas des courbes coniques, dont il montre comment en trouver paramétrage rationnel [2] ; on trouve en outre dans le courant de la deuxième moitié du XVIIIe siècle des contributions d'autres mathématiciens faisant état de paramétrages de coniques particulières à l'aide des fonctions trigonométriques circulaires ou hyperboliques [3].

Le présent article s'intéresse à la représentation paramétrique d'un autre type de courbes que les coniques, définies non pas par une équation polynomiale de degré 2 comme ces dernières, mais par une équation de degré 3 : ce sont les *courbes cubiques*, aussi appelées *courbes du troisième ordre* [4]. Plus précisément, nous allons étudier dans quel contexte et selon quelles modalités les courbes cubiques ont été paramétrées par des fonctions spéciales appelées *fonctions elliptiques*, dont nous verrons qu'elles étaient souvent considérées par les mathématiciens du XIXe siècle comme des généralisations des fonctions trigonométriques circulaires.

Notons que la possibilité d'un tel paramétrage elliptique des courbes cubiques n'est pas un résultat mathématique anodin : il a notamment été utilisé de façon cruciale dans les années 1900-1920 lors des débuts du sujet de la géométrie algébrique arithmétique, dont l'idée de base consiste à interpréter la recherche de solutions entières ou rationnelles d'équations algébriques en celle de points à coordonnées entières ou rationnelles sur les courbes ou les surfaces définies par ces équations [5]. Dans les textes correspondant à ces débuts de la géométrie algébrique arithmétique, le pa-

1. [Brill & Noether 1892-93, p. 140 ; Boyer 1956, p. 187 ; Gray 1994, p. 862].

2. [Euler 1748, vol. 1, p. 42]. Euler démontre plus précisément que toute courbe d'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0$ peut être paramétrée par $(x, y) = (\frac{-du^2-eu}{au^2+bu+c}, \frac{-du-e}{ax^2+bx+c})$. Le paramétrage est dit rationnel car $x$ et $y$ sont des fractions rationnelles du paramètre $u$.

3. Voir les références données dans [Dingeldey 1903, p. 10 ; Grattan-Guinness 1994a, p. 501], en particulier [Lambert 1768 ; Legendre 1788].

4. Dans toute la suite, les courbes cubiques considérées seront toujours supposées être sans point singulier (c'est-à-dire qu'il est possible de « bien » définir une tangente en chacun de leurs points), et formées de points à coordonnées complexes et éventuellement situés à l'infini.

5. Voir [Schappacher 1991 ; Goldstein 1993 ; Schappacher & Schoof 1996 ; Houzel 2004]. Notons par ailleurs que le paramétrage elliptique des cubiques se trouve encore aujourd'hui dans de nombreux livres de théorie des nombres comme [Lang 1978, p. 10 ; Silverman 1986, p. 158 ; Husemöller 1987, p. 171].

ramétrage elliptique des cubiques apparaît d'ailleurs comme un résultat bien connu, toujours invoqué sans référence à des travaux antérieurs ni autre attribution de paternité. Par exemple, alors qu'Henri Poincaré rappelle simplement qu'à « chaque point d'une courbe de genre 1 est attaché un *argument elliptique*[6] » [Poincaré 1901, p. 168], Beppo Levi utilise de façon récurrente des « coordinate ellitiche » ou le « parametro ellitico » des points d'une cubique mais aucun commentaire n'est fait à leur sujet [Levi 1906, p. 753][7].

Une référence sur le paramétrage elliptique des cubiques peut cependant être trouvée dans l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*[8]. En effet, les deux chapitres consacrés l'un aux courbes cubiques et l'autre aux fonctions elliptiques font remonter l'énoncé et la preuve d'un tel paramétrage à un article de 1864 d'Alfred Clebsch (1833-1872), dans lequel ce dernier aurait utilisé le paramétrage pour démontrer un théorème sur des polygones associés à une courbe cubique [Clebsch 1864][9]. Le cadre de cet article apparaît ainsi complètement déconnecté d'objectifs arithmétiques, au contraire des travaux plus tardifs mentionnés de géométrie algébrique arithmétique, dans lesquels le paramétrage elliptique est utilisé au cours de démonstrations relatives à la recherche de points rationnels sur des courbes cubiques.

Mon objectif ici n'est cependant pas d'étudier plus en détail ces emplois

6. Le *genre* d'une courbe est un nombre dépendant de son degré et de ses éventuels points singuliers. Les courbes cubiques sans point singulier sont des exemples de courbes de genre 1.

7. Voir aussi les articles [Levi 1908 ; Levi 1909 ; Mordell 1922 ; Weil 1930]. Tous ces mémoires ont été localisés à partir des recherches historiques citées dans la note 5.

8. Rappelons que l'*Encyklopädie* est le fruit d'un projet collectif initié par Felix Klein à la fin du XIX[e] siècle et visant à établir un bilan des connaissances mathématiques de ce siècle. Voir [Tobies 1994 ; Gispert 1999].

9. Voir [Kohn 1908, p. 481 ; Fricke 1913, p. 328]. Le chapitre de Robert Fricke évoque également (sans référence) deux autres paramétrages. Le premier, basé sur la forme dite de Legendre $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ de l'équation d'une cubique, semble être dû à Ferdinand Lindemann : voir [Clebsch & Lindemann 1876] et les commentaires faits à la page III. L'autre utilise la fonction $\wp$ définie par Weierstrass dans un cours de 1863 comme solution de l'équation différentielle $s'^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$ [Bottazzini & Gray 2013, p. 428]. On trouve le paramétrage $(x, y) = (\wp(u), \wp'(u))$, aujourd'hui classique et basé sur l'équation $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ d'une cubique, dans un article de Max Simon [1876] et dans la thèse de Robert d'Esclaibes [1880], lequel semble ignorer Simon. Ces deux paramétrages sont en tout cas postérieurs à celui de Clebsch de 1864 et ne retiendront pas notre attention ici.

du paramétrage elliptique des cubiques dans la géométrie algébrique arithmétique du début du XX$^{\text{e}}$ siècle [10]. Il s'agit de se focaliser sur les travaux de Clebsch de 1864 ayant abouti à ce paramétrage puis l'ayant utilisé, et de voir comment ils mettent en place une relation disciplinaire originale située à l'interface entre géométrie, algèbre, analyse et, dans une moindre mesure, arithmétique.

Clebsch est né en 1833 à Königsberg, où il mène à bien ses études supérieures en suivant en particulier les cours universitaires de Otto Hesse, Friedrich Richelot et Franz Neumann entre 1850 et 1854 [11]. Clebsch soutient sa thèse en 1854 ; dirigée par F. Neumann, elle porte sur des questions de physique mathématique. Entre 1854 et 1858, Clebsch enseigne dans différents lycées de Berlin, publiant en parallèle des articles de physique mathématique et de calcul des variations. Il continue à travailler sur ces thématiques lors de son passage en tant que professeur à la *Polytechnische Schule* de Karlsruhe entre 1858 et 1863. L'intérêt de Clebsch pour l'étude des courbes et des surfaces algébriques s'installe autour de 1860, notamment à travers la lecture des travaux d'Arthur Cayley, George Salmon et James Joseph Sylvester. Soutenu notamment par Hesse qui voit en lui « un des premiers mathématiciens allemands [12] » de son temps, il obtient en 1863 un poste à l'université de Giessen. C'est donc à cette époque que Clebsch fait publier l'article dans lequel il parvient à paramétrer les courbes cubiques par les fonctions elliptiques [13].

Les premières lignes de cet article indiquent que le théorème que Clebsch entend démontrer à l'aide du paramétrage avait été énoncé sans preuve par

10. Remarquons que si les notations utilisées par Louis Mordell et André Weil dans leurs travaux mentionnés *supra* montrent qu'ils travaillent avec le paramétrage $(\wp(u), \wp'(u))$, rien ne permet d'élucider ce que Poincaré, Levi et Adolf Hurwitz visent de leur côté. Je ne préjuge d'ailleurs en rien de l'existence éventuelle de liens entre les recherches de Clebsch de 1864 et celles ayant mené au paramétrage en $(\wp(u), \wp'(u))$.

11. Les infromations de ce paragraphe sont tirées de la notice nécrologique [Brill, Gordan et al. 1873].

12. Citation de 1862, tirée de [Dugac 1976, p. 133]. Divers témoignages du même type se retrouvent dans d'autres écrits de contemporains de Clebsch. Par exemple, en 1875, Max Noether désigne Hesse et Clebsch comme « les deux plus grands représentants de la science algébraico-géométrique allemande » de leur époque [Noether 1875, p. 77].

13. En 1868, Clebsch partira pour l'université de Göttingen, ayant obtenu la chaire de mathématiques laissée vacante après la mort de Bernhard Riemann. Il y restera jusqu'en novembre 1872, date à laquelle il mourra soudainement, foudroyé par une attaque de diphtérie.

Jacob Steiner dans un article publié en 1846. Son énoncé est le suivant [14] :

> Si après avoir choisi deux points fixes quelconques $P$ et $Q$ d'une courbe du troisième ordre, l'on prend sur la même courbe un point $A$ entièrement arbitraire, et que l'on tire la droite $PA$ qui rencontrera la courbe en un troisième point $B$, que l'on tire la droite $QB$ qui rencontrera la courbe en un troisième point $C$, que l'on tire la droite $PC$ qui coupera la courbe en un troisième point $D$, et que l'on continue ainsi à tirer les droites $QDE$, $PEF$, $QFG$,..., qui déterminent successivement les points $E$, $F$, $G$,..., on formera ainsi un polygone inscrit $ABCDEFG\ldots$ dont les côtés passent alternativement par les deux points fondamentaux $P$ et $Q$, et qui pourra présenter deux cas différents. Il peut arriver que ce polygone ne se ferme jamais, quelque loin que l'on pousse la construction invoquée, ou qu'il forme une figure rentrante en elle-même d'un nombre pair $2n$ de côtés. Dans le second de ces deux cas, on a ce théorème :
>
> « Si le polygone en question se ferme pour un point de départ déterminé $A$, il se fermera toujours et aura toujours le même nombre de côtés $2n$, quel que soit le point $A$. » [Steiner 1846b, p. 468-469]

Le théorème affirme donc que si une ligne polygonale obtenue à partir d'un point de départ donné sur la cubique se ferme, alors *toutes* les lignes polygonales (obtenues à partir de n'importe quel point de départ) se ferment aussi, le nombre de côtés étant à chaque fois le même [15] (voir la figure 1) [16].

Clebsch explique dans l'introduction de son article que certains travaux de Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) et de Siegfried Aronhold (1819-

14. L'article cité par Clebsch est écrit en allemand et a été publié dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik* [Steiner 1846a]. L'extrait reproduit ici provient de la version française de cet article, parue la même année dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*.

15. À l'image de Clebsch lui-même, je parlerai régulièrement de « polygones de Steiner » pour désigner les polygones (fermés ou non) obtenus par la construction décrite ici. Notons par ailleurs que cette construction peut toujours être effectuée lorsqu'on suppose que les objets géométriques considérés sont complexes et éventuellement situés à l'infini. Avec cette condition, une droite coupe en effet toujours une cubique en 3 points, comptés avec multiplicité. Trois cas se présentent alors : les points d'intersection peuvent d'abord être distincts ; il peut aussi n'y avoir que deux points dont l'un est compté avec multiplicité 2 (la droite est alors tangente à la courbe et recoupe celle-ci en un point supplémentaire) ; il peut enfin s'agir d'un point compté trois fois (auquel cas c'est un point d'inflexion).

16. Toutes les figures de cet article sont les miennes et ont pour but d'aider le lecteur à comprendre les énoncés et les démonstrations de Steiner et de Clebsch. Je souligne en particulier que je n'ai trouvé de figure chez aucun des auteurs rencontrés.

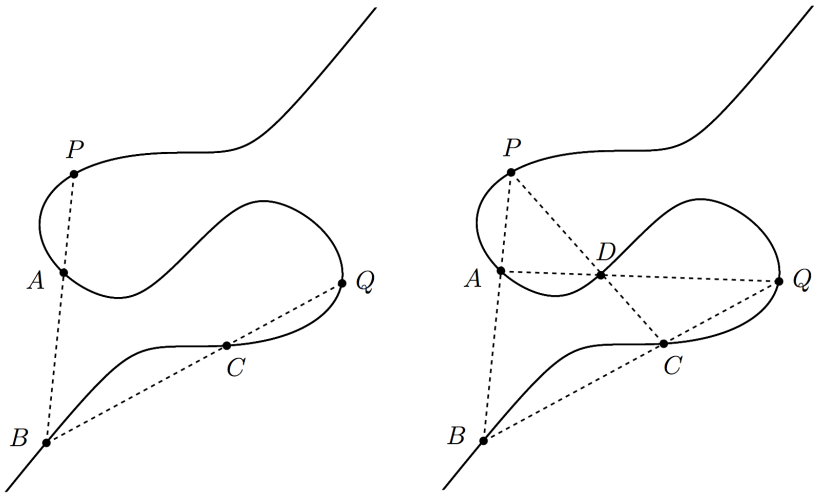


Figure 1 – À gauche : début de la construction d'un polygone de Steiner en partant de $A$ (dans le cas où $A$ est confondu avec $P$, le point $B$ s'obtient comme point d'intersection de la courbe avec la tangente à celle-ci menée en $A$). À droite : la construction se ferme au bout de 4 étapes, et on obtient ainsi un quadrilatère de Steiner $ABCD$ ; elle se ferme donc en 4 étapes pour tout autre point de départ $A$.

1884) lui ont servi de sources : nous allons commencer par explorer ces travaux-là avant de passer à ceux de Clebsch. Ce faisant, nous pourrons mieux saisir certains aspects techniques des recherches de Clebsch, mais aussi voir dans quelle mesure ces dernières se démarquent de celles qui les précèdent, instaurant la nouvelle relation évoquée précédemment entre géométrie, analyse, algèbre et arithmétique. Plus précisément, nous verrons que cette relation s'incarne concrètement par un jeu d'articulations variées entre courbes cubiques et polygones associés, fonctions elliptiques et leurs équations modulaires, invariants et covariants, ainsi que congruences [17].

17. La distribution dans différents domaines de ces objets est faite ici en suivant la classification de l'*Encyklopädie*, les chapitres ou sections consacrés à chacun d'eux étant respectivement inclus dans les volumes de géométrie, d'analyse, d'algèbre et d'arithmétique.

## 2 Jacobi et Aronhold : deux sources pour Clebsch

Tout comme Clebsch, Jacobi et Aronhold ont fréquenté l'université de Königsberg, bien qu'à des périodes antérieures. Jacobi y a en effet été professeur de mathématiques de 1826 à 1843, et Aronhold y a effectué ses études entre 1841 et 1845, suivant en particulier des cours de Jacobi, mais aussi (tout comme Clebsch) de Hesse, Richelot et F. Neumann [18]. Notons en outre que d'après les auteurs de sa notice nécrologique, « Clebsch n'a pas connu personnellement Jacobi, mais il en a étudié les travaux avec grand intérêt et s'est par la suite lui-même désigné comme étant un de ses élèves [19]. »

Dans l'article sur les polygones de Steiner, les noms de Jacobi et d'Aronhold sont invoqués chacun dans une perspective particulière. En effet, alors que Clesch cite un article d'Aronhold dans lequel il va puiser des résultats techniques précis [Aronhold 1862], les travaux de Jacobi sont évoqués pour une valeur heuristique :

> La nature du théorème en question conduit immédiatement à supposer qu'il s'agit d'un cas de la classe de problèmes algébriques dont Jacobi nous a montré comment les relier si simplement à la théorie des fonctions elliptiques [20]. [Clebsch 1864, p. 94]

Clebsch n'explicite pas la référence ; on peut toutefois penser qu'il vise ici les recherches que Jacobi avait effectuées au sujet du théorème de Poncelet sur les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre (voir la figure 2). Jean-Victor Poncelet l'avait énoncé et démontré dans son *Traité des propriétés projectives des figures*, publié en 1822 :

> Quand un polygone quelconque est à la fois inscrit à une section conique et circonscrit à une autre, il en existe une infinité de semblables qui jouissent de la même propriété à l'égard des deux courbes ; ou plutôt tous ceux qu'on essaierait de décrire, à volonté, d'après ces conditions, se fermeraient d'eux-mêmes sur ces courbes. [Poncelet 1822, p. 361]

18. Voir la *Allgemeine Deutsche Biographie* (vol. 46, p. 58-59).

19. « Clebsch hat Jacobi nicht persönlich gekannt, aber er hat dessen Werke mit Vorliebe studirt und sich später geradezu gelegentlich als Schüler desselben bezeichnet. » [Brill, Gordan et al. 1873, p. 7].

20. « Die Natur des angeführten Satzes führt sofort zu der Vermuthung, dass man hier eines aus der Classe jener algebraischen Probleme vor sich habe, welche Jacobi mit der Theorie der elliptischen Functionen in so einfachen Zusammenhang bringen gelehrt hat. »

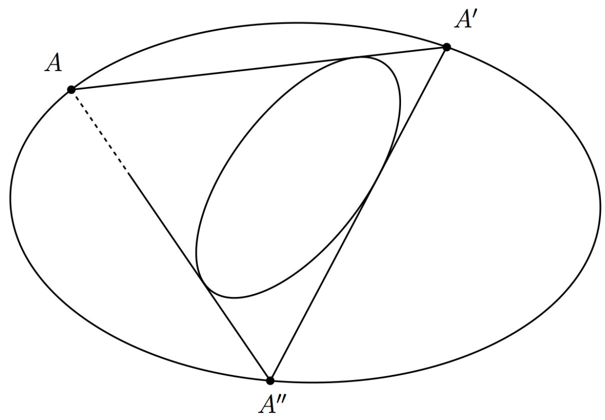


FIGURE 2 – Construction d'un triangle de Poncelet $AA'A''$.

Le théorème de Steiner et celui de Poncelet ont ainsi en commun de porter sur des polygones inscrits dans des courbes algébriques de petit degré et d'énoncer que l'existence d'un polygone fermé à $n$ côtés implique celle d'une infinité de tels polygones [21].

Dans un article publié en 1828, Jacobi démontre le théorème de Poncelet dans le cas où les coniques sont des cercles, à l'aide de fonctions elliptiques. Il trouve aussi des relations devant exister entre les rayons $r$ et $R$ de ces cercles ainsi que la distance $a$ entre leurs centres pour assurer l'existence de polygones de Poncelet à 4, 5, 6 et 8 côtés [22]. Afin de suivre Jacobi dans ce problème, commençons par présenter quelques éléments sur les fonctions elliptiques. Le point de vue, les notations et les résultats sont ceux de Jacobi lui-même, tels que rassemblés et présentés dans les célèbres *Fundamenta*

21. Je n'ai pas trouvé de commentaire de Clebsch expliquant ce qu'il entend par « la nature » du problème ou détaillant sa manière de percevoir le rapprochement évoqué avec les recherches de Jacobi. Dans leur rapport sur développement historique des fonctions algébriques, Alexander Brill et Max Noether affirment que Clebsch avait effectivement pensé aux polygones de Poncelet et à l'approche qu'en avait faite Jacobi [Brill & Noether 1892-93, p. 319]. Au sujet de l'histoire du théorème de Poncelet, voir [Bos et al. 1987; Friedelmeyer 2007; Del Centina 2016]. Les explications qui suivent sur les apports de Jacobi sont en partie tirées de ces références.

22. Ces formules avaient été annoncées sans démonstration par Steiner dans [Abel, Clausen & Steiner 1827].

*nova theoriae functionum ellipticarum* [Jacobi 1829] [23].

## 2.1 Préliminaires elliptiques

Une *intégrale elliptique* est une intégrale fonction de sa borne supérieure de la forme

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{P(\xi)}},$$

où $P$ est un polynôme de degré 3 ou 4 sans racine multiple. Une intégrale de la forme $u = \int_0^\theta \mathrm{d}\vartheta/\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}$, où $k$ est un nombre réel appartenant à $]0\,,1[$, est ainsi une intégrale elliptique, le changement de variable $\xi = \sin\vartheta$ permettant en effet d'écrire

$$u = \int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}.$$

Le nombre $k$ qui apparaît dans ces formules s'appelle le *module* de l'intégrale ; la borne $\theta$ est l'*amplitude* de $u$, notée $\theta = \operatorname{am} u$. On obtient alors des fonctions elliptiques en considérant les fonctions

$$\sin\operatorname{am} u \quad ; \quad \cos\operatorname{am} u \quad ; \quad \Delta\operatorname{am} u = \sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am} u}.$$

Il s'agit *a priori* de fonctions définies sur certains nombres réels, mais elles peuvent être étendues en des fonctions de la variable complexe [24]. Vues ainsi, les fonctions elliptiques possèdent chacune deux périodes indépendantes sur $\mathbf{R}$ pouvant s'exprimer à l'aide des intégrales dites *complètes*

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} \qquad \text{et} \qquad K' = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\vartheta}}.$$

Pour la fonction $\sin\operatorname{am}$ par exemple, les deux périodes sont $4K$ et $2iK'$, ce qui signifie que pour tout nombre complexe $u$ et tous entiers $p$, $q$, on a

$$\sin\operatorname{am}(u + 4pK + 2iqK') = \sin\operatorname{am} u.$$

23. Les notations et le point de vue de Jacobi sont ceux qui seront adoptés par Clebsch.

24. Comme dans le traité de Charles Briot et Jean-Claude Bouquet sur les fonctions ellipiques [Briot & Bouquet 1859], il est aussi possible définir les intégrales elliptiques elles-mêmes comme des fonctions complexes, avec $k \in \mathbf{C} \setminus \{0,1\}$, en donnant un certain sens à l'intégrale. Par inversion des intégrales elliptiques, les fonctions elliptiques deviennent alors elles aussi des fonctions de la variable complexe. Notons également que les fonctions $\sin\operatorname{am}$, $\cos\operatorname{am}$ et $\Delta\operatorname{am}$ ont été notées respectivement sn, cn et dn par Christoph Gudermann en 1838 [Bottazzini & Gray 2013, p. 345].

En outre, les nombres $K$ et $K'$ permettent d'exprimer les zéros des fonctions elliptiques : ainsi, les nombres $u$ tels que $\sin \operatorname{am} u = 0$ sont exactement ceux de la forme $u = 2pK + 2iqK'$, avec $p$ et $q$ entiers.

Les fonctions elliptiques étaient souvent vues [25] comme des généralisation des fonctions circulaires sinus et cosinus, celles-ci correspondant au cas-limite $k \to 0$. Tout comme pour la trigonométrie usuelle, de nombreuses propriétés des fonctions elliptiques étaient connues, au moins depuis les *Fundamenta* de Jacobi : on trouve par exemple dans ce mémoire la formule $(\sin \operatorname{am})' = \cos \operatorname{am} \cdot \Delta \operatorname{am}$, celle donnant la valeur de $\sin \operatorname{am}(u+v)$ en fonction des valeurs en $u$ et en $v$ des fonctions $\sin \operatorname{am}$, $\cos \operatorname{am}$, $\Delta \operatorname{am}$, ou encore la formule

$$\tan\left(\frac{\theta + \theta''}{2}\right) = \Delta \operatorname{am}(v) \cdot \tan \theta',$$

qui lie entre elles les amplitudes $\theta = \operatorname{am}(u)$, $\theta' = \operatorname{am}(u+v)$ et $\theta'' = \operatorname{am}(u+2v)$.

### 2.2 Jacobi et le théorème de Poncelet

Revenons à présent à l'approche du théorème de Poncelet développée par Jacobi. Le début d'un polygone de Poncelet $AA'A''\dots$ étant construit, Jacobi considère les angles $2\varphi$, $2\varphi', 2\varphi'', \dots$ comme indiqué sur la figure 3.

Il démontre ensuite des relations trigonométriques liant ces angles entre eux :

$$\tan\left(\frac{\varphi^{(m+2)} + \varphi^{(m)}}{2}\right) = \frac{R-a}{R+a} \tan \varphi^{(m+1)}.$$

Jacobi remarque alors que « [s]ous cette forme, il saute aux yeux que [cette équation coïncide] avec celle qu'on donne pour la multiplication des transcendantes elliptiques » [Jacobi 1845, p. 436], faisant référence à la formule

$$\tan\left(\frac{\theta'' + \theta}{2}\right) = \Delta \operatorname{am}(v) \cdot \tan \theta'$$

que nous avons mentionnée plus haut.

25. Voir par exemple la présentation faite par Hermite dans sa *Note sur la théorie des fonctions elliptiques* dans [Lacroix 1861/1862].

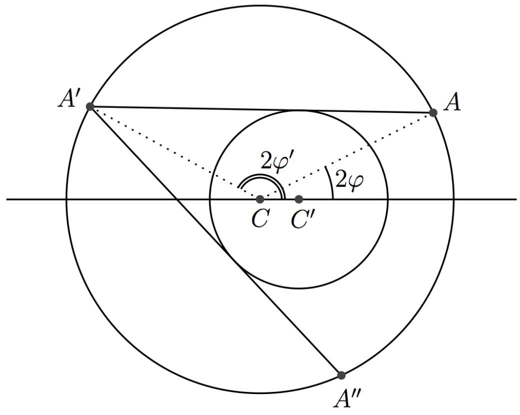


FIGURE 3 – Les deux cercles ont pour centres et rayons respectifs $(C, R)$ et $(C', r)$, et la distance entre $C$ et $C'$ est notée $a$. Pour tout entier $m \geqslant 0$, $2\varphi^{(m)}$ est par définition égal à l'angle entre l'axe horizontal et la demi-droite $CA^{(m)}$.

Jacobi montre alors qu'il est possible de définir une fonction amplitude am et deux nombres $u, c$ tels que[26] pour tout entier $m$,

$$\varphi^{(m)} = \mathrm{am}(u + mc).$$

Ainsi, dire que le polygone se referme après $n$ itérations revient à dire que $\varphi^{(n)} = \varphi + \ell\pi$, où $\ell$ est un certain entier[27]. Cette dernière équation équivalant à

$$\mathrm{am}(u + nc) = \mathrm{am}(u) + \ell\pi,$$

les propriétés de la fonction amplitude permettent de montrer que cela équivaut encore à $c = 2\ell K/n$, où $K$ est l'intégrale complète associée à la fonction am. Cette égalité sur $c$ est donc la condition nécessaire et suffisante pour que le polygone se ferme en $n$ étapes ; son indépendance vis-à-vis du point de départ $A$ montre que si la construction boucle une fois, elle boucle quel que soit le point de départ, avec le même nombre d'étapes.

26. Un point important à noter est que, au contraire de $u$ et $c$, la fonction am (ou plutôt, le module $k$ qui la définit) ne dépend pas du point de départ de la construction du polygone.

27. Cet entier représente le nombre de tours que le polygone a fait autour de l'origine avant de se refermer.

Enfin, Jacobi trouve la condition nécessaire et suffisante de fermeture de la construction en $n$ étapes (et $\ell$ tours) portant sur les grandeurs $R, r, a$ à partir de l'égalité $c = 2\ell K/n$ : les nombres $c$ et $K$ étant définis par des formules en $R$, $r$ et $a$, cette égalité fournit la condition cherchée entre ces trois grandeurs.

L'idée d'introduire des fonctions elliptiques pour étudier les polygones de Poncelet provient donc chez Jacobi de la reconnaissance d'une formule connue de trigonométrie elliptique dans une relation entre les paramètres géométriques de la construction d'un polygone. Comme écrit plus haut, Clebsch ne va pas puiser d'éléments techniques précis dans ces travaux de Jacobi pour sa démonstration du théorème de Steiner : il s'agit plutôt d'un rapprochement heuristique entre deux situations géométriques qui lui donne l'idée d'utiliser la théorie des fonctions elliptiques [28].

### 2.3 Une question de Weierstrass et une réponse d'Aronhold

Les travaux d'Aronhold sur lesquels se base Clebsch sont chronologiquement bien plus rapprochés de lui que ceux de Jacobi (1828), et ont été publiés dans les *Monatsberichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* de 1862 [Aronhold 1862]. Le cadre de ces travaux est explicité dès le début de la note, Aronhold expliquant qu'il s'intéresse à une question que Karl Weierstrass avait posée auparavant : « Quelle est la relation algébrique la plus générale que l'on peut supposer exister entre deux variables $x$ et $y$ pour que, $F(x, y)$ étant une fonction rationnelle quelconque, la différentielle $F(x, y)\,\mathrm{d}x$ soit intégrable à l'aide de transcendantes *elliptiques* [29] ? »

28. Ces travaux de Jacobi nous permettent de nous rappeler que la thématique d'application des fonctions elliptiques à la géométrie existe bien avant les recherches de Clebsch de 1864. Ces dernières ne sont d'ailleurs pas les premières dans lesquelles Clebsch touche à cette thématique, comme le montre l'article intitulé « Anwendung der elliptischen Funktionen auf ein Problem der Geometrie des Raumes » [Clebsch 1857]. D'autres types de rapprochements entre fonctions elliptiques et géométrie au XIXᵉ siècle sont analysés dans [Barbin & Guitart 2001 ; Smadja 2011 ; Smadja 2013].

29. « Welches ist die allgemeinste algebraische Relation, die zwischen zwei veränderlichen Größen $x$, $y$ angenommen werden kann, wenn das Differential $F(x, y)\,\mathrm{d}x$ unter der Bedingung, daß $F(x, y)$ eine beliebige rationale Function von $x$, $y$ sei, sich durch *elliptische* Transcendenten soll integriren lassen? » [Aronhold 1862, p. 462]. Weierstrass, qui a présenté la note d'Aronhold à l'*Akademie*, précise dans une note de bas de page que cette question est liée à des recherches qu'il avait exposées lors de la séance du 6 juillet 1857 et qui n'ont pas donné lieu à des publications.

Les différentielles mentionnées dans cette question sont liées à ce qu'on appelle maintenant des *intégrales abéliennes*, c'est-à-dire des intégrales de la forme $\int F(x,y)\,\mathrm{d}x$ où les variables $x$ et $y$ sont liées par une relation polynomiale $f_0(x,y) = 0$. Remarquons que les intégrales elliptiques en sont des cas particuliers, correspondant à $F(x,y) = 1/y$ et $f_0(x,y) = y^2 - P(x)$, où $P$ est un polynôme de degré 3 ou 4 sans racine multiple : en effet, sous ces hypothèses, l'équation $f_0 = 0$ permet d'écrire $y = \sqrt{P(x)}$, de sorte que

$$\int F(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{P(x)}}$$

est bien une intégrale elliptique [30]. La question de Weierstrass consiste à déterminer plus généralement quels sont les polynômes $f_0$ pour lesquels une intégrale abélienne $\int F(x,y)\,\mathrm{d}x$ peut être ramenée, éventuellement après des manipulations comme des changements de variable, à une intégrale elliptique [31].

La réponse apportée par Aronhold est qu'une telle réduction est possible lorsque $f_0$ est un polynôme de degré 3 sans racine multiple. La première étape de sa démonstration est de rappeler un résultat qu'il attribue à Weierstrass : sous cette hypothèse, une intégrale abélienne peut toujours être ramenée à l'« intégrale de première espèce »

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{f_0'(y)},$$

où $f_0'(y) = \frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y)$. Pour ensuite trouver une changement de variable transformant cette intégrale en une intégrale elliptique, Aronhold se base

30. Dans cet exemple, l'explicitation de $y$ en fonction de $x$ (au signe près...) tient à la forme particulière de $f$. Une des difficultés liées aux intégrales abéliennes générales est qu'une telle explicitation n'est pas possible pour toutes les fonctions $f_0$, rendant compliquée la définition même de ces intégrales. Au sujet des intégrales abéliennes, et notamment leur traitement par Riemann et par Weierstrass, voir [Houzel 2002, ch. VIII]. Notons enfin que le qualificatif « abéliennes » pour désigner les intégrales ainsi définies semble ne se fixer que progressivement au cours de la deuxième moitié du XIXe siècle : comparer par exemple [Neumann 1865] et [Neumann 1884, p. VI, p. 198]. Cette dernière référence témoigne en particulier du fait que l'expression « intégrales abéliennes » a pendant un temps désigné celles de la forme $\int \mathrm{d}x/\sqrt{P(x)}$, où $P$ est un polynôme de degré strictement supérieur à 4, aussi appelées « intégrales hyperelliptiques ».

31. Autrement dit, il s'agit de détecter, parmi toutes les intégrales abéliennes, celles qui correspondent au cas plus particulier des intégrales elliptiques. Notons que cette question s'inscrit dans le cadre plus général de savoir décomposer les intégrales du type $\int F$ en des intégrales plus simples. À ce sujet, voir par exemple [Lützen 1990, ch. IX].

en particulier sur certains de ses travaux sur les formes cubiques ternaires et leurs invariants [32] [Aronhold 1850 ; Aronhold 1858]. Comme l'a souligné Karen Hunger Parshall, ces articles d'Aronhold sont directement connectés à des recherches d'Otto Hesse des années 1840, se rapportant principalement aux courbes cubiques — le lien direct entre formes et courbes cubiques est que ces dernières sont définies par des équations du type $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, où $f$ est une forme cubique ternaire et $x_1, x_2, x_3$ sont des coordonnées homogènes du plan. C'est au cours de ces recherches que Hesse travailla sur le « déterminant fonctionnel » $\Delta f$ de formes cubiques ternaires [33] ; étant donnée une telle forme $f$, un des problèmes abordés était d'en trouver une autre, disons $\Phi$, telle que $\Delta\Phi = f$. Hesse avait ainsi prouvé que $\Phi$ est nécessairement de la forme $\lambda f + \Delta f$, $\lambda$ étant solution d'une équation algébrique de degré 3. Dans les articles de 1850 et 1858 cités précédemment, Aronhold avait cherché à expliciter cette équation, et avait montré qu'elle s'écrit

$$\lambda^3 - 3S\lambda - 2T = 0,$$

où $S$ et $T$ sont deux invariants de $f$. Autrement dit, les trois racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de cette équation définissent les trois formes $\Phi_i = \lambda_i f + \Delta f$ telles que $\Delta\Phi_i = f$.

Revenons maintenant à la note de 1862 d'Aronhold sur la réduction de l'intégrale abélienne de première espèce $\int \mathrm{d}x/f_0'(y)$ à une intégrale elliptique. Un cadre géométrique y est installé d'emblée : « Pour la démonstration des théorèmes, j'utiliserai, par souci de concision, l'intuition géométrique [34] » — une telle invocation de l'intuition géométrique a d'ailleurs de quoi surprendre le lecteur actuel, ne s'incarnant pas en ce à quoi celui-ci pourrait s'attendre, comme des illustrations porteuses d'indications heuristiques relatives à la démonstration en cours.

32. Rappelons qu'une *forme cubique ternaire* est un polynôme homogène de degré 3 en trois inconnues, c'est-à-dire une expression du type $\sum a_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k$, la somme portant sur tous les entiers naturels $i, j, k$ tels que $i + j + k = 3$. Une *invariant* d'une telle forme est une expression polynomiale en ses coefficients restant inchangée par l'action de toute substitution linéaire sur la forme cubique, à une puissance du déterminant de la substitution près. Pour plus de détails, voir par exemple [Parshall Hunger 1989] ou [Lê 2017, p. 47-48].

33. Il s'agit de ce que nous appelons aujourd'hui le déterminant de la matrice hessienne de $f$, c'est-à-dire que $\Delta f = \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$. Notons que $\Delta f$ est aussi une forme cubique ternaire.

34. « Zum Beweise der Sätze werde ich mich, der Kürze halber, der geometrischen Anschauung bedienen. » [Aronhold 1862, p. 465].

En effet, après cette annonce, Aronhold commence par passer des variables $x, y$ aux coordonnées homogènes $x_1, x_2, x_3$ définies (à une constante multiplicative près) par $x = x_1/x_3$ et $y = x_2/x_3$ ; le polynôme du troisième degré $f_0(x, y)$ est homogénéisé en $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^3 f_0(x_1/x_3, x_2/x_3)$, l'équation $f = 0$ étant alors interprétée par Aronhold comme une courbe cubique du plan. Ce dernier choisit ensuite un point de coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sur cette courbe et montre que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{f_0'(y)} = \int \frac{\sum \pm \alpha_1 x_2 \,\mathrm{d}x_3}{3f(xx\alpha)}.$$

Les notations utilisées dans le membre de droite sont celles d'Aronhold [35] : au dénominateur, $3f(xx\alpha)$ est par définition égal à $\alpha_1 f'(x_1) + \alpha_2 f'(x_2) + \alpha_3 f'(x_3)$, tandis que ce qui apparaît au numérateur désigne le déterminant dont les coefficients de la première colonne sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ceux de la deuxième colonne sont $x_1, x_2, x_3$ et ceux de la troisième colonnes sont $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3$.

La suite de travail d'Aronhold consiste à transformer les expressions du numérateur et du dénominateur, avant d'introduire un changement de variable permettant de faire apparaître une intégrale elliptique. Pour cela, il rappelle notamment qu'à partir du point de coordonnées $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, il est possible de mener quatre tangentes à la cubique, et fait appel à un résultat de Hesse [1848] d'après lequel les coordonnées de trois des points de tangence ainsi obtenus s'expriment en fonction de celles du quatrième (notées $a_1, a_2, a_3$), les expressions en question dépendant des trois fonctions $\Phi_i = \lambda_i f + \Delta f$ telles que $\Delta \Phi_i = f$. Après plusieurs calculs, Aronhold aboutit à l'égalité

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{f_0'(y)} = \int \frac{f(aax)\,\mathrm{d}\Delta f(aax) - \Delta f(aax)\,\mathrm{d}f(aax)}{\sqrt{6f(aax)\Phi_1(aax)\Phi_2(aax)\Phi_3(aax)}}.$$

Il introduit alors le changement de variable

$$\lambda = -\frac{\Delta f(aax)}{f(aax)},$$

qui permet de montrer que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{f_0'(y)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{2T + 3S\lambda - \lambda^3}}.$$

35. Elles seront reprises ensuite par Clebsch.

L'intégrale de droite étant une intégrale elliptique, Aronhold a ainsi atteint son objectif de départ.

L'intuition géométrique d'Aronhold semble donc se manifester par l'interprétation de l'équation $f = 0$ comme l'équation d'une courbe cubique, à la suite de quoi Aronhold fait intervenir des résultats connus relatifs à des coordonnées de points sur, et des tangentes à, cette courbe. Elle ne s'accompagne ainsi pas de figures d'illustration ou d'explications sur une quelconque visualisation qu'il aurait suivie pour élaborer sa démonstration [36].

Deux points complémentaires sont encore mis en avant par Aronhold. Le premier est l'explicitation du changement de variable réciproque, exprimant les coordonnées $x_1, x_2, x_3$ des points de la courbe cubique $f = 0$ en fonction de $\lambda$ :

$$\begin{cases} Mx_1 = P_1(\lambda) + \alpha_1\sqrt{\frac{1}{6}(2T + 3S\lambda - \lambda^3)} \\ Mx_2 = P_2(\lambda) + \alpha_2\sqrt{\frac{1}{6}(2T + 3S\lambda - \lambda^3)} \\ Mx_3 = P_3(\lambda) + \alpha_3\sqrt{\frac{1}{6}(2T + 3S\lambda - \lambda^3)}, \end{cases}$$

les $P_i$ étant des polynômes quadratiques et $M$ une constante arbitraire (dont l'existence reflète le fait que les $x_i$ ne sont définis qu'à une constante multiplicative près). Aronhold remarque d'ailleurs que « toute la théorie peut être déduite [des] relation[s] précédentes, sans intuition géométrique [37] ». Aronhold n'exécute cependant pas ce à quoi son commentaire invite : en remarquant qu'il aurait pu régler la question de Weierstrass directement grâce à ces formules, Aronhold met surtout en relief son choix de présenter son cheminement mathématique en adoptant une « intuition géométrique ».

Aronhold souligne aussi que l'intégrale elliptique à laquelle il est arrivé présente une « une analogie remarquable [38] » avec une certaine intégrale

36. Le même type de tension entre une intuition géométrique déclarée servir comme guide dans des calculs d'une part, et l'absence de figures d'autre part, fait l'objet de [Lê 2017], au sujet d'une interprétation géométrique de la théorie de l'équation du cinquième degré par Clebsch.

37. « Aus obiger Relation läßt sich übrigens die ganze Theorie, ohne jede geometrische Anschauung, ableiten. » [Aronhold 1862, p. 468]. Les relations en question peuvent d'ailleurs être vues comme une paramétrisation (non elliptique) de la cubique $f = 0$, mais Aronhold ne dit rien allant dans ce sens.

38. « Es ist noch zu bemerken, daß das Integral der ersten Gattung, auf welches diese Theorie führt, eine merkwürdige Analogie hat mit dem von Hrn. Hermite in Crelle's J.

apparaissant dans un article d'Hermite de 1856 [Hermite 1856]. Cet article se rapporte entre autres à la résolution de l'équation algébrique de degré 4 à l'aide de la théorie des invariants [39]. En guise d'application des résultats obtenus, Hermite démontre une « réduction de l'intégrale elliptique la plus générale à une autre plus simple où n'entre qu'un seul *paramètre* » [Hermite 1856, p. 8]. Ainsi, il prouve que si $f(x, y)$ est une forme binaire biquadratique, il existe une nouvelle variable $z$ et un nombre $\rho$ s'exprimant en fonction des invariants de $f$, tels que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{f(x,1)}} = \text{const.} \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\rho z^3 - z - 1}}.$$

L'analogie soulignée par Aronhold entre le résultat d'Hermite et le sien n'est cependant pas approfondie, aucun rapprochement explicite n'étant effectué dans sa note de 1862.

Mais les résultats d'Hermite et d'Aronhold se trouvent connectés par l'entremise de Francesco Brioschi. Dans une lettre écrite à Hermite [Brioschi 1863], celui-ci annonce en effet à son interlocuteur que « la théorie des formes cubiques ternaires présente une réduction de l'intégrale elliptique où n'entre qu'un seul paramètre, tout à fait analogue à celle » de son mémoire de 1856. Brioschi démontre que si $u(x, y) = 0$ est une équation du troisième degré entre $x$ et $y$, on peut trouver une nouvelle variable $z$ telle que

$$\frac{\mathrm{d}x}{u'(y)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^3 - 3sz + 2t}},$$

retrouvant la « réduction d'intégrale [...] très-importante [que] M. Aronhold avait déjà communiqué[e] à l'Académie de Berlin » [Brioschi 1863, p. 306]. Les constantes $s$ et $t$ qui apparaissent ici sont les mêmes invariants que ceux que Aronhold avait notés $S$ et $T$ ; le radical de l'intégrale d'Aronhold étant sensiblement différent de celui obtenu par Brioschi, celui-ci montre encore avec quelle transformation il est possible de passer de l'une à l'autre [40].

Bd. 52. S. 8 behandelten Fall. » [Aronhold 1862, p. 464].

39. Cet aspect des travaux d'Hermite est expliqué dans [Goldstein 2011, p. 248-250].

40. D'après [Houzel 2002, p. 91-96], ces travaux se situent dans le cadre du problème de réduction des intégrales elliptiques à des formes canoniques, auquel notamment Legendre avait contribué dès la fin du XVIII$^{e}$ siècle. C. Houzel fait aussi remarquer que Cayley avait trouvé le même résultat qu'Hermite, indépendamment de ce dernier. Voir aussi [Fricke 1913, p. 253-254], qui parle de « formes normales » plutôt que de « formes canoniques »

Sans détailler ici la démonstration de Brioschi, il est intéressant de relever que celle-ci et celle d'Aronhold ont en commun une utilisation centrale de résultats de la théorie des formes et des invariants [41]. La parenté entre les deux démonstrations semble même d'autant plus étroite que Brioschi mobilise des techniques explicitement tirées du mémoire [Aronhold 1858] et qu'il cherche (toujours à l'aide d'invariants) à trouver les liens unissant leurs deux résultats. Mais ces points de ressemblance font aussi ressortir *a contrario* une différence entre les approches de Brioschi et d'Aronhold décrites ici : alors que l'un cherche à mettre en valeur un certain point de vue géométrique, aucun objet comme des points du plan, des courbes ou des tangentes, aucune technique et aucune heuristique géométriques n'apparaissent dans les travaux de l'autre.

Courbes cubiques et intégrales elliptiques sont donc mises en relation dans les travaux d'Aronhold, mais il faut remarquer que la géométrie intervient ici pour simplifier et rendre plus intuitive la solution qu'Aronhold apporte à la question de Weierstrass, exprimée uniquement en termes d'intégrales abéliennes et elliptiques. Autrement dit, les courbes cubiques ne sont pas ici un objet d'étude, mais un moyen de (présentation d'une) démonstration d'un théorème sur ces intégrales. En ce sens, le mouvement entre géométrie et analyse diffère de chez Clebsch, qui va au contraire introduire des fonctions elliptiques pour résoudre un problème de géométrie sur les courbes cubiques.

# 3 Clebsch et les polygones de Steiner

## 3.1 Le paramétrage elliptique d'une courbe cubique

Pour démontrer le théorème de Steiner sur les polygones inscrits sur une courbe cubique, Clebsch commence par rappeler le résultat d'Aronhold démontré dans la note de 1862, selon lequel les coordonnées homogènes $x_1, x_2, x_3$ d'un point sur une courbe cubique peuvent être décrites par la formule

$$Mx_i = P_i(\lambda) + \alpha_i\sqrt{\frac{1}{6}(2T + 3S\lambda - \lambda^3)},$$

41. Le rapport de Brill et M. Noether [1892-93, p. 300] souligne que ces travaux d'Aronhold, Hermite et Brioschi, ainsi que ceux de Cayley mentionnés dans la note précédente, auraient été les premiers à avoir utilisé la théorie des invariants pour réduire une différentielle algébrique à une forme normale.

où $\lambda$ est un paramètre complexe quelconque, où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les coordonnées d'un point fixé sur la courbe et où les $P_i$ sont des polynômes quadratiques. Il note alors $g, g', g''$ les solutions de l'équation $\lambda^3 - 3S\lambda - 2T = 0$ et définit [42]

$$k^2 = \frac{g'' - g'}{g'' - g}.$$

Comme expliqué précédemment, ce nombre $k^2$ permet de définir des fonctions elliptiques $\sin\mathrm{am}$ et $\cos\mathrm{am}$. Clebsch pose alors

$$\lambda = g' \sin^2 \mathrm{am}\, u + g'' \cos^2 \mathrm{am}\, u,$$

définissant de la sorte un nouveau paramètre $u$. Remarquant ensuite que

$$\sqrt{2T + 3S\lambda - \lambda^3} = (g'' - g')\sqrt{g'' - g} \cdot \sin\mathrm{am}\, u \cdot \cos\mathrm{am}\, u \cdot \Delta\, \mathrm{am}\, u,$$

il en déduit que les formules des coordonnées $x_i$ d'un point sur la courbe cubique s'écrivent

$$Mx_i = \varphi_i(\sin^2 \mathrm{am}\, u) + m\alpha_i \frac{\mathrm{d} \sin^2 \mathrm{am}\, u}{\mathrm{d}u},$$

où les $\varphi_i$ sont des polynômes et $m$ une constante ne dépendant que de facteurs numériques et de $g, g', g''$. Il s'agit donc là d'un paramétrage elliptique des points de la cubique, le paramètre étant le nombre complexe $u$.

Dans l'optique de démontrer le théorème de Steiner, Clebsch cherche ensuite une condition sur les arguments elliptiques de trois points sur la courbe cubique exprimant l'alignement de ceux-ci.

Pour cela, il commence par revenir au paramétrage par $\lambda$, utilisant l'expression $Mx_i(\lambda) = P_i(\lambda) + \alpha_i\sqrt{\varphi(\lambda)}$, avec $\varphi(\lambda) = 2T + 3S\lambda - \lambda^3$. Son idée est d'exprimer l'alignement de trois points de paramètres $\lambda, \lambda', \lambda''$ par l'équation

$$\begin{vmatrix} x_1(\lambda) & x_2(\lambda) & x_3(\lambda) \\ x_1(\lambda') & x_2(\lambda') & x_3(\lambda') \\ x_1(\lambda'') & x_2(\lambda'') & x_3(\lambda'') \end{vmatrix} = 0.$$

42. Clebsch ne précise pas que la condition de lissité de la courbe cubique assure que les trois racines $g, g', g''$ sont distinctes, de sorte que le module $k$ ainsi défini est (un nombre complexe) différent de 0 et de 1. D'un point de vue actuel, ces formules sont celles qui permettent d'établir le lien entre les fonctions elliptiques de Jacobi et la fonction $\wp$ de Weierstrass. Voir par exemple [McKean & Moll 1999, p. 114].

Clebsch mène alors de longs calculs impliquant des manipulations délicates de déterminants ainsi que des objets et techniques issus de la théorie des invariants, qui montrent d'ailleurs sa connaissance des travaux de Brioschi que nous avons rencontrés plus haut : il cite en effet la lettre de ce dernier à Hermite, [Brioschi 1863], pour signaler qu'il retrouve dans ses propres calculs un certain covariant que Brioschi avait déjà mis en évidence. Clebsch démontre finalement qu'il existe une constante $\lambda_0$ telle que l'annulation du déterminant précédent revient à l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \sqrt{\varphi(\lambda)} \\ 1 & \lambda' & \lambda'^2 & \sqrt{\varphi(\lambda')} \\ 1 & \lambda'' & \lambda''^2 & \sqrt{\varphi(\lambda'')} \\ 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \sqrt{\varphi(\lambda_0)} \end{vmatrix} = 0.$$

Enfin, en repassant aux paramètres elliptiques $u$, il réécrit cette dernière condition sous la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin^2 \operatorname{am} u & \sin^4 \operatorname{am} u & \sin \operatorname{am} u \cdot \cos \operatorname{am} u \cdot \Delta \operatorname{am} u \\ 1 & \sin^2 \operatorname{am} u' & \sin^4 \operatorname{am} u' & \sin \operatorname{am} u' \cdot \cos \operatorname{am} u' \cdot \Delta \operatorname{am} u' \\ 1 & \sin^2 \operatorname{am} u'' & \sin^4 \operatorname{am} u'' & \sin \operatorname{am} u'' \cdot \cos \operatorname{am} u'' \cdot \Delta \operatorname{am} u'' \\ 1 & \sin^2 \operatorname{am} u_0 & \sin^4 \operatorname{am} u_0 & \sin \operatorname{am} u_0 \cdot \cos \operatorname{am} u_0 \cdot \Delta \operatorname{am} u_0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore [43]

$$u + u' + u'' + u_0 \equiv 0,$$

« où le signe $\equiv$ signifie que l'expression de gauche est soit vraiment égale à zéro, soit n'en diffère que par une expression de la forme $2pK + 2qiK'$, avec $p$ et $q$ des nombres entiers [44]. » Cette congruence est donc la condition exprimant l'alignement de trois de points d'une courbe cubique de paramètres elliptiques respectifs $u, u', u''$, le nombre $u^0$ étant une constante.

43. L'équivalence de l'annulation du déterminant en $\lambda$ et de celui en $u$ se fait au moyen de calculs relativement élémentaires. En revanche, l'équivalence entre l'annulation du déterminant en $u$ et la congruence qui suit semble moins évidente, et n'est pas justifiée par Clebsch. La démonstration faite dans [Clebsch & Lindemann 1876, p. 605-606] passe par le résultat selon lequel $\sin \operatorname{am}(u + u' + u'' + u_0)$ peut s'écrire comme une fraction dont le numérateur est égal à ce déterminant. L'annulation de ce dernier équivaut donc à celle de $\sin \operatorname{am}(u + u' + u'' + u_0)$, ce qui revient à la condition donnée ici par Clebsch.

44. « [...], wobei das Zeichen $\equiv$ andeutet, dass der Ausdruck links entweder gleich Null selbst, oder nur um einen Ausdruck der Form $2pK + 2qiK'$ davon verschiedn sein soll, $p$, $q$ als ganze Zahlen vorausgesetzt. » [Clebsch 1864, p. 105].

Remarquons qu'il s'agit là d'une congruence exprimant une relation entre des nombres complexes, et pas entre des nombres entiers (même si cette relation s'exprime elle-même à l'aide d'entiers). Ce n'est donc pas le même type de congruence que celui pour lequel Gauss avait introduit le symbole « $\equiv$ » dans les *Disquisitiones Arithmeticae* [45]. Nous allons toutefois voir dans un instant que des congruences entre entiers apparaissent également dans l'article de Clebsch, permettant d'approfondir certains calculs amorcés à l'aide de congruences complexes.

La condition d'alignement de trois points sur la cubique est appelée « formule fondamentale [46] » par Clebsch. Dans la suite de son article, cette formule est utilisée à de nombreuses reprises afin de démontrer le théorème sur les polygones de Steiner puis d'autres résultats relatifs à ces polygones.

## 3.2 La solution du problème de Steiner, et au-delà

Le théorème sur les polygones de Steiner lui-même est exprimé par Clebsch de la façon suivante :

> Il existe une infinité de polygones à $2n$ côtés et $2n$ sommets dont les sommets appartiennent à une courbe du troisième ordre donnée, dont les côtés impairs se rencontrent en un même point $a$ de la courbe, et dont les côtés pairs passent par un deuxième point $b$ de la courbe. Un choix de $a$ détermine plusieurs $b$ correspondants ; pour deux points associés $a$, $b$, il existe une infinité de polygones, le premier côté passant par $a$ pouvant être choisi de manière complètement arbitraire [47]. [Clebsch 1864, p. 94]

Remarquons que cet énoncé diffère de celui de Steiner (et le précise), puisqu'il affirme qu'on peut choisir un premier point fixe quelconque sur la courbe qui détermine alors un nombre fini de possibilités pour le deuxième

45. En termes actuels, il s'agit ici d'une congruence entre nombres complexes modulo le réseau $2K\mathbf{Z}\oplus 2iK'\mathbf{Z}$. Au sujet des congruences (entre entiers) en théorie des nombres et en algèbre entre 1750 et 1850, voir [Boucard 2015]. D'après Jenny Boucard, le symbole de congruence ne semble pas avoir été utilisé entre des nombres complexes durant la première moitié du XIXe siècle.

46. « [Unsere] Fundamentalformel $u + u_1 + u_2 \equiv -u_0$ » [Clebsch 1864, p. 116].

47. « Es giebt unendlich viele Polygone von $2n$ Seiten und $2n$ Ecken, deren Ecken auf einer gegebenen Curve dritter Ordnung liegen, deren ungerade Steiten sich in einem Punkte $a$ derselben Curve treffen, und deren gerade Seiten durch einen zweiten Punkt $b$ der Curve gehen. Ist $a$ gegeben, so ist $b$ dadurch mehrdeutig bestimmt; zu zwei zusammengehörigen Punkten $a$, $b$ giebt es aber unendlich viele Polygone, indem die erste durch $a$ gehende Seite ganz beliebig gewählt werden kann. »

point fixe ; deux tels points étant ainsi choisis, toutes les lignes polygonales de Steiner qu'on construit se referment en le même nombre d'étapes — la formulation de Steiner consiste quant à elle en une implication : si la construction se ferme pour un point de départ donné, elle se ferme pour tout point de départ, et le nombre d'étapes reste toujours le même [48].

Pour Clebsch, l'utilisation de la paramétrisation elliptique et de la formule fondamentale permettent de démontrer ce théorème d'une façon qu'il qualifie lui-même d'« extrêmement simple et élégante [49] ».

Il commence ainsi par transposer le problème à l'aide d'arguments elliptiques : aux deux points fixes $a$ et $b$, il associe respectivement les arguments $v$ et $w$, puis, supposant qu'un polygone à $2n$ côtés ait été construit, il note $z_1, z_2, \dots, z_{2n}$ les arguments de ses sommets [50]. Dans la construction, les points d'arguments $z_1$, $z_2$, $v$ sont alignés, de sorte que $z_1 + z_2 + v + u_0 \equiv 0$. De même, l'alignement des points du deuxième côté se traduit par la congruence $z_2+z_3+w+u_0 \equiv 0$, et ainsi de suite. En écrivant les congruences correspondant à $2n$ côtés consécutifs, on obtient donc le système

$$\begin{cases} 0 \equiv z_1 + z_2 + v + u_0 \\ 0 \equiv z_2 + z_3 + w + u_0 \\ 0 \equiv z_3 + z_4 + v + u_0 \\ \qquad\quad \vdots \\ 0 \equiv z_{2n-1} + z_{2n} + v + u_0 \\ 0 \equiv z_{2n} + z_{2n+1} + w + u_0, \end{cases}$$

et la somme alternée de ces équations donne $0 \equiv z_1 - z_{2n+1} + n(v - w)$. Or, dire que la ligne brisée ainsi construite se ferme en un $2n$-gone revient à dire que $z_1 \equiv z_{2n+1}$ : la condition de fermeture du polygone s'écrit donc $0 \equiv n(v - w)$, ce qui équivaut encore à l'existence de deux entiers $p$ et $q$

48. Dans tous les textes que j'ai consultés (par exemple ceux donnés en référence dans l'*Encyklopädie* au sujet des polygones de Steiner), je n'ai trouvé aucune remarque sur la différence entre les énoncés de Clebsch et de Steiner, les auteurs soulignant seulement que Clebsch démontre le théorème de Steiner.

49. « Die Frage nach den *Steiner*schen Polygonen kann mit Hülfe des soeben entwickelten Satzes auf höchst einfache une elegante Weise erledigt werden. » [Clebsch 1864, p. 106].

50. Dans son article, Clebsch identifie presque systématiquement les points et leur(s) argument(s) elliptique(s), recourant à des expressions du type « le point $v$ », etc. J'adopterai dans la suite le même raccourci de langage, qui participe d'ailleurs à un certain amalgame entre fonctions elliptiques et géométrie.

tels que

$$w = v + \frac{2(pK + qiK')}{n}. \tag{1}$$

Cette égalité permet à Clebsch de terminer sa preuve. D'une part, elle indique que si $v$ est fixé, il existe un nombre fini et supérieur à 1 de choix de points $w$ donnant un polygone de Steiner [51] — Clebsch appelle de tels couples $v, w$ des « couples de points de Steiner », voire des « couples de Steiner ». D'autre part, l'indépendance de l'égalité (1) vis-à-vis de $z_1$ montre qu'on obtient un polygone de Steiner quel que soit le point initial choisi, d'où l'infinité de polygones annoncée [52].

La démonstration du théorème de Steiner elle-même est en fait loin de constituer le seul point d'intérêt de Clebsch, celui-ci soulignant tout de suite la proximité du problème géométrique avec la théorie de la transformation des fonctions elliptiques :

> On reconnaît immédiatement [dans la formule (1)] la preuve du théorème de Steiner et le lien du problème avec la transformation des fonctions elliptiques. [...] Trouver tous les couples de points $v$, $w$ ne nécessite rien d'autre que la résolution de l'équation modulaire pour la transformation d'ordre $n$. [Clebsch 1864, p. 106-107] [53]

Clebsch ne précise pas davantage ce à quoi il fait référence. Il semble viser ici le problème de division des fonctions elliptiques, consistant à déterminer la quantité $\sin \mathrm{am}(z/n)$, lorsqu'on suppose que $\sin \mathrm{am}\, z$ est connue. Lorsque $n$ est impair par exemple, ce problème conduit à une équation (dite *de*

51. Deux points de la courbe étant identiques dès que leurs arguments elliptiques diffèrent d'un nombre $2p_0K + 2iq_0K'$, la formule (1) définit le même point lorsque $p$ et $q$ sont remplacés par deux entiers $p'$ et $q'$ congrus à $p$ et $q$ modulo $n$. Il y a donc ainsi $n^2$ points $w$ associés à un point $v$, dont $v$ lui-même.

52. D'un point de vue actuel, fixons sur une cubique lisse un point $Q$ et choisissons-le comme élément neutre pour la loi de groupe $\oplus$ décrite par la méthodes des tangentes et sécantes. Étant donné un autre point $P$ et un polygone de Steiner $M_1M_2M_3\ldots$ associé au couple $P, Q$, on a alors $M_{2k+1} = M_1 \oplus kP$ pour tout entier $k$. Dire que le polygone se referme en $2n$ étapes revient à dire que $M_{2n+1} = M_1$, donc que $nP = 0$. Ainsi, les points $P$ donnant un (et donc une infinité de) $2n$-gone(s) fermé(s) sont exactement les points (complexes) de $n$-torsion de la courbe. La formule (1) peut alors s'interpréter comme le fait que le groupe formé de ces points est isomorphe à $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2$, résultat aujourd'hui classique. Voir par exemple [Silverman 1986, p. 163].

53. « Man erkennt hierin sofort den Beweis des Steinerschen Satzes und den Zusammenhang der Aufgabe mit der Transformation der elliptischen Functionen. [...] Und zwar erfordet die Auffindung aller Punktenpaare $v$, $w$ nichts als die Auflösung der Modulargleichung für die Transformation $n^{\text{ter}}$ Ordnung. »

*division*) de degré $n^2$ dont les racines sont les quantités

$$\sin \operatorname{am}\left(\frac{z}{n}+\frac{p\omega+q\omega'}{n}\right),$$

où $p$ et $q$ sont des entiers compris entre 0 et $n-1$ et où $\omega, \omega'$ sont les deux périodes de la fonction elliptique considérée. Pour rendre l'analogie avec la forme de l'équation (1) plus précise, il faut donc considérer le problème de division pour une fonction elliptique ayant pour périodes $\omega = 2K$ et $\omega' = 2iK'$ (et pas $4K$ et $2iK'$ comme c'est le cas pour celle introduite plus haut [54]).

Remarquons qu'au XIX^e^ siècle, l'expression « équation modulaire » pouvait également renvoyer à une autre équation [55], liée au problème consistant à trouver, un module $k$ étant donné, une transformation rationnelle $y = U(x)/V(x)$, un module $\lambda$ et une constante $M$ tels que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{1}{M}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

En prenant pour $U$ et $V$ des polynômes premiers entre eux et de degrés respectifs $n$ et $n-1$, la transformation est dite d'ordre $n$. Le module $\lambda$ est alors lié à $k$ par une équation de degré $n+1$ appelée *équation modulaire* [56]. Dans le cas où $n$ est impair par exemple, et où les entiers $p$ et $q$ sont premiers à $n$, Jacobi [1829] avait montré que $\lambda$ s'exprime par la formule

$$\lambda = k^n\left(\sin \operatorname{co} \operatorname{am}(4\varepsilon)\sin \operatorname{co} \operatorname{am}(8\varepsilon)\ \cdots\ \sin \operatorname{co} \operatorname{am}\left(4\frac{n-1}{2}\varepsilon\right)\right)^4,$$

54. Les propriétés algébriques de l'équation de division ne dépendent quant à elles pas des périodes de la fonction elliptique considérée.

55. Cette polysémie est soulignée dans [Goldstein 2011, p. 229]. Comme nous allons le voir dans un instant, Clebsch semble bien utiliser cette expression « équation modulaire » pour désigner deux équations distinctes : d'une part, celle que nous venons de présenter (de degré $n^2$ et liée au problème de division), d'autre part, une équation de degré $n+1$ que nous introduisons maintenant.

56. De nombreuses recherches autour des équations modulaires ont été menées au XIX^e^ siècle. En particulier, celles correspondant à $n = 5$, 7 et 11 ont fait l'objet de résultats énoncés par Évariste Galois en 1832 ; le cas $n = 5$ a ensuite été au cœur de travaux d'Enrico Betti, d'Hermite, de Kronecker et de Brioschi (entre autres) sur l'équation générale du cinquième degré. Voir [Kiernan 1971 ; Gray 1986/2000 ; Bottazzini 1994 ; Houzel 2002 ; Petri & Schappacher 2004 ; Goldstein 2011 ; Lê 2017].

où $\operatorname{co\,am}\theta = \operatorname{am}(K - \theta)$. Ces éléments sur l'équation modulaire et ses racines apparaissent dans la suite de l'article de Clebsch, alors que celui-ci poursuit la mise en place d'articulations entre géométrie et fonctions elliptiques.

Partant en effet d'un couple de Steiner $v, w$ et d'un point quelconque $s$ appartenant à la courbe cubique, Clebsch montre que les troisièmes points d'intersection des droites $sv$ et $sw$ avec la courbe forment un nouveau couple de Steiner (voir la figure 4). La démonstration s'appuie encore sur la formule fondamentale : par construction, les points d'intersection $w'$ et $v'$ introduits vérifient

$$w' \equiv -(u_0 + s + v) \qquad \text{et} \qquad v' \equiv -(u_0 + s + w),$$

ce qui implique que $w' - v' \equiv w - v$. Comme $v, w$ est un couple de Steiner, leur différence est égale à $\varepsilon = (2pK + 2iqK')/n$ ; par conséquent, on a aussi $w' - v' \equiv \varepsilon$, de sorte que le couple $v', w'$ est aussi de Steiner.

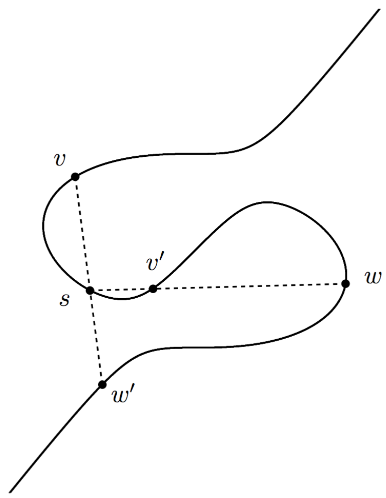


FIGURE 4 – Étant donnés un couple de Steiner $v, w$ et un point quelconque $s$ appartenant à la courbe, les points $v', w'$ ainsi construits forment encore un couple de Steiner.

En fait, la relation $w' - v' \equiv w - v \equiv \varepsilon$ permet à Clebsch de définir des « classes » de couples de points : « nous dirons que deux couples de points appartiennent *à la même classe* lorsque les entiers $p$ et $q$ ont la même valeur pour chacun d'eux [57]. » Clebsch poursuit ensuite le classement : « les différentes *classes* de couples de points se rangent en *groupes* lorsqu'on considère comme appartenant à un même groupe des couples de points pour lesquels $w - v \equiv \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \ldots, (n-1)\varepsilon$ » [58]. Les groupes ainsi définis sont alors décrits par une construction géométrique : à partir d'un couple $v, w$ donné, on construit d'abord comme précédemment un couple $v', w'$ de la même classe. Ensuite, les droites $vw'$ et $v'w$ intersectent la cubique en $v''$ et $w''$, qui forment un couple du même groupe que $v, w$ (et que $v', w'$).

Ainsi, alors que l'introduction des classes découle d'une propriété exprimée géométriquement et démontrée à l'aide des arguments elliptiques, les groupes sont d'abord définis par une relation sur les arguments elliptiques, et sont ensuite affectés d'un habillement géométrique : cette dissymétrie de l'articulation entre géométrie et fonctions elliptiques dans la présentation des classes et des groupes semble suggérer que Clebsch ne cherche pas à hiérarchiser les pans disciplinaires et organiser ses démonstrations en conséquence : dans la technique, le va-et-vient agit dans les deux sens et est présenté de la sorte.

Après quelques autres considérations du même type, Clebsch appuie son propos en résumant :

> Chaque théorème de la théorie de la transformation trouve vraiment ici son expression géométrique. À chaque classe correspond une période divisée par $n$, à chaque groupe correspond une racine de l'équation modulaire, etc. [59]. [Clebsch 1864, p. 109]

57. « Bezeichnen wir zwei Punktenpaare als *zu derselben Classe* gehörig, wenn $p$, $q$ für sie denselben Werth haben, [...] » [Clebsch 1864, p. 108].

58. « Die verschiedenen *Classen* von Punktpaaren ordnen sich in *Gruppen*, sofern wir als derselben Gruppe angehörig solche Punktenpaare betrachten, für welche $w - v \equiv \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \ldots, (n-1)\varepsilon$. » [Clebsch 1864, p. 108]. Clebsch remarque en outre que deux classes correspondant à $h\varepsilon$ et $(n-h)\varepsilon$ sont identiques puisqu'elles correspondent à des couples du type $v, w$ et $w, v$. Les motivations pour la recherche de cette classification en classes et groupes ne sont pas explicitées par Clebsch. Au sujet de la pratique classificatoire en sciences, et en particulier dans les mathématiques du XIXe siècle, voir le numéro spécial des *Cahiers François Viète* paru en 2016 (série 3, nº 1). Notons enfin que dans l'article où il expose sa version de la démonstration du théorème de Mordell sur le groupe des points rationnels d'une courbe elliptique, Weil introduit aussi une notion de « classes » de points rationnels, classes qui forment un groupe abélien fini [Weil 1930]. Voir à ce sujet [Goldstein 1993, p. 43].

59. « Ueberhaupt findet jeder Satz der Transformationstheorie seinen geometrischen Ausdruck. Jeder Classe entspricht eine $n$fach getheilte Periode, jeder Gruppe eine Wurzel der Modulargleichung, u. s. w. »

Ici, la correspondance entre une classe et une période divisée par $n$ renvoie au fait que les couples de points d'une classe sont caractérisés par une valeur constante de la différence de leurs arguments : $w - v = \varepsilon$, avec $\varepsilon = (2pK + 2iqK')/n$ fixé. Par ailleurs, nous avons vu que les racines de l'équation modulaire s'expriment chacune à l'aide de multiples $\varepsilon, 2\varepsilon, \ldots, (n-1)\varepsilon/2$, qui correspondent effectivement aux différentes classes d'un même groupe.

Cette dernière citation souligne enfin que Clebsch rassemble des éléments techniques constitutifs de la géométrie des courbes cubiques et de la théorie des fonctions elliptiques en une correspondance univoque. Les termes choisis montrent toutefois que ce sont les éléments liés à la transformation des fonctions elliptiques qui sont dotés d'une « expression géométrique » (en classes et groupes de points) : l'objectif de Clebsch est bien de trouver de nouvelles propriétés géométriques des courbes cubiques en s'appuyant sur des résultats connus relatifs aux fonctions elliptiques.

## 3.3 Congruences

Dans le reste de l'article, Clebsch ne revient plus sur les analogies avec la théorie de la transformation. En revanche, il utilise encore à nombreuses reprises sa formule fondamentale afin de démontrer divers résultats (pour la plupart déjà connus) sur les courbes cubiques.

Par exemple, après avoir approfondi le cas où $n = 2$, Clebsch passe à $n = 3$, et retrouve des propriétés des points d'inflexion des courbes cubiques apparaissant déjà dans le *System der analytischen Geometrie* de Julius Plücker [1835]. Les tangentes en ces points étant des droites intersectant la courbe au seul point de contact (compté avec multiplicité 3), les points d'inflexion ont pour argument elliptique des nombres complexes $u$ tels que $3u + u_0 \equiv 0$, c'est-à-dire

$$u = -\frac{u_0}{3} + \frac{2pK + 2iqK'}{3},$$

avec $p$ et $q$ entiers compris entre 0 et 2. Clebsch retrouve ainsi le nombre de points d'inflexion que possède toute courbe cubique, à savoir 9, associés à des couples $p, q$ qu'il représente en un tableau :

$$\begin{array}{ccc} 0,0 & 0,1 & 0,2 \\ 1,0 & 1,1 & 1,2 \\ 2,0 & 2,1 & 2,2. \end{array}$$

Comme le souligne Clebsch, ce tableau, associé encore une fois à la formule fondamentale, permet en outre de retrouver les relations d'alignement existant entre les neuf points d'inflexion : il s'agit des points qui correspondent à une même ligne, à une même colonne ou qui, « le schéma précédent étant conçu comme un déterminant, apparaissent comme étant multipliés entre eux [60] ». Pour les points d'inflexion, c'est la simplicité rendue possible par l'utilisation des fonctions elliptiques qui est ici mise en avant : « La théorie des points d'inflexion prend une forme très simple grâce aux considérations précédentes [61] ».

Clebsch s'intéresse ensuite à d'autres propriétés des points d'inflexion. Par exemple, il démontre que les points $v$ qui, associés à un point d'inflexion $w_0$, donnent lieu à un $6n$-gone de Steiner sont caractérisés par la propriété suivante : si $w$ et $w'$ donnent chacun lieu à un $2n$-gone avec $v$, alors le point $w''$ en lequel la droite $ww'$ recoupe la cubique donne également lieu à un $2n$-gone avec $v$ (voir la figure 5).

Pour les points $v$ jouissant de cette propriété, Clebsch s'intéresse à diverses propriétés des points $w$ formant avec $v$ un $2n$-gone. Ces derniers ont des arguments elliptiques de la forme

$$w = v + \frac{2(pK + qiK')}{n},$$

l'argument $v$ étant lui-même déterminé par une égalité du type

$$v = w_0 - \frac{2(rK + siK')}{3n}.$$

Trois points $w, w', w''$ associés respectivement à des entiers $p, q$ ; $p', q'$ ; $p'', q''$ étant alignés si et seulement si $w + w' + w'' \equiv -u_0$, cette condition

60. « [...] solche [Punkte], welche, das obige Schema als Determinante aufgefasst, in derselben mit einander multiplicirt erscheinen würden. » [Clebsch 1864, p. 111]. Il s'agit donc des triplets comme $0, 0$ ; $0, 1$ ; $0, 2$, ou encore $0, 1$ ; $1, 2$ ; $2, 0$. Cette notation des points d'inflexion sera entre autres reprise dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Camille Jordan [1870] dans le cadre de l'étude du groupe de « l'équation aux neuf points d'inflexion ». Cette équation fait partie d'une famille plus générale appelée « les équations de la géométrie », dont le rôle dans l'assimilation de la théorie des équations et des substitutions par plusieurs géomètres gravitant autour de Clebsch a été étudié dans [Lê 2015 ; Lê 2016].

61. « Die Theorie der Wendepunkte nimmt mit Hülfe der obigen Betrachtungen eine sehr einfache Gestalt an. » [Clebsch 1864, p. 111].

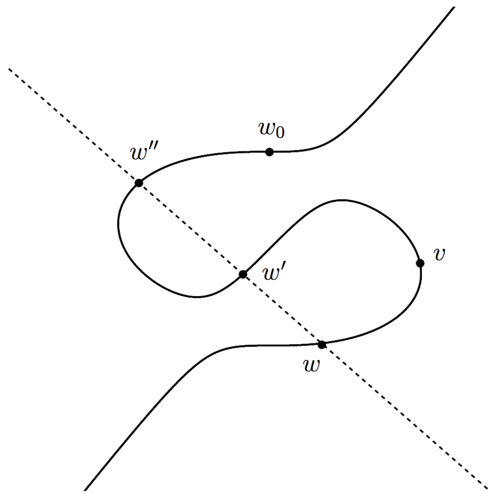


Figure 5 – Le point d'inflexion $w_0$ et $v$ forment un couple de Steiner associé à un $6n$-gone si et seulement si quels que soient les points $w, w'$ formant respectivement avec $v$ des couples de Steiner associés à des $2n$-gones, il en va de même pour le point $w''$.

s'écrit ici

$$3v + \frac{2\left((p+p'+p'')K + (q+q'+q'')iK'\right)}{n} \equiv -u_0,$$

ou encore

$$3w_0 + \frac{2\left((p+p'+p''-r)K + (q+q'+q''-s)iK'\right)}{n} \equiv -u_0.$$

Tenant compte du fait que $w_0$ est un point d'inflexion, on a $3w_0 \equiv -u_0$, de sorte que la congruence (entre nombres complexes) précédente exprimant l'alignement de $w, w', w''$ équivaut aux congruences (entre entiers) suivantes :

$$p+p'+p'' \equiv r \qquad \text{et} \qquad q+q'+q'' \equiv s \pmod{n}.$$

La discussion se poursuit alors par une longue disjonction de cas portant sur des propriétés arithmétiques de $n$, $r$ et $s$.

Par exemple, Clebsch remarque que lorsque $n$ n'est pas divisible par 3, alors le système des points $w$ contient un et un seul point d'inflexion. En effet, chercher un point d'inflexion parmi ces points revient à chercher des arguments de trois points alignés $w$, $w'$, $w''$ égaux, c'est-à-dire correspondant à $p = p' = p''$ et $q = q' = q''$. Les congruences précédentes s'écrivent alors

$$3p \equiv r \qquad \text{et} \qquad 3q \equiv s \pmod{n},$$

qui donnent effectivement une solution $(p, q)$ unique modulo $n$, dans le cas où celui-ci est premier à 3. Clebsch raffine ensuite la discussion de ce cas, et montre par exemple que si $n$ est de la forme $6k \pm 1$, les points $w$ sont trois à trois alignés sur exactement $(n^2 - 1)(n^2 - 2)/6$ droites, etc.

Comme le suggère cette description, des considérations arithmétiques surviennent dans certaines démonstrations de Clebsch visant à prouver des propriétés de distributions géométriques de points sur une courbe cubique (typiquement, des alignements de triplets de points ou des appartenances de quintuplets de points à une même conique). Ces considérations s'expriment en particulier par des congruences entre nombres entiers, elles-mêmes issues de congruences entre nombres complexes introduites au départ *via* une propriété de périodicité de la fonction elliptique $\sin\mathrm{am}$.

# 4 Configurations et reconfigurations disciplinaires

Congruences, invariants, fonctions elliptiques et leurs équations modulaire et de division sont autant d'objets qui ont été au centre d'un domaine d'activités collectives des années 1840-1850 que Catherine Goldstein et Norbert Schappacher ont mis en évidence et baptisé *analyse algébrique arithmétique*. Plus précisément, cette appellation renvoie à un champ de recherches directement lié aux *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801), « entremêlant congruences, équations algébriques (et en particulier celles issues de l'analyse) et fonctions elliptiques, [et] intégrant diverses techniques dont la théorie des invariants, l'analyse de Cauchy et les théorèmes de Galois ne sont que quelques exemples [62]. » Ces éléments forment donc, aux côtés des

62. La description complète des caractéristiques et du fonctionnement du champ est faite dans [Goldstein & Schappacher 2007]. L'extrait utilisé ici est tiré de [Goldstein 2011, p. 256-257] : « In the mid-nineteenth century, [arithmetic algebraic analysis] interrelated a number of mathematicians around congruences, algebraic equations (specially those arising from analysis), and elliptic functions, as we have seen above, incorporating new techniques along the way, of which invariant theory, Cauchy analysis and Galois's theorems are but a few examples. » Notons en outre que les noms de Jacobi, Hermite et

sources explicitement introduites par Clebsch, les principales pièces qu'il assemble et utilise dans ses travaux sur le paramétrage des cubiques et les polygones de Steiner.

Ces travaux témoignent cependant bien d'une configuration disciplinaire différente, dans laquelle la géométrie constitue l'objet d'étude principal. Ils se distinguent ainsi des recherches liées à l'analyse algébrique arithmétique, presque entièrement étrangères aux objets géométriques étudiés par Clebsch [63]. Ils se différencient également des travaux d'Aronhold que nous avons examinés et dont nous avons vu qu'ils consistaient à répondre à une question d'analyse portant sur la réduction d'intégrales abéliennes, se servant pour cela de la géométrie comme moyen de démonstration [64] ; au contraire, l'introduction des fonctions elliptiques chez Clebsch est destinée à la résolution d'un problème géométrique donné, celui des polygones de Steiner.

Au-delà de cet objectif lui-même, nous avons pu voir comment les différents éléments issus des sources de Clebsch étaient mobilisés, façonnant une pratique particulière. Ainsi, ce qui était vu chez Aronhold comme des formules de changement de variable dans une intégrale est sélectionné et retravaillé par Clebsch pour donner un paramétrage elliptique d'une courbe cubique ; la formule fondamentale sur l'alignement de trois points sur la cubique, obtenue au prix de calculs mettant en jeu invariants et covariants, et reflétant une propriété sur les zéros de la fonction $\sin \mathrm{am}$, est exprimée à l'aide du symbole de congruence, importé à l'occasion depuis la théorie des nombres et utilisé ensuite de façon récurrente pour mettre en évidence classes, groupes et autres distributions de points et de droites attachés à une cubique ; les équations modulaire et de division, enfin, ne sont pas travaillées en tant que telles et servent plutôt à multiplier les ponts entre la théorie des fonctions elliptiques et des propriétés géométriques des courbes cubiques. La conjonction de tous cela crée donc une configuration originale dans laquelle Clebsch marie entre eux des éléments issus de l'analyse, de l'algèbre, de l'arithmétique et de la géométrie.

---

Brioschi, auxquels nous avons relié plus ou moins directement Clebsch, renvoient à des mathématiciens engagés dans l'analyse algébrique arithmétique.

63. Voir [Goldstein & Schappacher 2007, p. 34, note 115].

64. Les descriptions faites par K. Hunger Parshall [1989, p. 172] suggèrent que si Aronhold connaissait bien les travaux géométriques de Hesse à la source de ses propres recherches en théorie des invariants, la géométrie elle-même ne fait pas partie de ses sujets de prédilection.

Les recherches de Clebsch décrites ici ne sont bien sûr pas les seules de la deuxième moitié du XIXe siècle ayant mis en place des interfaces disciplinaires fertiles : outre l'analyse algébrique arithmétique ou les travaux de Jacobi et d'Aronhold que nous avons croisés, on pourra entre autres penser aux rencontres entre groupes, équations différentielles et géométrie ayant notamment mené à l'introduction des fonctions fuchsiennes ; aux liens entre cristallographie, groupes et géométrie autour de la notion de symétrie ; aux rencontres entre équations algébriques et équations différentielles ayant présidé à l'élaboration de la théorie de Galois différentielle ; ou encore aux lectures de la théorie des substitutions faites par le biais d'équations algébriques associées à des configurations géométriques particulières [65]. Toutes ces études de cas renvoient ainsi à des travaux n'ayant pas cherché à se situer dans un clivage disciplinaire fixé par avance, et attestent donc de la fécondité et de l'importance de rencontres de divers domaines dans le développement des mathématiques, au moins dans la deuxième moitié du XIXe siècle.

Mais si cette constatation confirme, s'il le fallait, la pertinence de vouloir s'intéresser à de telles rencontres, elle appelle aussi à une exigence de la part de qui s'y attaque. Car ces rencontres, ainsi que les modalités selon lesquelles elles opèrent, ne sont susceptibles d'être pleinement détectées et analysées qu'au prix d'un examen détaillé des textes mathématiques et des démonstrations techniques dont ils sont porteurs. Dans notre cas de l'article de Clebsch de 1864, les éléments tels que les congruences (complexes ou entières), les invariants et les équations modulaires, et leur intrication au sein de la pratique de Clebsch, auraient ainsi pu rester masqués par des descriptions plus superficielles se contentant de relever un objectif général — la démonstration du théorème des polygones de Steiner — ou se concentrant uniquement sur un résultat intermédiaire clé — le paramétrage elliptique des courbes cubiques. De là, me semble-t-il, l'importance pour l'historien de scruter les détails au plus près de la technique, afin de pouvoir cerner les richesses des dynamiques d'interfaces disciplinaires à l'œuvre au cœur même des processus de production du savoir mathématique.

65. Voir respectivement [Gray 1986/2000 ; Scholz 1989 ; Archibald 2011 ; Lê 2016].

## Références

Abel, Niels Henrik, Thomas Clausen & Jacob Steiner (1827). « Aufgabe und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen ». Dans : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 2, p. 286–292.

Archibald, Tom (2011). « Differential Equations and Algebraic Transcendents: French Efforts at the Creation of a Galois Theory of Differential Equations 1880-1910 ». Dans : *Revue d'histoire des mathématiques* 17, p. 373–401.

Aronhold, Siegfried (1850). « Zur Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Variabeln ». Dans : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 39, p. 140–159.

— (1858). « Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen. » Dans : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 55, p. 97–191.

— (1862). « Algebraische Reduction des Integrals $\int F(x,y)\,\mathrm{d}x$ wo $F(x,y)$ eine beliebige rationale Function von $x$, $y$ bedeutet, und zwischen diesen Grössen eine Gleichung dritten Grades von der allgemeinsten Form besteht, auf die Grundform der elliptischen Transcendenten ». Dans : *Monatsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (aus dem Jahre 1861), p. 462–468.

Barbin, Évelyne & René Guitart (2001). « Algèbre des fonctions elliptiques et géométrie des ovales cartésiennes ». Dans : *Revue d'histoire des mathématiques* 7.2, p. 161–205.

Bos, Henk J. M. et al. (1987). « Poncelet's Closure Theorem ». Dans : *Expositiones Mathematicae* 5, p. 289–364.

Bottazzini, Umberto (1994). « Solving Higher-degree Equations ». Dans : *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. Sous la dir. d'Ivor Grattan-Guinness. T. 1. London, New York : Routledge, p. 567–575.

Bottazzini, Umberto & Jeremy Gray (2013). *Hidden Harmony—Geometric Fantasies: The Rise of Complex Functions*. New York : Springer.

Boucard, Jenny (2015). « Résidus et congruences de 1750 à 1850 : une diversité de pratiques entre algèbre et théorie des nombres ». Dans : *Sciences mathématiques 1750-1850. Continuités et ruptures*. Sous la dir. de Christian Gilain & Alexandre Guilbaud. Paris : CNRS Éditions, p. 509–540.

Boyer, Carl B. (1956). *History of Analytic Geometry.* New York : Scripta Mathematica.

Brill, Alexander, Paul Gordan et al. (1873). « Rudolf Friedrich Alfred Clebsch – Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen ». Dans : *Mathematische Annalen* 7, p. 1–55.

Brill, Alexander & Max Noether (1892-93). « Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit ». Dans : *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 3, p. 107–566.

Brioschi, Francesco (1863). « Sur la théorie des formes cubiques à trois indéterminées. Extrait d'une lettre à Hermite ». Dans : *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* 56, p. 304–307.

Briot, Charles & Jean-Claude Bouquet (1859). *Traité des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques.* Paris : Mallet-Bachelier.

Clebsch, Alfred (1857). « Anwendung der elliptischen Funktionen auf ein Problem der Geometrie des Raumes ». Dans : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 53, p. 292–308.

— (1864). « Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung ». Dans : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 63, p. 94–121.

Clebsch, Alfred & Ferdinand Lindemann (1876). *Vorlesungen über Geometrie.* T. 1. Leipzig : Teubner.

Cramer, Gabriel (1750). *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques.* Genève : Frères Cramer et Cl. Philibert.

Del Centina, Andrea (2016). « Poncelet's Porism: A Long Story of Renewed Discoveries ». Dans : *Archive for History of Exact Sciences* 70, p. 1–122, 123–176.

D'Esclaibes, Robert (1880). « Sur les applications des fonctions elliptiques aux courbes du premier genre ». Thèse de doctorat. Faculté des sciences de Paris.

Dingeldey, Friedrich (1903). « Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme ». Dans : *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* T. III. C. 1. Leipzig : Teubner, p. 1–160.

Dugac, Pierre (1976). *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques.* Paris : Vrin.

EULER, Leonhard (1748). *Introductio in analysin infinitorum.* Lausanne : Marcum-Michaelem Bousquet.

FRICKE, Robert (1913). « Elliptische Funktionen ». Dans : *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* T. II. B. 3. Leipzig : Teubner, p. 177–348.

FRIEDELMEYER, Jean-Pierre (2007). « Le Théorème de clôture de Poncelet, une démonstration "imparfaite", qui fait toute une histoire... » Dans : *Histoire et enseignement des mathématiques – Rigueurs, erreurs, raisonnements.* Sous la dir. d'Évelyne BARBIN & Dominique BÉNARD. Institut National de Recherche Pédagogique – Université Blaise-Pascal de Clermont-Ferrand (IREM), p. 229–261.

GISPERT, Hélène (1999). « Les Débuts de l'histoire des mathématiques sur les scènes internationales et le cas de l'entreprise encyclopédique de Felix Klein et Jules Molk ». Dans : *Historia Mathematica* 26, p. 344–360.

GOLDSTEIN, Catherine (1993). « Descente infinie et analyse diophantienne : programmes de travail et mise en œuvre chez Fermat, Levi, Mordell et Weil ». Dans : *Cahiers du Séminaire d'histoire et de philosophie des mathématiques.* 2e sér. 3, p. 25–49.

— (2011). « Charles Hermite's Stroll through the Galois Field ». Dans : *Revue d'histoire des mathématiques* 17, p. 211–270.

GOLDSTEIN, Catherine & Norbert SCHAPPACHER (2007). « A Book in Search of a Discipline ». Dans : *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae.* Sous la dir. de Catherine GOLDSTEIN, Norbert SCHAPPACHER & Joachim SCHWERMER. Berlin : Springer, p. 3–65.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor (1994a). « An Overview of Trigonometry and its Functions ». Dans : *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences.* Sous la dir. d'Ivor GRATTAN-GUINNESS. T. 1. London, New York : Routledge, p. 499–503.

— éd. (1994b). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences.* London, New York : Routledge.

GRAY, Jeremy (1986/2000). *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré.* 2e éd. (première édition 1986). Boston : Birkhäuser.

— (1994). « Curves ». Dans : *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. Sous la dir. d'Ivor Grattan-Guinness. T. 2. London, New York : Routledge, p. 860–865.

Hermite, Charles (1856). « Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. Premier mémoire ». Dans : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 52, p. 1–17.

Hesse, Otto (1848). « Über Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Puncten berühren ». Dans : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 36, p. 143–176.

Houzel, Christian (2002). *La Géométrie algébrique : recherches historiques*. Paris : Albert Blanchard.

— (2004). « Poincaré et l'analyse diophantienne ». Dans : *De Zénon d'Elée à Poincaré : recueil d'études en hommage à Roshdi Rashed*. Sous la dir. de Régis Morelon & Ahmad Hasnaoui. Louvain, Paris : Peeters Leuven, p. 221–236.

Husemöller, Dale (1987). *Elliptic Curves*. New York : Springer.

Jacobi, Carl Gustav Jacob (1829). *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Berlin : Bornträger.

— (1845). « Sur l'application des transcendantes elliptiques à ce problème connu de géométrie : *Trouver la relation entre la distance des centres et les rayons de deux cercles dont l'un est circonscrit à un polygone irrégulier et dont l'autre est inscrit à ce même polygone* ». Dans : *Journal de Mathématiques pures et appliquées* 10, p. 435–444.

Jordan, Camille (1870). *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Paris : Gauthier-Villars.

Kiernan, B. Melvin (1971). « The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin ». Dans : *Archive for History of Exact Sciences* 8, p. 40–154.

Kohn, Gustav (1908). « Ebene Kurven dritter und vierter Ordnung ». Dans : *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. T. III. 2. 1. Leipzig : Teubner, p. 457–570.

Lacroix, Sylvestre (1861/1862). *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*. 6e éd. Paris : Mallet-Bachelier.

Lambert, Johann Heinrich (1768). « Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques ». Dans : *Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres* 27, année 1761, p. 265–322.

LANG, Serge (1978). *Elliptic Curves, Diophantine Analysis.* Berlin, Heidelberg, New York : Springer.

LÊ, François (2015). « “Geometrical Equations”: Forgotten Premises of Felix Klein’s *Erlanger Programm* ». Dans : *Historia Mathematica* 42.3, p. 315–342.

— (2016). « Reflections on the Notion of Culture in the History of Mathematics: The Example of “Geometrical Equations” ». Dans : *Science in Context* 29.3, p. 273–304.

— (2017). « Alfred Clebsch’s “Geometrical Clothing” of the Theory of the Quintic Equation ». Dans : *Archive for History of Exact Sciences* 71.1, p. 39–71.

LEGENDRE, Adrien-Marie (1788). « Mémoire sur les intégrations par arcs d’ellipse ». Dans : *Histoire de l’Académie royale des sciences* année 1786, p. 616–643.

LEVI, Beppo (1906). « Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie (I) ». Dans : *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino* 41, p. 739–764.

— (1908). « Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie (II, III, IV) ». Dans : *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino* 43, p. 99–120, 413–434, 672–681.

— (1909). « Sull’equazione indeterminata del 3º ordine ». Dans : *Atti del IV congresso internazionale dei matematici* 2, p. 173–177.

LÜTZEN, Jesper (1990). *Joseph Liouville 1809-1882: Master of Pure and Applied Mathematics.* New York : Springer.

MCKEAN, Henry & Victor MOLL (1999). *Elliptic Curves: Function Theory, Geometry, Arithmetic.* Cambridge : Cambridge University Press.

MORDELL, Louis J. (1922). « On the Rational Solutions of the Indeterminate Equations of the Third and Fourth Degrees ». Dans : *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 21, p. 179–192.

NEUMANN, Carl (1865). *Vorlesungen über Riemann’s Theorie der Abel’schen Integrale.* 1re éd. Leipzig : Teubner.

— (1884). *Vorlesungen über Riemann’s Theorie der Abel’schen Integrale.* 2e éd. Leipzig : Teubner.

NOETHER, Max (1875). « Otto Hesse ». Dans : *Zeitschrift für Mathematik und Physik: Historisch-literarische Abtheilung* 20, p. 77–88.

PARSHALL HUNGER, Karen (1989). « Toward a History of Nineteenth-Century Invariant Theory ». Dans : *The History of Modern Mathe-*

*matics*. Sous la dir. de John McCleary & David E. Rowe. T. 1. Ideas and their Reception. Boston, San Diego, New York : Academic Press, p. 157–206.

Petri, Birgit & Norbert Schappacher (2004). « From Abel to Kronecker. Episodes from 19th Century Algebra ». Dans : *The Legacy of Niels Henrick Abel*. Sous la dir. d'Olav Arnfinn Laudal & Ragni Piene. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, p. 227–266.

Plücker, Julius (1835). *System der analytischen Geometrie*. Berlin : Duncker und Humbolt.

Poincaré, Henri (1901). « Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques ». Dans : *Journal de Mathématiques pures et appliquées*. 5e sér. 7, p. 161–233.

Poncelet, Jean-Victor (1822). *Traité des propriétés projectives des figures*. Paris : Bachelier.

Schappacher, Norbert (1991). « Développement de la loi de groupe sur une cubique ». Dans : *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988/89*. Sous la dir. de Catherine Goldstein. T. 91. Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, p. 159–184.

Schappacher, Norbert & René Schoof (1996). « Beppo Levi and the Arithmetic of Elliptic Curves ». Dans : *The Mathematical Intelligencer* 18.1, p. 57–69.

Scholz, Erhard (1989). *Symmetrie, Gruppe, Dualität: Zur Beziehung zwischen theorischer Mathematik und Anwendungen in Kristallographie und Baustatik des 19. Jahrhunderts*. Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser.

Silverman, Joseph H. (1986). *The Arithmetic of Elliptic Curves*. New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo : Springer.

Simon, Max (1876). « Ganzzahlige Multiplication der elliptischen Functionen in Verbindung mit dem Schliessungsproblem ». Dans : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 81, p. 301–323.

Smadja, Ivahn (2011). « Des méthodes d'intégration par arcs de sections coniques aux échelles de modules. Legendre lecteur de Landen ». Dans : *Archive for History of Exact Sciences* 65.4, p. 343–395.

— (2013). « De la lemniscate au damier analytique. Legendre et le primat de l'analyse ». Dans : *Les Courbes. Études sur l'histoire d'un concept*. Sous la dir. de Roshdi Rashed & Pascal Crozet. Paris : Albert Blanchard, p. 143–193.

Steiner, Jacob (1846a). « Geometrische Lehrsätze ». Dans : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 32, p. 182–184.

— (1846b). « Théorèmes de géométrie ». Dans : *Journal de Mathématiques pures et appliquées* 11, p. 468–470.

Tobies, Renate (1994). « Mathematik als Bestandteil der Kultur: Zur Geschichte des Unternehmens *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* ». Dans : *Mitteilungen der Österreichischen Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte* 14, p. 1–90.

Weil, André (1930). « Sur un théorème de Mordell ». Dans : *Bulletin des sciences mathématiques.* 2e sér. 54.1, p. 182–191.