Mémoire de Master 2

Sur les vingt-sept droites des surfaces cubiques : approche historique

Par François Lê

sous la direction de Sébastien Gauthier

Février - Juillet 2011

École Normale Supérieure de Lyon – Université Claude Bernard Lyon 1

Résumé

Ce mémoire est le fruit d'un stage de recherche effectué de février à juillet 2011, dans le cadre de la deuxième année du Master « Mathématiques et Applications, Ingénierie Mathématique » conjoint à l'École Normale Supérieure de Lyon et à l'Université Claude Bernard de Lyon.

Le sujet est le théorème énonçant que sur toute surface cubique de l'espace projectif contient exactement vingt-sept droites. Il est abordé de façon historique, en commençant par un repérage général des dates et des thèmes qui y sont associés. Sont ensuite étudiés deux articles de 1849, usuellement identifiés comme étant les premières publications portant sur ce théorème. Deux problèmes distingués dans ces articles sont alors examinés en détail ; il s'agit du problème d'existence d'un nombre fini de droites sur les surfaces cubiques ainsi que du problème de la notation de ces droites.

Remerciements

Je tiens à remercier vivement Sébastien Gauthier, qui a accepté de diriger ce mémoire, m'accompagnant ainsi dans mes (presque) premiers pas en Histoire des Mathématiques. Ses relectures et remarques m'ont bien entendu plus qu'aidé à mener à bien le mémoire.

Je remercie également l'instigatrice du sujet, Catherine Goldstein. Merci aussi à François Brunault à qui j'ai pu poser quelques questions de géométrie algébrique, et à Jordane Granier qui m'a aidé à traduire depuis l'allemand les passages les plus scabreux de l'*Encyklopädie*.

Figure 1 – Modèle en plâtre de la surface diagonale de Clebsch
Source : [Fischer 1986]

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est consacré à un théorème. Son énoncé tel qu'on peut le trouver dans des ouvrages de géométrie algébrique récents est le suivant : *toute surface cubique lisse de* $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ *contient exactement vingt-sept droites*[1]. Ce théorème, que nous baptiserons au besoin « théorème des vingt-sept droites » bien qu'il ne semble pas avoir de dénomination usuelle, est à notre sens très surprenant. En effet, il est déjà remarquable qu'il existe sur toutes les surfaces algébriques non singulières de degré 3 un certain nombre de droites, et que ce nombre est chaque fois le même. Plus remarquable encore est le fait que les relations d'incidence entre ces vingt-sept droites sont les mêmes pour toutes les cubiques[2]. Et si l'on est initié à la géométrie algébrique, on saura peut-être en outre que les surfaces de degré 1 et 2 contiennent toutes une infinité de droites et que celles de degré au moins 4 n'en contiennent en général aucune, faisant ainsi du cas du degré 3 un cas exceptionnel.

Essayons naïvement d'en savoir plus sur ce théorème en exploitant cet outil qu'est Internet. Taper « vingt-sept droites » ou « twenty-seven lines » dans le moteur de recherche le plus répandu donne plus 70 000 résultats en tout. Nous y constatons d'emblée une grande diversité de types de documents :

1. des thèses et des articles de recherche des XX^e et XXI^e siècles, par exemple un article de 2006 de Lei Yang : *Galois representations arising from twenty-seven lines on a cubic surface and the arithmetic associated with Hessian polyhedra*, ou encore un article de 1989 de Dave Benson : *Projective modules for the group of the twenty-seven lines on a cubic surface*[3] ;
2. des cours de géométrie algébrique, des mémoires d'étudiants et des articles de vulgarisation de ces mêmes XX^e et XXI^e siècles comportant de nombreuses images et même quelques vidéos. Voir par exemple la page web intitulée *Des surfaces cubiques en DVD*, signée par Étienne Ghys et Jos Leys en 2008[4] ;
3. des articles datant du XIX^e siècle, parmi lesquels *Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré* de Camille Jordan (1869) et *Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surfaces cubique* de Felix Klein (1888)[5].

1. Voir par exemple [Shafarevich 1988]. Pour une représentation graphique d'une surface cubique et de ses vingt-sept droites, on pourra se reporter à la page 4 ou à l'annexe C.
2. Ceci est un théorème différent de celui des vingt-sept droites, mais qui lui est évidemment étroitement lié. On pourra consulter [Mumford 1976] à ce propos.
3. On trouvera ces articles sur `http://arxiv.org/pdf/math/0612383v1` et sur `http://www.math.uga.edu/~lenny/CohomologyPapers/BensonS053.pdf` respectivement. Nous avons été surpris de trouver également un article où l'auteur établit un lien entre les vingt-sept droites et des questions de Physique : `http://uk.arxiv.org/PS_cache/physics/pdf/0012/0012033v1.pdf`.
4. `http://images.math.cnrs.fr/Des-surfaces-cubiques-en-DVD.html`
5. Nous retrouverons ces articles au cours du mémoire. Voir [Jordan 1869b ; Klein 1888].

Nous nous retrouvons ainsi face à un véritable foisonnement de documents, foisonnement que l'on peut lire selon deux directions. D'une part, on peut constater que les documents trouvés sont datés d'années comprises entre 1869 et 2008 ; pour avoir une idée plus précise des dates en jeu, voici un échantillon des années de publication de documents trouvés par notre recherche : 1888, 1895, 1938, 1951, 1989, 2000, 2005. On voit donc une certaine longévité du sujet des vingt-sept droites — nous avons affaire à une période d'au moins 140 ans —, et on peut penser que la régularité dans les dates de publication sus-citées témoignent d'un intérêt à peu près continu pour ce sujet au fil du temps. D'autre part, notre recherche Internet montre une diversité thématique déjà dans les titres des différents articles : outre la géométrie algébrique, il est question de groupes, d'équations, d'arithmétique, de fonctions hyperelliptiques et de représentations graphiques de surfaces cubiques. Il semble donc que le théorème des vingt-sept droites, dont l'énoncé ne fait appel qu'à des notions de géométrie, soit relié à d'autres domaines des mathématiques.

Ce double foisonnement ayant été constaté, nous allons l'étudier de façon plus précise, en essayant en particulier de le structurer. Cela nous permettra de cerner les thèmes qui sont en rapport avec le théorème des vingt-sept droites et d'en savoir plus sur la chronologie de ce théorème. Nous aurons ainsi l'occasion de trouver des éléments de réponse à des questions naturelles comme : à qui le théorème des vingt-sept droites est-il dû ? Quand est-il apparu, et quand a-t-il été démontré ?

Nous commencerons donc au chapitre 1 par étudier de façon organisée la diversité des thèmes en rapport avec le théorème des vingt-sept droites. Pour cela, nous utiliserons les deux sources que sont l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* et le *Jahrbuch über die Forschritte der Mathematik*. Nous verrons alors que l'*Encyklopädie* met en avant l'année 1849, durant laquelle sont publiés ce qui est identifié comme les premiers articles traitant des vingt-sept droites sur les surfaces cubiques. Il s'agit de deux articles conjoints écrits respectivement par Arthur Cayley et George Salmon que nous étudierons plus en détails au chapitre 2. Il en ressortira alors que plusieurs problèmes sont laissés en suspend par Cayley dans son article. Deux d'entre eux retiendront plus particulièrement notre attention : une lacune dans une des démonstrations de l'existence des vingt-sept droites, sur laquelle le chapitre 3 sera bâti, et le problème de la notation de ces droites, auquel sera consacré le quatrième et dernier chapitre. Nous verrons en particulier que ces deux problèmes inaugurent chacun une tradition de recherche que l'on aura par ailleurs déjà remarquée grâce à l'examen de l'*Encyklopädie*.

Chapitre 1

Un repérage du sujet

Dans ce chapitre, nous essayons de nous faire une idée générale de l'étendue du problème des vingt-sept droites sur les surfaces cubiques, en cherchant à déterminer l'ensemble des travaux qui y sont reliés et la période de temps durant laquelle se concentrent ces travaux. Nous allons ainsi nous intéresser d'une part à la diversité des thèmes en rapport avec ce problème, et d'autre part à l'évolution chronologique générale du problème des vingt-sept droites. En particulier, le chapitre ne contiendra pas de détails mathématiques, à moins qu'ils ne permettent localement de mieux comprendre tel ou tel sujet.

Pour effectuer un repérage du sujet, nous avons utilisé dans un premier temps deux sources non spécifiques à notre sujet des vingt-sept droites : l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* et le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Nous verrons qu'elles font référence à un livre de Henderson entièrement consacré aux vingt-sept droites des surfaces cubiques, que nous ajouterons ainsi aux deux sources sus-citées. Ce livre, l'*Encyklopädie* et le *Jahrbuch* seront présentés dans la première partie du chapitre. Nous nous intéresserons dans la suite à ce qui est identifié par ces sources comme la première apparition du résultat d'existence des vingt-sept droites. Seront ensuite passées en revue certaines façons d'appréhender les surfaces cubiques et nous verrons enfin la diversité des domaines mathématiques rattachés au sujet des vingt-sept droites.

1.1 Présentation des sources

Nous commençons par présenter les deux sources générales que nous avons évoquées : l'*Encyclopädie* et le *Jahrbuch*. Nous verrons ce qui nous amène à y ajouter un livre de Henderson, et comment le contenu de ces ouvrages nous a conduit à organiser la suite du chapitre.

1.1.1 L'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*

Désirant établir un bilan des connaissances mathématiques de son époque, Felix Klein lance en 1894 un grand projet encyclopédique, l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*. Composé de plusieurs volumes traitant de domaines variés (arithmétique, algèbre, probabilités, analyse, géométrie, mécanique, physique, géophysique et astronomie), cet ouvrage est publié fascicule par fascicule de 1898 à 1935, avec une interruption due à la Première Guerre mondiale [1].

Le troisième volume est celui de la géométrie ; il est divisé en quatre parties dont la troisième correspond à la géométrie algébrique. Dans le chapitre 10 (« Spezielle algebraische Flächen ») de cette partie se trouve une section consacrée aux surfaces cubiques. Publiée en 1928, elle est rédigée par Meyer qui est alors professeur à l'Université de Königsberg [2]. Elle comporte 95 pages et est divisée en deux parties intitulées « Historische Entwicklung der Haupteigenschaften der Fläche » et « Systematischer Ausbau der Theorie », composées respectivement de 14 et de 10 paragraphes. Il est à noter que cette section est consacrée aux surfaces cubiques en général, et n'est ainsi pas centré sur le problème des vingt-sept droites. En particulier, ce qui concerne les vingt-sept droites est *a priori* fondu dans l'ensemble des informations sur les surfaces cubiques.

1.1.2 Le *Jahrbuch*

Fondé par les mathématiciens Carl Orthmann et Felix Müller, le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* est un journal dont l'objectif a été de recenser la totalité des articles et des livres mathématiques de 1868 à 1942. Au total, les 68 publications du *Jahrbuch* passent en revue plus de 200 000 articles et livres mathématiques. Le *Jahrbuch* est devenu à présent une base de donnée disponible sur Internet [3].

Une recherche des ouvrages dont le titre contient « surface cubique » (ou un équivalent anglais, allemand ou italien) donne 90 réponses. Parmi celles-ci, 36 ont un titre qui fait directement référence aux droites d'une surface cubique ; les dates de publication s'étendent de 1869 à 1940. La liste de ces ouvrages est donnée en annexe A. Nous pouvons répartir ces articles suivant les thèmes qu'évoquent leur titre ou leur résumé dans le *Jahrbuch* : 14 semblent être des articles généraux, 12 sont en rapport avec les groupes, 4 évoquent des modèles de surfaces cubiques, 3 portent sur la représentation des vingt-sept droites et 3 concernent les double-six [4]. Nous utiliserons cette liste surtout pour confirmer ou étoffer ce que nous apprendra l'examen de l'*Encyklopädie*. Il faudra toutefois prendre garde au fait que le *Jahrbuch* ne permet pas de repérer des articles ou livres antérieurs à 1868 ; or nous verrons que la littérature s'accorde sur le fait que la première apparition des vingt-sept droites survient en 1849.

Un détail est à noter : il n'y a qu'un seul livre parmi les 36 ouvrages que nous venons d'évoquer. Il s'agit d'un livre de Henderson, intitulé *The Twenty-Seven Lines Upon the Cubic Surface*. Nous allons l'ajouter à nos sources générales, comme le justifie le paragraphe suivant.

1.1.3 Le livre de Henderson

En 1911, Henderson [5], membre du département de mathématiques de l'Université de Chapell Hill (Caroline du Nord), publie *The Twenty-Seven Lines Upon the Cubic Surface*. D'après William S. Powell [6], c'est le premier livre consacré spécifiquement et exclusivement au sujet des vingt-sept droites sur les surfaces du troisième ordre. Il contient en particulier un résumé historique du développement de ce sujet depuis la fin des années 1840 jusqu'au début du XX^e siècle. Ce résumé est organisé de façon thématique, distinguant les différents sujets en rapport avec le problème des

1. Voir Gispert [2001] pour plus de détails sur l'*Encyklopädie* et son édition française entreprise par Jules Molk.
2. La ville de Königsberg est aujourd'hui devenue Kaliningrad (Russie).
3. `http://www.emis.de/projects/JFM/JFM.html`
4. Voir la chapitre 4 pour la signification du terme « double-six ».
5. Troisième du nom. [Henderson 1911].
6. [Powell 1988]. Voir également cet ouvrage pour des précisions biographiques sur Henderson.

droites sur les surfaces cubiques. Le reste du livre est constitué des énoncés et des démonstrations des principales propriétés des vingt-sept droites.

Le livre de Henderson est indiqué dans les références générales de la section de l'*Encyklopädie* concernant les surfaces cubiques, et la lecture des deux textes montre que la matière présente dans *The Twenty-seven Lines* est *grosso modo* incluse dans l'*Encyklopädie*. Cependant, puisque Henderson se focalise sur les vingt-sept droites, son ouvrage nous permet de naviguer de façon plus « balisée » dans les paragraphes de l'*Encyklopädie*. Cela ne nous dispense pas pour autant d'examiner attentivement l'*Encyklopädie*, d'une part car son contenu, très dense, est susceptible d'apporter des suppléments (en particulier mathématiques) aux renseignements donnés par Henderson, et d'autre part parce qu'étant légèrement postérieure, elle peut comporter des informations encore inconnues à l'époque de la rédaction du *Twenty-Seven Lines*.

1.1.4 Utilisation des sources et organisation du chapitre

Dans le but d'avoir une vision d'ensemble du sujet des vingt-sept droites sur les surfaces cubiques, nous allons lire l'*Encyklopädie* en nous aidant du livre de Henderson de sorte à ne pas nous perdre dans la multitude d'informations sur les surfaces cubiques de l'*Encyklopädie*. Les résultats du *Jahrbuch* seront utilisés ponctuellement, afin de souligner certains points mis en évidence par l'examen de l'*Encyklopädie*.

Nous avons vu que l'introduction historique du *Twenty-seven Lines* est organisée de façon à dégager plusieurs thèmes en rapport avec le problème des vingt-sept droites. La lecture de l'*Encyklopädie* confirmant l'existence de ces sujets, et en faisant apparaître d'autres, nous reprenons une approche thématique en créant en outre trois parties englobant à chaque fois plusieurs des thèmes trouvés dans nos deux sources. Nous soulignons que le choix de cette approche n'exclut pas une compréhension de la chronologie du sujet. En effet, nous avons constaté *a posteriori* que chaque thème possède son évolution chronologique propre, et cette évolution nous permet d'estimer la période durant laquelle le thème en question est traité.

Nous articulons donc la suite du chapitre en trois parties. En nous inspirant de la démarche des sources, nous avons regroupé dans une première partie les premières mentions de l'existence des vingt-sept droites ainsi que quatre premiers thèmes liés à ces droites : notation, questions de réalité, prise en compte d'éventuelles singularités sur la surface et représentation concrète des surfaces avec leurs droites. La deuxième partie s'organise autour de différentes façons de construire les surfaces cubiques et d'en déduire l'existence de leurs vingt-sept droites. Enfin, la troisième partie relève les liens qu'entretient le problème des droites d'une surface cubique avec différents domaines mathématiques.

Rappelons enfin que nous nous intéressons essentiellement aux vingt-sept droites incluses dans les surfaces cubiques. Par conséquent, les résultats généraux sur les surfaces cubiques sont pour la plupart hors de notre propos, et nous ne retiendrons que ceux qui sont en rapport avec les vingt-sept droites. Cette sélection nous permettra cependant d'avoir un bon aperçu de la théorie générale des surfaces cubiques, celle-ci étant étroitement liée au problème des vingt-sept droites.

1.2 Apparition des vingt-sept droites et premiers problèmes

Cette section est centrée sur ce que l'*Encyklopädie* et Henderson identifient comme la première apparition des vingt-sept droites. Elle comprend également ce que ces sources interprètent comme une préhistoire du problème, ainsi que des questions que les mathématiciens se sont directement posées après avoir vu l'existence de ces fameuses droites.

1.2.1 Une préhistoire

Le premier paragraphe de l'*Encyklopädie* propose une préhistoire du problème des droites d'une surface cubique en évoquant Julius Plücker et Ludwig Immanuel Magnus. Henderson fait quant à lui référence à un article de Leopold Mossbrugger, qui serait le premier à traiter spécifiquement des surfaces de degré trois.

Meyer met donc en avant des travaux de Plücker et de Magnus dans lesquels sont traitées les surfaces cubiques, et où l'on peut voir apparaître des droites tracées sur ces surfaces. Dans un article [7] de 1829, Plücker s'intéresse au nombre de points d'une surface cubique qui sont des points de contact d'ordre trois avec une surface de degré deux. Il montre qu'un tel point est nécessairement un point d'ordre six de la courbe intersection de la cubique et de la quadrique, et que cela n'arrive que si cette courbe dégénère en deux droites et une courbe quartique avec un point double. Inversement, Plücker démontre que sur toute surface cubique, il existe un nombre fini de droites telles que si deux telles droites s'intersectent, alors leur point d'intersection est un point de contact d'ordre trois entre la surface cubique et une certaine surface quadrique.

Quelques années plus tard, en 1837, Magnus [8] propose une construction des surfaces de degré trois basée sur l'utilisation de deux espaces linéaires de points de dimension trois, l'idée étant de faire correspondre à un plan du premier espace, une surface cubique du second espace. L'*Encyklopädie* fait remarquer que si l'on continue le travail de Magnus, on peut reconnaître la construction des surfaces cubiques faite par Alfred Clebsch en 1866 [9], puis l'existence d'un nombre fini de droites contenues dans toute surface cubique.

Dans son livre, Henderson fait référence à un article de Mossbrugger [10] de 1841, le premier selon lui à traiter des surfaces cubiques en tant que telles. Cet article se propose d'interpréter les coefficients de l'équation d'une surface de degré trois en termes de distances relatives à la surface, par exemple la distance de l'origine du repère choisi à un des points d'intersection de la surface avec un des axes de coordonnées. On n'y trouve cependant aucune mention de droite tracée sur la surface.

Ce sont donc Plücker et Magnus qui contribuent, selon Meyer, à une préhistoire du problème des vingt-sept droites sur les surfaces cubiques. En particulier, on voit apparaître chez le premier l'existence, sur de telles surfaces, de droites soumises à certaines conditions. Quant à Mossbrugger, si Henderson affirme qu'il est le premier à publier un article traitant spécifiquement des surfaces de degré trois, il n'évoque à aucun moment de son article l'existence de droites sur les surfaces qu'il considère ; on pourra par conséquent plutôt le considérer comme un acteur de la préhistoire de la théorie générale des surfaces algébriques cubiques.

1.2.2 Les premiers articles : Cayley et Salmon

Meyer et Henderson s'accordent pour dire que la théorie des vingt-sept droites contenues dans les surfaces cubiques est née dans une correspondance entre Arthur Cayley et George Salmon. Les

7. [Plücker 1829].
8. [Magnus 1837].
9. [Clebsch 1866].
10. [Mossbrugger 1841].

résultats de cette correspondance ont été publiés en 1849 dans un article de Cayley [11], auquel est joint un article de Salmon [12] publié dans le même volume du *Cambridge and Dublin mathematical journal*.

L'*Encyklopädie* décrit dans le paragraphe 2 les différentes démonstrations de l'existence des vingt-sept droites que l'on peut trouver dans ces deux articles. La première suppose connue l'existence d'une droite contenue dans la surface, et utilise fortement les plans qui intersectent la surface en exactement trois droites ; ces plans sont des *plans tangents triples* et il y en a exactement quarante-cinq sur toute surface cubique. À noter que l'hypothèse d'existence d'une droite n'est pas gratuite. Nous y reviendrons en détails dans le chapitre 3. La deuxième consiste à mettre l'équation de la surface sous une forme où il est évident de voir qu'elle contient neuf droites, puis d'en déduire seize autres en considérant des hyperboloïdes construits à partir des neuf premières [13]. La troisième démonstration est basée sur le dénombrement des plans tangents doubles à un cône circonscrit à la surface (de sommet situé hors de celle-ci) *via* des formules de Plücker. Enfin, une quatrième démonstration consiste à appliquer aux surfaces cubiques un résultat sur les surfaces algébriques de degré quelconque.

Puisque nos sources identifient ces articles comme étant les premiers à traiter des vingt-sept droites, il nous paraît important de les étudier en détail. Nous le ferons dès le chapitre suivant, et nous verrons en particulier qu'outre les démonstrations évoquées ici, les deux articles contiennent d'autres résultats sur les fameuses droites, ainsi que des questions laissées ouvertes par leurs auteurs : questions de multiplicité de comptage due à la présence de singularités et de numérotation des droites. Ces questions forment des thèmes qui participent à la postérité du problème des vingt-sept droites. Ils correspondent aux paragraphes 4, 5 et 10 de l'*Encyklopädie* ; nous y adjoignons les questions de la réalité des droites (et des plans tangents triples) et de la construction de modèles, évoquées aux paragraphes 6 et 17 respectivement. Nous voyons maintenant comment sont présentées dans l'*Encyklopädie* les réponses qui ont été apportées à ces questions.

1.2.3 Singularités, réalité, notation, modèles

Les paragraphes 5 et 6 de l'*Encyklopädie* concernent l'influence de singularités sur les vingt-sept droites et les quarante-cinq plans tangents triples, ainsi que la réalité de ces objets [14]. On y apprend ainsi que Salmon donne dès son article de 1849 une règle de comptage des droites et des plans tangents triples qui passent par des points singuliers de la surface. En 1858 Ludwig Schläfli [15] traite quant à lui le problème de réalité des droites et des plans et établit ainsi que les surfaces cubiques lisses se répartissent en cinq types, selon les nombres de droites et plans tangents triples réels qui y sont associés, les différentes possibilités pour ces nombres étant $(27, 45)$, $(15, 15)$, $(7, 5)$, $(3, 13)$ et $(3, 7)$. L'*Encyklopädie* mentionne également Rudolph Sturm et Luigi Cremona [16], qui retrouveront cette classification par des moyens purement géométriques en 1867 et 1868.

D'après Henderson, un problème important auquel s'est heurté Cayley dans son article de 1849 est celui de trouver une notation des vingt-sept droites permettant de bien comprendre

11. [Cayley 1849].
12. [Salmon 1849].
13. Nous verrons au paragraphe 2.3.2 que cette preuve n'est pas telle quelle dans l'article de Cayley et que nous pouvons plutôt l'attribuer à Jakob Steiner.
14. Pour Meyer, une droite ou un plan seront dits réels s'il contiennent au moins *un* point réel.
15. [Schläfli 1858].
16. [Sturm 1867 ; Cremona 1868].

leur configuration. On trouve ainsi dans les articles de 1849 trois systèmes de notation différents mais peu utilisables, dus à Cayley, Salmon et Andrew Hart. Mais c'est Schläfli [17] qui propose en 1858 une notation basée sur la notion de *double-six*, notation restée depuis la meilleure, selon Henderson, bien que d'autres mathématiciens [18] aient essayé de l'améliorer. L'*Encyklopädie* ne semble pas s'occuper de la question de la notation des droites, bien qu'elle consacre un paragraphe aux double-six, où est exposée incidemment la notation de Schläfli. Nous reviendrons sur le développement de la notation des droites au chapitre 4.

D'après l'*Encyklopädie*, le problème de représentation concrète des surfaces cubiques avec leurs vingt-sept droites commence à être abordé vers la fin des années 1860. Ainsi, Christian Wiener fabrique en 1869 un modèle d'une surface comportant vingt-sept droites réelles. En 1872, Alfred Clebsch et Felix Klein se proposent de déterminer les formes possibles des surfaces cubiques. Des modèles faits en plâtre sont alors exposés par Klein à l'Exposition Universelle de 1894 ; parmi ces modèles figure la surface aujourd'hui appelée « surface diagonale de Clebsch », ayant la particularité de comporter vingt-sept droites réelles. Notons que parmi les 36 articles sur les droites des surfaces cubiques recensés dans le *Jahrbuch*, 4 sont consacrés à la construction de modèles ; ils ont été publiés entre 1873 et 1900.

Le modèle dont la photographie est située ci-dessous ainsi que celui de la page 4 font partie de la « série Rodenberg » et sont datés de 1881 [19].

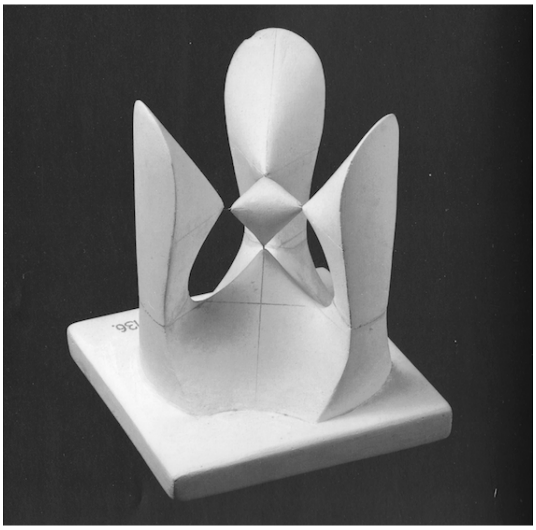

FIGURE 1.1 – Modèle en plâtre de la surface de Cayley
Source : [Fischer 1986]

1.3 Diverses approches des surfaces cubiques

Nous exposons ici les manières d'aborder les surfaces cubiques autrement que par leur définition en termes d'équation. Chacune de ces manières permet à leur auteur de retrouver les

17. [Schläfli 1858].
18. En particulier Taylor en 1894. Voir le chapitre 4 et [Taylor 1894].
19. Rodenberg était un élève de Klein. Voir [Fischer 1986] pour plus de détails.

vingt-sept droites. Elles contribuent ainsi à la postérité du sujet des droites tracées sur les surfaces cubiques.

1.3.1 Des constructions des surfaces cubiques

Les paragraphes 7, 8 et 9 de la section sur les surfaces d'ordre trois de l'*Encyklopädie* concernent des constructions (« Erzeugungen ») de ces surfaces par Hermann Graßman, Jakob Steiner, Fridericus August, Rudolf Sturm et Heinrich Schröter. Il s'agit à chaque fois de décrire une manière d'obtenir les surfaces cubiques ; les vingt-sept droites sont déduites dans chaque cas comme conséquence de la construction.

Dans son mémoire de 1856 sur les surface du troisième ordre [20], Steiner construit les surfaces cubiques de plusieurs façons. Toutes ces constructions étant de même nature, nous ne détaillons que l'une d'elles afin d'en comprendre la teneur : on considère neuf droites provenant de l'intersection de deux trièdres et on fixe un point n'appartenant à aucune de ces droites. Tout plan contenant ce point et ne contenant aucune des neuf droites coupe celles-ci en neuf points. On obtient ainsi dix points, qui définissent une courbe cubique plane. Le lieu de toutes ces courbes est alors une surface d'ordre trois. On remarquera la proximité de cette construction avec la méthode « des hyperboloïdes » de Cayley décrite précédemment. D'ailleurs, Steiner trouve les vingt-sept droites par cette même méthode.

Les autres constructions de Steiner sont des variantes ou des cas particuliers de celle de Graßmann [21] qui décrit dans un article de 1856 une surface cubique comme lieu des points d'intersection de chaque triplet de plans issus de trois gerbes de plans. Une démonstration des vingt-sept droites qui en découle est donnée en 1863 par Schröter [22].

L'*Encyklopädie* mentionne encore d'autres constructions de surfaces cubiques dues à August, Sturm et Schröter. Nous n'entrerons pas ici dans les détails. Signalons tout de même que dans son mémoire [23] récompensé par un prix Steiner de l'Académie des sciences de Berlin en 1864, Sturm reprend quatre constructions de Steiner, ainsi que celles de Graßmann et de August.

1.3.2 L'application de Clebsch

En 1866, Clebsch [24] propose une approche des surfaces cubiques basée sur leur construction à la façon de Graßmann : lieu des points d'intersection de trois gerbes de plans. Il construit alors une application de la surface ainsi construite sur un plan, muni de six points $A_1, \ldots, A_6$ appelés « points fondamentaux ». L'application est telle que tous les points de son plan d'arrivée ont exactement un antécédent, à l'exception des points fondamentaux, qui correspondent chacun à une droite tracée sur la surface cubique. Les autres droites de la cubique sont les images réciproques des coniques passant par cinq des points fondamentaux, ainsi que des droites joignant ces points deux à deux. L'application de Clebsch permet alors de retrouver les propriétés (incidence, double-six, etc.) de la configuration des vingt-sept droites ainsi décrites.

On pourra remarquer que ni l'*Encyklopädie*, ni Clebsch lui-même ne présentent cette façon de faire comme une nouvelle démonstration de l'existence des vingt-sept droites ; au contraire, celles-ci sont explicitement déclarées connues. Néanmoins, il est possible de prouver l'existence

20. [Steiner 1856].
21. [Graßmann 1856].
22. [Schröter 1863].
23. [Sturm 1867].
24. [Clebsch 1866].

des droites *via* l'argument de Clebsch. C'est ce que fait par exemple Robin Hartshorne [25] dans un langage plus moderne : il s'agit de réaliser une surface cubique comme éclatement du plan projectif en six points, l'existence des vingt-sept droites étant alors un corollaire immédiat.

1.3.3 Des approches « par le haut »

Nous décrivons dans ce paragraphe deux autres approches pour la construction de surfaces cubiques. Bien qu'elles n'aient pas de rapport entre elles, nous les avons regroupées ici toutes deux ne considèrent plus les surfaces cubiques en tant que telles, mais plutôt comme des cas particuliers d'objets plus généraux.

Corrado Segre consacre en 1887 un mémoire [26] sur les variétés de dimension trois dans un espace de dimension quatre. Il y étudie en particulier la cubique appelée aujourd'hui « cubique de Segre » et en déduit les principaux résultats sur les surfaces cubiques — notamment l'existence des vingt-sept droites — ainsi que sur les courbes quartiques planes et leurs vingt-huit bitangentes.

L'*Encyklopädie* présente au paragraphe 17 l'approche topologique de Christian Juel développée de 1899 à 1916. Celui-ci abandonne le cadre des surfaces algébriques, et définit pour des surfaces *quelconques* (mais néanmoins réelles) la notion d'ordre : c'est le nombre maximal de points d'intersection d'une droite (réelle) avec la surface, de sorte que, pour une surface algébrique, cette définition coïncide avec la définition usuelle d'ordre. Il démontre alors que toute surface non réglée d'ordre trois contient au plus vingt-sept droites [27], et exhibe même une surface non algébrique d'ordre trois pour laquelle ce maximum est réalisé.

1.4 Liens des vingt-sept droites avec d'autres domaines

Cette dernière section est consacrée aux différents domaines que les mathématiciens ont relié au problème des vingt-sept droites : théorie des formes, étude des courbes quartiques planes, théorie des groupes et analyse. La descendance du problème des vingt-sept droites se lit ainsi en partie dans la diversité de ces domaines.

1.4.1 Théorie des formes

L'*Encyklopädie* comporte un paragraphe sur le traitement des surfaces cubiques par la théorie des formes. Il y est indiqué que c'est Salmon [28], en 1860, qui s'intéresse le premier à cette approche, en calculant invariants, covariants, contravariants et formes adjointes (« Zwischenformen ») associés à une surface cubique. D'autres mathématiciens comme par exemple Clebsch en 1861, Henri Poincaré en 1883 et Meyer en 1928 se pencheront également sur cet aspect des surfaces du troisième ordre.

Meyer remarque cependant dans l'*Encyklopädie* que, au moment où il écrit, c'est-à-dire en 1928, l'application systématique de la théorie des formes à la construction de surfaces cubiques et aux relations entre le pentaèdre [29] et les vingt-sept droites manque encore.

---

25. [Hartshorne 1977].
26. [Segre 1887].
27. Le nombre vingt-sept n'est pas nécessairement atteint pour le bonne raison que Juel ne considère que des objets réels.
28. [Salmon 1860].
29. James Sylvester démontre dans [Sylvester 1851] que toute forme cubique $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ s'écrit d'une unique manière $F = a_1 z_1^3 + \cdots + a_5 z_5^3$, où les z_i sont des fonctions linéaires des x_i soumises à la relation $z_1 + \cdots + z_5 = 0$.

1.4.2 Quartiques planes

En 1869, Karl Geiser[30] établit une correspondance entre les courbes quartiques planes et leurs bitangentes d'une part, et les surfaces cubiques et leurs droites d'autre part. Pour cela, il s'inspire de la méthode utilisée par Cayley pour sa seconde démonstration de l'existence des vingt-sept droites en considérant un cône tangent à la surface dont le sommet est situé sur celle-ci. Tout plan coupe alors ce cône en une courbe quartique plane avec vingt-huit bitangentes, et réciproquement, toute quartique plane peut être construite de la sorte.

Étudiées de façon approfondie avant les surfaces de degré trois, les courbes quartiques permettent ainsi d'enrichir la théorie des surfaces cubiques. L'*Encyklopädie* souligne que les quartiques ont été étudiées de façon géométrique, mais également de façon analytique, la base pour cette dernière approche étant la théorie des fonctions abéliennes de genre trois.

Enfin, se basant sur les résultats de Geiser, Hieronymous Zeuthen établit les liens entre la réalité des droites d'une surface cubique et celle des bitangentes d'une courbe quartique, ainsi qu'entre les singularités des deux objets.

1.4.3 Théorie des groupes et analyse

Henderson et Meyer soulignent l'importance de l'étude des vingt-sept droites par la théorie des groupes. En 1869, Camille Jordan[31] se penche sur à l'équation de degré vingt-sept dont dépendent les droites d'une surface cubique. Il montre que cette équation n'a pas de résolvante d'ordre inférieur à vingt-sept, et que certaines résolvantes permettent de trouver les quarante-cinq plans tangents triples ou les trente-six double-six associés à une surface de degré trois.

L'étude du groupe de l'équation, d'ordre 51 840, permet de faire un lien entre le problème des vingt-sept droites sur les surfaces cubiques et l'analyse. En effet, Jordan montre en 1869 que ce groupe est isomorphe à celui du problème de la trisection de fonctions hyperelliptiques[32], et Felix Klein[33] indique en 1888 comment transporter de façon effective l'un des problèmes à l'autre. Un autre problème analytique en rapport avec ce groupe est le problème de bissection des périodes des fonctions thêta, le groupe de ce problème étant isomorphe à celui des vingt-huit bitangentes d'une quartique plane, lui-même obtenu à partir de celui des vingt-sept-droites en lui adjoignant une racine supplémentaire.

Les liens entre les vingt-sept droites et la théorie des groupes ainsi que l'analyse semble être un thème très riche. Cela est confirmé par les résultats du *Jahrbuch* : parmi les 36 articles dont le titre fait explicitement référence aux droites des surfaces cubiques, 13 (publiés entre 1869 et 1940) sont en relation avec la théorie des groupes. Mais trop vaste pour le temps qui nous est imparti, ce sujet ne sera pas développé dans le présent mémoire.

1.5 Conclusion

L'examen de l'*Encyklopädie*, du *Jahrbuch* et du *Twenty-seven Lines* de Henderson permet de voir une grande ramification thématique du sujet des vingt-sept droites sur les surfaces cubiques.

Cette écriture est appelée *forme pentaédrique*, et les plans d'équation $z_i = 0$ forment ce qui appelé le *pentaèdre* de la surface $F = 0$.

30. [Geiser 1869].
31. [Jordan 1869b].
32. Ces fonctions sont les inverses des intégrales abéliennes $\int \mathrm{d}x/\sqrt{P(x)}$, avec P polynôme de degré > 4.
33. [Klein 1888].

Nous avons dans ce chapitre choisi trois catégories permettant de structurer cette ramification, chacun des points d'une catégorie possédant un développement propre, comme nous le rappelons maintenant.

La première catégorie s'ouvre avec les articles de 1849 de Cayley et de Salmon, qui inaugurent l'étude des vingt-sept droites. Ils témoignent d'une diversité dans les méthodes utilisées pour appréhender ces droites et posent de façon directe deux questions. La première est celle de l'influence de singularités éventuelles ; elle concerne un aspect géométrique de la situation et nous lui adjoignons ainsi celle de la réalité des droites. Ces deux problèmes seront essentiellement réglés dans les années 1850. La seconde question soulevée par Cayley est celle de la notation des droites. Elle reflète une certaine incompréhension de la configuration, c'est pourquoi elle peut être mise en relation avec la question de représentation concrète des droites sur leur surface. Ces deux questions feront l'objet de recherches depuis les années 1860 jusqu'au XXe siècle.

Une seconde catégorie rassemble les différentes manières d'appréhender des surfaces du troisième degré. Se distinguent d'abord les constructions dont le style a été inauguré par Steiner en 1856 dans son mémoire sur les surfaces cubiques ; chacune permet de mettre en évidence la présence des vingt-sept droites. Vient ensuite en 1866 l'approche de Clebsch, utilisée encore aujourd'hui sous des apparats plus modernes et l'appellation « éclatement du plan en six points ». Enfin, les travaux de Segre et de Juel, de la fin du XIXe siècle au début du vingtième, montrent une prise de distance par rapport à la façon de voir une surface (algébrique) cubique : variété de dimension trois dans un espace projectif « plus grand » pour le premier, cas particulier d'une notion de surface vue dans un cadre topologique pour le second.

La troisième et dernière catégorie mise en évidence dans ce chapitre est axée sur la proximité du problème des vingt-sept droites avec d'autres domaines mathématiques. En établissant une correspondance entre les surfaces cubiques et les courbes quartiques, Geiser procède à un enrichissement mutuel des théories géométriques de ces deux objets. Par ailleurs, Jordan et Klein, *via* la théorie des groupes, montrent comment relier le problème des droites sur les cubiques à un problème de nature analytique : celui de la trisection des fonctions hyperelliptiques. Ces liens des vingt-sept droites avec la théorie des groupes occuperont les esprits des années 1870 jusqu'au milieu du XXe siècle.

Le développement du thème des vingt-sept droites sur les surfaces cubiques s'inscrit donc dans un intervalle de temps relativement long : le repérage que nous avons effectué indique que cet intervalle s'étend depuis la fin des années 1840 jusqu'au milieu du XXe siècle. Cette longue étendue temporelle peut s'expliquer de la façon suivante. Repris, développés ou inaugurés par plusieurs générations de mathématiciens, les nombreux thèmes connexes à celui de l'existence même des vingt-sept droites participent à la postérité des vingt-sept droites en créant un ensemble de travaux centrés autour des fameuses droites, mais toutefois différents suivant les domaines mathématiques auxquels ils sont affiliés [34].

Dans le chapitre qui suit, nous revenons aux articles de 1849 de Cayley et de Salmon, que nous examinons de plus près.

34. Nous pouvons d'ailleurs ajouter que de nombreux ouvrages récents de géométrie algébrique traitent des vingt-sept droites, par exemple [Mumford 1976 ; Hartshorne 1977 ; Reid 1988 ; Shafarevich 1988], de même que certains articles de recherche du XXIe siècle.

Chapitre 2

Les articles de Cayley et de Salmon de 1849

Nous analysons dans ce chapitre les articles de 1849 de Cayley et de Salmon, que l'*Encyklopädie* par exemple reconnaît comme étant les premiers à traiter des vingt-sept droites sur les surfaces cubiques. Seront en particulier examinés les preuves d'existence des vingt-sept droites ainsi que les premiers problèmes qui y sont liés : notations, prise en compte de singularités. Nous verrons ainsi que Cayley laisse la question de la notation en suspend et qu'une de ses démonstrations est incomplète.

2.1 Présentation des articles de Cayley et de Salmon

Pour commencer, nous présentons les deux articles dont il est question ici. Il ressortira qu'ils contiennent les résultats prouvés dans une correspondance entre Cayley et Salmon sur laquelle nous ferons ensuite quelques remarques.

En 1849, Arthur Cayley et George Salmon publient chacun un article dans le quatrième volume du *Cambridge and Dublin mathematical journal*. Ces articles sont consacrés aux surfaces cubiques, sujet sur lequel aucun des deux mathématiciens n'avait offert de publication auparavant. Le premier des deux articles est celui de Cayley, *On the Triple Tangent Planes of Surfaces of the Third Order*[1]. Comme son auteur le précise lui-même, il contient des résultats développés dans une correspondance avec Salmon, notamment deux démonstrations du fait que toute surface cubique contient exactement vingt-sept droites. Cayley s'intéresse également à la numérotation de ces droites et à quelques propriétés générales de la configuration de droites et plans qu'il obtient. La première phrase de l'article de Salmon, *On the Triple Tangent Planes to a Surface of the Third Order*[2], le présente comme complément de celui de Cayley. Salmon revient en particulier sur le problème de la notation des vingt-sept droites, et discute de l'influence d'éventuelles singularités de la surface sur le dénombrement des droites. Enfin, il retrouve l'existence des vingt-sept droites à partir d'un problème plus général concernant les surfaces de degré quelconque.

Comme nous l'avons dit, Cayley évoque dans son article sa correspondance avec Salmon. Plus précisément, il y écrit en conclusion :

1. [Cayley 1849].
2. [Salmon 1849].

> « I may mention in conclusion that the whole subject of this memoir was developped in a correspondance with Mr. Salmon, and in particular, that I am indebted to him for the determination of the number of lines upon the surface and for the investigations connected with the representation of the twenty-seven lines by means of the letters a, b, c, d, e, f, as developped before. »

Nous allons voir dans la section suivante que Cayley présente deux manières de prouver l'existence des vingt-sept droites ; mais il ne précise pas s'il doit à Salmon la détermination du nombre vingt-sept pour les deux ou pour une seule des démonstrations. Quant à la représentation des droites mentionnée par Cayley, nous y reviendrons à la section 2.3.

La littérature sur le sujet [3] mentionne souvent cette correspondance, en distinguant en particulier l'apport de chacun des deux mathématiciens au théorème d'existence des vingt-sept droites. Toutefois, ces allusions restent toujours floues et aucune référence n'est jamais donnée, de sorte que la correspondance en question nous est restée introuvable. Tony Crilly [4] indique que à ce propos que, hormis celle avec James Sylvester, une grande partie de la correspondance de Cayley a été perdue.

2.2 Les démonstrations de l'existence des vingt-sept droites

Nous examinons ici les trois démonstrations de l'existence de vingt-sept droites incluses dans toute surface cubique que l'on trouve dans les articles de Cayley et de Salmon. Les deux premières constituent le premier paragraphe de l'article de Cayley, et la troisième forme la dernière partie de celui de Salmon.

On pourra remarquer que Cayley et Salmon n'annoncent et n'énoncent pas de « théorème des vingt-sept droites ». La première phrase évoquant le résultat d'existence d'exactement vingt-sept droites est la suivante : « Hence the whole number of the lines upon the surface is twenty-seven ». Elle est fondue dans le texte, à la fin de la première démonstration.

2.2.1 Par les plans tangents triples

Pour la première des deux preuves de son article, Cayley annonce d'emblée, et sans justification, qu'une surface du troisième degré contient en général un certain nombre de droites. Il faut bien remarquer que ce présupposé constitue un problème important ; nous y reviendrons au prochain chapitre. Pour l'instant, nous continuons de suivre Cayley dans sa démarche, à laquelle nous ajoutons quelques figures afin de la rendre plus claire [5].

Cayley considère une droite (en rouge sur la figure 2.1) contenue dans la surface, ayant donc supposé que de telles droites existent. Tout plan la contenant coupe la surface en une courbe cubique constituée de la droite et d'une conique, et en est un plan tangent double, les points de contact étant les points doubles de la courbe cubique [6]. Pour certains tels plans, la conique en question dégénère en deux droites, et cela arrive pour exactement cinq plans (ceci est, d'après Cayley, « very easily demonstrated » [7]), qui deviennent alors des plans tangents triples,

3. Par exemple [Henderson 1911 ; Meyer 1928 ; Crilly 2006 ; Gow 2006].
4. [Crilly 2006].
5. L'article de Cayley contient deux figures, mais sans rapport avec la partie qui nous intéresse ici.
6. Ce sont donc les points d'intersection de la droite et de la conique.
7. L'idée est la suivante : on suppose que la droite de départ est l'axe des x, et on regarde les plans d'équation $z = \alpha y$ qui la contiennent. Par substitution, on trouve l'équation de la conique, et la condition pour qu'elle

le troisième point de contact étant le point double de la conique dégénérée.

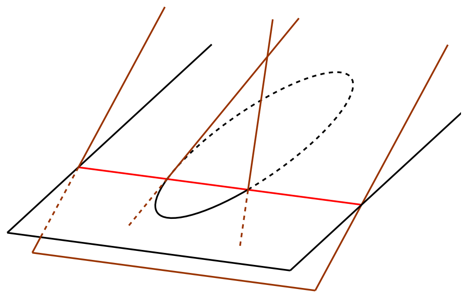

Figure 2.1 – La droite en rouge est la droite supposée incluse dans la surface cubique. Le plan marron est un plan tangent triple ; son intersection avec la surface est constitué de trois droites.

Cayley procède alors au comptage des droites tracées sur la surface : étant donné un plan tangent triple, chacune de ses trois droites sont traversées par quatre autres plans tangents triples. Ces douze nouveaux plans donnent lieu à vingt-quatre nouvelles droites incluses dans la surface. En comptant les trois premières, Cayley trouve ainsi vingt-sept droites (et quarante-cinq plans tangents triples).

Il vérifie enfin qu'il ne peut y avoir d'autres droites tracées. En effet, comme les trois droites d'un plan tangent triple forment exactement son intersection avec la surface, toute autre droite (que nous appelons D sur la figure 2.2) tracée sur la surface rencontre nécessairement ce plan en un point d'une des trois droites, et est donc contenue dans le plan (en rouge sur la figure) engendré par cette droite et par elle-même. Ce dernier plan est alors un plan tangent triple, puisque son intersection avec la surface contient deux, donc trois droites. Ainsi, toute droite incluse dans la surface est incluse dans un plan tangent triple.

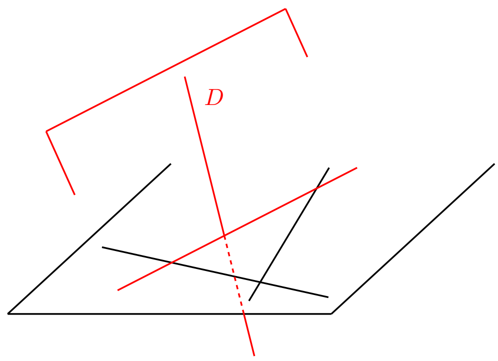

Figure 2.2 – Le plan (en rouge) contenant D et la droite que celle-ci intersecte est un plan tangent triple.

Revenons sur la première étape de la démonstration précédente : l'existence d'*une* droite tracée sur la surface. Comme on peut le voir dans les paragraphes précédents, cette existence est essentielle dans la preuve de Cayley, mais elle n'est ni démontrée, ni même annoncée comme étant un résultat facile. Cayley en est bien conscient comme le prouve sa courte phrase introduisant la seconde démonstration :

dégénère en deux droites s'exprime comme une équation de degré cinq en α.

« The number of lines on the surface may also be obtained by the following method, which has the advantage of not assuming *a priori* the existence of a line upon the surface. »

Le chapitre 3 est consacré à ce problème d'existence. Il y sera vu que plusieurs auteurs ont proposé de combler la lacune de Cayley, et ceci dès 1859, mais que les arguments invoqués sont sujets à discussion, comme l'évoque Meyer dans l'*Encyklopädie*.

2.2.2 Par un cône circonscrit à la surface

La seconde preuve présente dans l'article de Cayley repose sur l'utilisation d'un cône circonscrit à la surface, dont le sommet est un point situé hors de celle-ci. Cayley établit une correspondance biunivoque entre les droites incluses dans la surface et les plans tangents doubles au cône de la façon suivante : tout plan tangent double au cône, étant un plan tangent double à la surface, intersecte celle-ci en une droite et une conique. Réciproquement, s'il existe une droite sur la surface, le plan contenant cette droite et le sommet du cône est un plan tangent double au cône.

Se référant à un article de Salmon sur les surfaces réciproques [8], Cayley donne l'ordre ainsi que les nombres d'arêtes doubles et cuspidales du cône [9], à savoir 6, 0 et 6 respectivement. Il invoque enfin une formule de Julius Plücker pour conclure :

« by the formula in Plücker's "Theorie der Algebraischen Curven," p. 211, stated so as to apply to cones instead of plane curves, (viz. n being the order, x the number of double lines, y that of the cuspidal lines, u that of the double tangent planes, then

$$u = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (2x+3y)(n^2-n-6) + 2x(x-1) + 6xy + \frac{9}{2}y(y-1).)$$

The number of double tangent planes is twenty-seven, which is therefore also the number of lines upon the surface. »

Les deux références données par Cayley ont le thème des courbes algébriques en commun. L'article de Salmon cité par Cayley a pour but de déterminer le degré de la surface réciproque à une surface donnée. Salmon motive ce problème en le comparant à son analogue pour les courbes, et en insistant sur l'importance de la théorie des polaires réciproques, qui, selon lui, a considérablement enrichi la théorie des courbes algébriques. C'est justement à ces courbes algébriques, et en particulier à leurs points situés à l'infini ainsi et à leurs singularités, qu'est consacré le traité de Plücker donné en référence par Cayley. Cet ouvrage contient les formules dites aujourd'hui « de Plücker », qui lient le degré, la classe [10] ainsi que les nombres de bitangentes, de points doubles, de points d'inflexion et de points de rebroussement d'une courbe algébrique.

2.2.3 Un problème plus général

Rappelons que le début de l'article de Salmon est consacré aux problèmes des notations et de multiplicités, ainsi qu'à quelques propriétés géométriques de la configuration des droites et des

8. [Salmon 1847].

9. Une arête du cône est dite *double* si elle est tangente à la surface en deux points distincts. Une arête est dite *cuspidale* si le point où elle touche la surface est un point de rebroussement de la courbe définie comme l'intersection de la surface et du cône.

10. La classe d'une courbe algébrique est le nombre de tangentes qu'on peut lui mener depuis un point situé hors de la courbe.

plans. En particulier, Salmon n'y propose pas de démonstration de l'existence des droites. Dans la dernière partie de l'article, Salmon s'intéresse à un problème qui englobe celui des vingt-sept droites sur les surfaces cubiques : étant donnée une surface (algébrique) quelconque, il s'agit de déterminer le degré du lieu des points de la surface par lesquels on peut mener une droite la rencontrant en quatre points consécutifs [11]. Dans le cas des surfaces cubiques, ce lieu est constitué des droites tracées sur la surface.

Pour résoudre ce problème, Salmon s'inspire des méthodes utilisées par Cayley dans un mémoire sur l'élimination [12]. Prenant deux points de coordonnées x, y, z, w et x', y', z', w', il paramètre la droite qui les contient par les coordonnées $lx + mx', ly + my', lz + mz', lw + mw'$. Substituer ces dernières dans l'équation de la surface donne alors une équation en l/m dont les racines donnent les coordonnées des points où la droite précédente rencontre la surface.

Si l'équation de la surface est $U = 0$, Salmon effectue ladite substitution et obtient [13]

$$\begin{aligned} &l^nU + l^{n-1}m\delta U + \frac{1}{1.2}l^{n-2}m^2\delta^2U + \frac{1}{1.2.3}l^{n-3}m^3\delta^3U + \dots \\ &\qquad + m^nU' + m^{n-1}l\delta'U' + \frac{1}{1.2}m^{n-2}l^2\delta'^2U' + \frac{1}{1.2.3}m^{n-3}l^3\delta'^3U' + \dots = 0 \end{aligned}$$

avec $\delta = x'\frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy} + z'\frac{d}{dz} + w'\frac{d}{dw}$ et $\delta' = x\frac{d}{dx'} + y\frac{d}{dy'} + z\frac{d}{dz'} + w\frac{d}{dw'}$. Pour que quatre points coïncident avec $x'y'z'w'$ (ce qui est la notation de Salmon pour le point de coordonnées x, y, z, t), il obtient ainsi les conditions [14]

$$U' = 0, \;\; \delta'U' = 0, \;\; \delta'^2U' = 0, \;\; \delta'^3U' = 0.$$

En éliminant $xyzw$ dans ces équations, Salmon obtient une équation de degré $11n-24$ en $x'y'z'w'$. Le lieu cherché est alors une courbe de degré [15] $n(11n - 24)$, soit 27 lorsque la surface est de degré $n = 3$.

2.3 Le problème des notations

La question de la notation des vingt-sept droites est évoquée dans les deux articles étudiés ici. Trois systèmes de notation sont exposés dans ces articles, et chacun d'eux utilise à sa façon les propriétés des plans tangents triples. Ces plans particuliers permettent en effet de mieux comprendre la configuration des droites, comme nous allons le voir à présent.

2.3.1 La notation de Cayley

Après avoir démontré l'existence des vingt-sept droites, Cayley s'attaque au problème de trouver des équations explicites des plans tangents triples. Soulignons que ce que nous exposons

11. En termes plus modernes, ce sont les points de la surface par lesquels passent une droite tangente, le contact étant d'ordre (au moins) quatre.

12. [Cayley 1847].

13. Nous avons relevé quelques coquilles dans l'article de Salmon, où les deux derniers termes de l'équation sont « $\frac{1}{1.2}m^{n-2}l^2\delta^2U' + \frac{1}{1.2.3}ln^{n-3}l^3\delta^3U'$ ». Remarquer également que n est implicitement défini comme étant le degré de la surface en question.

14. Autre coquille dans l'article où on lit « $U' = 0, \;\; \delta U' = 0, \;\; \delta^2U' = 0, \;\; \delta^3U' = 0$ ». Ces équation traduisent le fait que le point de coordonnées x', y', z', t' est situé sur la surface, et que la droite joignant ce point au point x, y, z, t a un contact d'ordre au moins quatre avec la surface.

15. Nouvelle coquille dans l'article où on lit : « $11(un - 24)$ ».

ici est proche de l'article de Cayley, en ce sens que ce dernier explique sa démarche générale sans jamais expliciter ses calculs intermédiaires. On peut à ce propos se demander si cela témoigne des compétences présupposées des lecteurs de l'époque, ou du fait que Cayley juge ces calculs triviaux ou sans intérêt [16].

Cayley commence par supposer qu'un des plans tangents triples a pour équation $w = 0$, et que $x = 0$ et $y = 0$ sont les équations de deux quelconques plans tangents triples intersectant le plan $w = 0$ suivant deux droites tracées sur la surface. Alors, si $z = 0$ est l'équation d'un plan tangent triple contenant la troisième droite du plan $w = 0$, l'équation de la surface est de la forme $wP + kxyz = 0$, où P est du second ordre. Cayley remarque que P se scinde en deux facteurs du premier degré ou non suivant le choix du plan $z = 0$, et suppose alors que ce n'est pas le cas. Exprimant le fait que les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ sont tangents à la surface du second ordre d'équation $P = 0$, Cayley obtient finalement une équation de la surface de la forme suivante :

$$\begin{aligned} U = w \Big\{ & x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + yz\left(mn + \frac{1}{mn}\right) + zx\left(nl + \frac{1}{nl}\right) \\ & + xy\left(lm + \frac{1}{lm}\right) + xw\left(l + \frac{1}{l}\right) + yw\left(m + \frac{1}{m}\right) + zw\left(n + \frac{1}{n}\right)\Big\} + kxyz = 0. \end{aligned}$$

Cayley donne ensuite la liste des équations des quarante-cinq plans tangents triples. Les coefficients de chaque équation s'expriment en fonction des paramètres k, l, m et n ; chaque équation est nommée par une lettre qui représente également la fonction linéaire définissant le plan. Voici quelques-unes de ces équations :

$$\begin{array}{ll} (w) & w = 0 \\ (\theta) & lx + my + nz + w\left[1 + \frac{1}{k}\left(l - \frac{1}{l}\right)\left(m - \frac{1}{m}\right)\left(n - \frac{1}{n}\right)\right] = 0 \\ (\xi) & x + \frac{1}{k}\left(m - \frac{1}{m}\right)\left(n - \frac{1}{n}\right) w = 0 \\ (\eta) & y + \frac{1}{k}\left(n - \frac{1}{n}\right)\left(l - \frac{1}{l}\right) w = 0 \\ (\mathrm{x}) & x + \dfrac{l(p-\alpha) + 2mn}{p + \beta} w = 0 \\ (\bar{\mathrm{x}}) & x + \dfrac{\frac{1}{l}(p-\alpha) + 2\frac{1}{mn}}{p - \beta} w = 0 \end{array}$$

où les paramètres α, β sont définis par $\alpha = lmn + \dfrac{1}{lmn}$, $\beta = lmn - \dfrac{1}{lmn}$, et p par la relation $k = \dfrac{p^2 - \beta^2}{2(p - \alpha)}$. Cayley fait remarquer que l'équation de la surface peut s'écrire en fonction des fonctions linéaires qu'il vient d'introduire de seize façons différentes (par exemple $U = w\theta\bar{\theta} + k\xi\eta\zeta$).

Cayley numérote alors les vingt-sept droites $a_1, b_1, c_1, a_2, \ldots, c_9$ suivant les cinq plans tangents triples qui les contiennent chacune. Par exemple, la droite contenue dans les plans (w), (x), (ξ),

16. Au sujet des présupposés, remarquons que Cayley utilise implicitement les objets géométriques complexes ou situés à l'infini.

(x) et ($\bar{\text{x}}$) est appelée a_1, la droite contenue dans les plans (w), (y), (η), (y) et ($\bar{\text{y}}$) est appelée b_1, etc. Il donne enfin pour chaque plan, les trois droites qui y sont incluses : par exemple, le plan (w) contient les droites a_1, b_1, c_1, le plan (x) contient les droites a_1, a_6, a_7.

Selon Cayley, les calculs précédents sont ceux qui lui sont venus en premier à l'esprit, et qui conduisent de la façon la plus simple aux équations des plans tangents triples. Mais il précise aussi qu'une autre méthode, ne comportant presque aucun développement algébrique, permet de retrouver les relations d'inclusion entre les droites tracées sur la surfaces et les plans tangents triples ; nous exposons cette méthode dans le paragraphe suivant.

2.3.2 La notation de Salmon

Présentation de la notation

Dans la suite de son article, Cayley expose ainsi un second procédé de numérotation des droites. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2.1, la dernière phrase de l'article précise que la numérotation en question est due à Salmon. Voyons comment Cayley la décrit. Nous passons volontairement les détails sous silence et y reviendrons un peu plus bas.

Supposant comme précédemment que l'équation de la surface est de la forme $wP + kxyz = 0$, Cayley choisit maintenant le plan $z = 0$ de sorte que P se factorise en deux termes linéaires. En changeant les notations, l'équation de la surface est alors de la forme $U = ace - bdf = 0$, où a, b, c, d, e et f sont des fonctions linéaires. Remarquant que l'une des deux autres droites d'un quelconque plan tangent triple contenant la droite[17] ab rencontre les droites cd et ef, et que l'autre rencontre les droites cf et de, Cayley suggère de noter ces droites $ab.cd.ef$ et $ab.cf.de$ respectivement (voir le paragraphe suivant et la figure 2.3 pour plus de détails). Les plans tangents triples ainsi utilisés étant à chaque fois au nombre de trois, Cayley adjoint des indices à ces notations, de sorte que les vingt-sept droites sont les suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
ab & ad & af \\
cb & cd & cf \\
eb & ed & ef \\
(ab.cd.ef)_1 & (ab.cd.ef)_2 & (ab.cd.ef)_3 \\
(ad.cf.eb)_1 & (ad.cf.eb)_2 & (ad.cf.eb)_3 \\
(af.cb.ed)_1 & (af.cb.ed)_2 & (af.cb.ed)_3 \\
(ab.cf.ed)_1 & (ab.cf.ed)_2 & (ab.cf.ed)_3 \\
(ad.cb.ef)_1 & (ad.cb.ef)_2 & (ad.cb.ef)_3 \\
(af.cd.eb)_1 & (af.cd.eb)_2 & (af.cd.eb)_3
\end{array}$$

Sont ensuite données les règles pour trouver les droites de la surface contenues dans les cinq plans tangents triples passant par une droite donnée, puis le lien entre cette notation des vingt-sept droites et la précédente.

La conclusion de Cayley est en demi-teinte :

> « This is great difficulty in conceiving the complete figure formed by the twenty-seven lines, indeed this can hardly I think be accomplished until a more perfect notation is discovered. »

Cayley laisse ainsi ouvert le problème de trouver une notation permettant de bien comprendre la configuration des vingt-sept droites. Comme nous l'avons déjà évoqué au chapitre précédent,

17. Cette notation désigne la droite qui est l'intersection des plans $a = 0$ et $b = 0$.

Schläfli propose en 1858 une notation basée sur la notion de « double-six ». Nous reviendrons sur ces questions de notation, et en particulier sur celle de Schläfli au chapitre 4.

Nous avons indiqué dans le chapitre précédent que dans l'*Encyklopädie*, Meyer évoque une démonstration de l'existence des vingt-sept droites utilisant des hyperboloïdes. Nous allons voir qu'elle est liée aux calculs menant à la notation de Salmon que nous venons d'exposer. C'est pourquoi nous détaillons à présent ces calculs afin de comprendre et de pouvoir commenter l'interprétation de Meyer.

Une nouvelle démonstration de l'existence des vingt-sept droites ?

Commençons par détailler les calculs de Cayley, qui, rappelons-le, expose une méthode due à Salmon. Nous repartons de l'équation de la surface $ace - bdf = 0$ trouvée par Cayley. Ce dernier suppose que $a = \mu b$ est l'équation d'un plan tangent triple contenant la droite ab. Alors ce plan rencontre la surface cubique et l'hyperboloïde d'équation $\mu ce - df = 0$ en les mêmes droites. Par conséquent, les deux droites du plan $a = \mu b$ distinctes de ab sont des génératrices de l'hyperboloïde de différentes espèces, et donc l'une rencontre les droites cd et ef, et l'autre rencontre les droites cf et de. D'où la notation exposée précédemment.

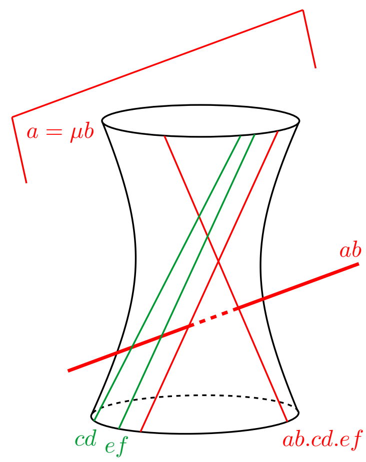

FIGURE 2.3 – La notation de Salmon par les hyperboloïdes

Dans l'*Encyklopädie*, Meyer indique que Salmon démontre ainsi l'existence des vingt-sept droites. Voici le raisonnement que Meyer expose (nous reprenons les notations de Cayley). Si l'on suppose *a priori* que l'équation de la surface est de la forme $ace - bdf = 0$ (ce qui, d'après Cayley, est en fait évident par simple examen des coefficients d'une fonction d'ordre trois), alors il est clair que la surface contient les neuf droites ab, ad, af, cb, cd, cf, eb, ed et ef. Parmi ces neuf droites, on peut former six triplets de droites deux à deux non coplanaires, et cela donne lieu à six hyperboloïdes. Chacun de ces hyperboloïdes intersecte la surface cubique en trois nouvelles droites, ce qui donne donc dix-huit droites supplémentaires, et on trouve donc au total vingt-sept droites.

Nous pouvons constater que la méthode ainsi décrite est effectivement proche du procédé de numérotation de Salmon. Cependant, rien ne permet d'affirmer que, lors de ce passage, l'objet de

Cayley est le dénombrement des droites ; au contraire, l'existence des droites semble déjà acquise. Il nous paraît donc difficile d'en conclure qu'on puisse lire ici une nouvelle preuve de l'existence des vingt-sept droites. En revanche, Jakob Steiner utilise cette méthode pour démontrer que les surfaces cubiques contiennent vingt-sept droites [18].

2.3.3 La notation de Hart

Dans la première partie de son article, Salmon décrit une notation des vingt-sept droites qu'il attribue à Andrew Hart [19] : les droites sont appelées $A_1, B_1, C_1, A_2, \ldots, C_3, a_1, \ldots, c_3, \alpha_1, \ldots, \gamma_3$, avec la convention que des symboles issus du même alphabet désignent des droites qui se rencontrent lorsque soit les lettres sont identiques, soit les indices le sont. Par exemple, A_1, A_2 et A_3 sont des droites d'un même plan tangent triple (et s'intersectent donc deux à deux), et de même pour A_1, B_1 et C_1. Les relations d'incidence entre symboles issus d'un alphabet différent sont données par le tableau

a_1	b_2	c_3	b_1	c_2	a_3	c_1	a_2	b_3
	A_1			B_1			C_1	
α_1	β_2	γ_3	β_1	γ_2	α_3	γ_1	α_2	β_3
c_2	a_3	b_1	a_2	b_3	c_1	b_2	c_3	a_1
	A_2			B_2			C_2	
β_3	γ_1	α_2	γ_2	α_1	β_2	α_3	β_1	γ_2
b_3	c_1	a_2	c_3	a_1	b_2	a_3	b_1	c_2
	A_3			B_3			C_3	
γ_2	α_3	β_1	α_2	β_3	γ_1	β_2	γ_3	α_1

la règle étant que la droite désignée par la lettre au milieu de chaque carré rencontre chaque paire verticale de droites. Les plans contenant la droite A_1 sont donc $A_1a_1\alpha_1$, $A_1b_2\beta_2$ et $A_1c_3\gamma_3$ (ainsi que $A_1A_2A_3$ et $A_1B_1C_1$ déjà mentionnés).

2.4 Singularités et problèmes de multiplicité

À la fin de son article, Cayley fait remarquer que son travail doit être modifié lorsque la surface cubique présente des singularités :

> « It should be remarked that the preceding theory is very materially modified when the surface of the third order has one or more conical points. » [20]

Pour bien comprendre où l'hypothèse (implicite) de lissité de la surface intervient dans les résultats de Cayley, examinons par exemple la première démonstration de l'existence des vingt-sept droites. Le fait qu'un plan tangent triple contient trois droites *distinctes* est conséquence de la lissité de la surface, de même que le fait que par une droite passent cinq plans tangents triples *distincts* [21]. Les singularités influent donc sur le problème des vingt-sept droites au niveau du

18. Voir cette démonstration dans [Steiner 1856].
19. Aucune référence n'est donnée. Hart était « Fellow » au Trinity College de Dublin et collègue de Salmon (voir par exemple [Gow 1997]).
20. La suite de la phrase évoque la présence éventuelle d'une droite double sur la surface, qui n'arrive que lorsque la surface est réglée.
21. Voir par exemple [Reid 1988] pour comprendre dans les calculs en quoi la présence de singularités modifie les résultats.

dénombrement de celles-ci. Plus précisément, la présence de singularités exige de mettre en place une notion de multiplicité de comptage.

Salmon apporte une réponse à ce problème dans son article. Il énonce ainsi que toute surface de degré trois contient vingt-sept droites et possède quarante-cinq plans tangents, sous réserve de compter avec une certaine multiplicité les droites ou plans passant par des points singuliers de la surface. Par exemple, une droite passant par un point conique doit être comptée deux fois, une droite passant par deux tels points doit être comptée quatre fois, et un plan contenant trois points coniques sera compté huit fois. Salmon considère aussi les « points doubles biplanaires », qui sont les points doubles où le cône tangent à la surface dégénère en deux plans (éventuellement confondus). Il donne alors la règle de comptage suivant les singularités présentes sur la surface :

1. Un point conique.
2. Deux points coniques.
3. Trois points coniques.
4. Quatre points coniques.
5. Un point double biplanaire.
6. Un point conique et un point double biplanaire.
7. Deux points biplanaires.
8. Un point biplanaire et deux points coniques.
9. Deux points biplanaires et un point conique.
10. Trois points biplanaires.
11. Un point biplanaire où le cône tangent est réduit à un plan double.

Il est à noter que Cayley reviendra en 1869 sur ce problème de singularités et de multiplicités dans un long mémoire sur les surfaces cubiques [22], où il reprendra en particulier la classification de ces surfaces suivant leurs singularités, donnée par Schläfli en 1858 [23].

2.5 Conclusion

Les articles que nous avons étudiés ici, qui, d'après l'*Encyclopädie* et le livre de Henderson, sont les premiers à traiter spécifiquement des droites sur les surfaces cubiques, permettent de retrouver une partie des thèmes déjà identifiés dans le chapitre précédent. Outre les différentes démonstrations de l'existence des vingt-sept droites (et des quarante-cinq plans tangents triples), Cayley et Salmon se penchent d'une part sur la question — délicate, puisque Cayley lui-même n'y trouve pas de réponse satisfaisante — de la notation des droites et d'autre part sur le problème provenant de l'éventuelle présence de singularités sur la surface.

Une bonne notation des droites est importante pour Cayley en ce qu'elle lui permet de bien comprendre la configuration des vingt-sept droites ; basée sur la notion de « double-six », celle proposée par Schläfli en 1858 sera l'objet du chapitre 4.

D'autre part, la liste des singularités donnée par Salmon permet d'énoncer les règles de comptage des droites et plans associés à la surface, mais préfigure également de la classification

22. [Cayley 1869].
23. [Schläfli 1858].

des surfaces cubiques donnée par Schläfli en 1863 [24] et reprise par Cayley en 1869 dans un long mémoire sur les surfaces cubiques [25].

Chacune des trois démonstrations de l'existence des vingt-sept droites utilise des arguments qui leur sont propres. Les deux dernières s'inscrivent dans un certain contexte géométrique, puisqu'elles sont des applications de résultats ou techniques de l'époque : théorie des surfaces réciproques et formules de Plücker pour l'une, procédés d'élimination pour l'autre. La première démonstration est quant à elle indépendante des résultats connus à l'époque. Si le manque d'une preuve de l'existence d'un certain nombre de droites tracées la rend incomplète, elle permet de mettre en relief la notion de plan tangent triple, dont les propriétés sont utiles ne serait-ce que pour comprendre la configuration ainsi obtenue. C'est à cette lacune que nous consacrons le chapitre suivant.

24. [Schläfli 1863].
25. [Cayley 1869].

Chapitre 3

La lacune dans la première preuve de Cayley

Il a été vu au chapitre précédent, et l'*Encyklopädie* le mentionne également, que Cayley propose dans son article de 1849 une démonstration incomplète de l'existence des vingt-sept droites. Cette démonstration repose en effet sur l'existence d'un certain nombre de droites tracées sur les surfaces de degré trois, existence que Cayley ne justifie pas. Dans ce chapitre, nous cherchons à voir si Cayley ou d'autres mathématiciens ont essayé de compléter la démonstration. Nous verrons que très peu d'auteurs ont fait des remarques à ce sujet et que quelques-uns, sans toutefois relever la lacune de Cayley, proposent des démonstrations de cette existence.

Pour effectuer ce repérage, nous commençons par utiliser les sources que nous avons déjà exploitées au chapitre 1 : l'*Encyklopädie*, le *Jahrbuch* et le *Twenty-seven Lines* de Henderson. Nous verrons que les références trouvées grâce à ces sources et traitant du problème d'existence de droites sur les surfaces cubiques font appel à deux arguments principaux : le premier est qu'une droite de l'espace est définie par quatre coefficients indépendants, le second est qu'un système d'équations (polynomiales) ayant autant d'équations que d'inconnues possède un nombre fini de solutions. La suite du chapitre sera alors consacrée à une étude du statut de ces deux arguments. Nous verrons ainsi qu'un certain flou les entoure lorsqu'ils sont invoqués pour le problème d'existence des droites sur les cubiques. Cela nous conduira à en chercher des énoncés précis, notamment après 1928, date de publication de la section de l'*Encyklopädie* sur les surfaces cubiques.

3.1 À la recherche de démonstrations

Nous allons voir dans cette section que certains textes complètent la lacune de la première démonstration de Cayley en proposant une démonstration de l'existence d'un nombre fini de droites sur les surface cubiques. Dans un premier temps, nous recensons de tels travaux grâce à nos sources, et nous verrons qu'en découle un premier commentaire sur le type d'ouvrages dans lesquels ces travaux sont trouvés. Dans un second temps, nous analysons les preuves en question en essayant d'en dégager les arguments principaux.

3.1.1 Repérage de travaux sur l'existence de droites

Pour repérer les travaux sur l'existence de droites sur les surfaces cubiques, nous utilisons nos trois sources principales : l'*Encyklopädie*, le *Jahrbuch* et le *Twenty-seven Lines* de Henderson. Parmi les références ainsi examinées, seulement quatre proposent une preuve de l'existence d'un nombre fini de droites. Présentons-les, avant d'en tirer quelques premières remarques.

Le livre de Henderson, de 1911, contient lui-même une démonstration de l'existence d'un certain nombre de droites sur les surfaces cubiques. Parmi les références données dans ce livre, une seule reprend le problème d'existence : il s'agit d'un article publié en 1859 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* et écrit par Ernest de Jonquières [1]. Cet article consiste en une réponse à un des problèmes posés en 1857 dans ces mêmes *Nouvelles Annales* : « Sur toute surface du troisième degré, on peut trouver vingt-sept droites ». Comme il l'annonce lui-même au début de son article, De Jonquières ne fait que reprendre et compléter les travaux effectués par Cayley et Salmon sur l'existence des vingt-sept droites sur les surfaces du troisième ordre. La démonstration d'existence d'une droite est indiquée en note de bas de page.

L'*Encyklopädie* (1928) mentionne dans une note la lacune dans la démonstration de Cayley et décrit en le commentant, l'argument, selon lui usuel, permettant de compléter la preuve. Cette note ne contient toutefois pas de référence à des articles où la lacune de Cayley est comblée. C'est pourquoi nous avons cherché la trace d'une démonstration de l'existence de droites dans les références générales données par Meyer au début de la section sur les surfaces cubiques. Parmi celles-ci, seul le *Treatise on the Analytic Geometry* [2] de Salmon, publié en 1862, contient une telle démonstration, mais un livre de Henry Frederick Baker [3] de 1923 s'intéresse aussi à l'existence de droites sur les surfaces de degré trois ; nous en parlerons au paragraphe suivant. Enfin, notons que ni les articles de Cayley sur les surfaces cubiques ni les articles que nous avons relevés dans le *Jahrbuch* (cf. annexe A) ne contiennent de démonstration de l'existence de droites.

Nous pouvons d'ores et déjà faire trois remarques. La première est que, comme nous l'avons annoncé, le nombre d'articles ou livres trouvés est plutôt faible. Une deuxième remarque émerge d'une première lecture des ouvrages en question : mis à part Meyer, aucun des auteurs ne relève explicitement le manque dans la première preuve de Cayley. La lacune dans cette preuve ne semble ainsi pas faire l'objet de nombreux commentaires ; au contraire, l'examen de tous articles sur les surfaces cubiques que nous avons considérés jusqu'ici pour ce mémoire laisse à penser que l'existence des vingt-sept droites, et *a fortiori* d'un nombre fini de droites, est acquise dès 1849. La troisième remarque est que les références que nous avons relevées ne sont pas des articles de recherche : il s'agit d'ouvrages généraux sur la géométrie ou qui reprennent explicitement des résultats sur les surfaces cubiques déjà démontrés (c'est le cas de l'article de De Jonquières). Cela renforce l'impression que le manque dans la démonstration de Cayley n'est pas considéré comme un problème.

À ce stade, nous pouvons faire une hypothèse expliquant ces remarques. Dans son article de 1849, Cayley donne deux démonstrations de l'existence des vingt-sept droites. La première, incomplète est celle à laquelle nous nous intéressons ici. La seconde est en revanche complète et indépendante de la première. Ainsi, l'existence de droites sur les surfaces cubiques est assurée par la deuxième démonstration elle-même, et l'on peut penser que la lacune de la première

1. [De Jonquières 1859].
2. [Salmon 1862].
3. [Baker 1923].

démonstration est comblée de cette manière. C'est d'ailleurs peut-être pour cette même raison que Cayley lui-même ne revient pas sur cette lacune.

3.1.2 Contenu des démonstrations

Nous voyons à présent quels sont les arguments permettant aux auteurs sus-cités de conclure quant à l'existence d'un nombre fini de droites sur les surfaces cubiques. Commençons ainsi avec De Jonquières, qui écrit :

> « Pour qu'une droites coïncide avec la surface, il faut exprimer qu'elle la rencontre en $3 + 1 = 4$ points, ce qu'on fera au moyen de quatre équations de condition, qui la détermineront complètement, parce qu'une droite ne comportant dans ses équations que quatre coefficients indépendants, ne peut être assujettie qu'à quatre conditions. »

Il précise ensuite que les ordonnées r des points d'intersection de la droite et de la surface sont les racines d'une équation $Ar^3 + Br^2 + Cr + D = 0$, les quatre conditions en question étant alors $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ et $D = 0$. De Jonquières ajoute que sa démonstration montre que la surface du troisième degré est la seule surface « générale » à contenir toujours des droites.

Nous voyons ainsi émerger trois étapes. La première est de dire qu'une droite est incluse dans la surface lorsqu'elle la rencontre en un nombre « suffisant » de points, la deuxième est qu'une droite dépend de quatre coefficients indépendants, et la dernière est qu'un système à quatre équations et quatre inconnues possède toujours une solution [4]. Cette architecture de preuve se retrouve dans nos autres références, comme le montre la suite de ce paragraphe.

Le but du paragraphe 46 du *Treatise* de Salmon est de trouver des conditions pour qu'une droite d'équations $x = mz + a, y = nz + b$ soit contenue dans un plan donné. Après avoir fait ces calculs, Salmon énonce que, plus généralement, pour trouver des conditions pour qu'une droite soit contenue dans une surface, il suffit de substituer les valeurs de x et de y dans l'équation de la surface et d'égaler à 0 tous les coefficients de l'équation en z qui résulte de la substitution, donnant ainsi un certain nombre de conditions, ce nombre étant un de plus que le degré de la surface. Il ajoute en note :

> « Since the equations of a right line contain four constants, a right line can be determined which satisfy any four conditions. Hence [...] every surface of the third degree must contain a finite number of right lines since the number of conditions to be satisfied is equal to the number of disposable constants. »

Ici, la dernière étape est légèrement différente de celle de De Jonquières, puisqu'il s'agit de dire qu'un système de quatre équations à quatre inconnues possède toujours un nombre *fini* de solutions.

Cette structure de démonstration se retrouve encore chez Henderson, qui part quant à lui d'une droite d'équations $\dfrac{x - x_0}{\lambda} = \dfrac{y - y_0}{\mu} = \dfrac{z - z_0}{\nu} = r$. Il écrit que pour que cette droite soit incluse dans la surface, il faut effectuer la substitution puis égaler à zéro les coefficients de l'équation en r ainsi obtenue, cette équation devant être satisfaite pour toutes les valeurs de r. Cela lui donne donc quatre conditions, et il conclut :

> « But the equations if a straight line involve four disposable constants ; and, as the number of conditions to be fulfilled is exactly the number of disposable constants in

4. Au vu de sa conclusion, on peut penser que De Jonquières sous-entend la finitude du nombre de solutions du système en question.

> the equations of the straight line, it follows that every surface of the third order must contain a finite number of straight lines, real or imaginary, lying entirely upon it. »

Meyer résume dans l'*Encyklopädie* les arguments que nous venons de citer : une droite rencontre une surface cubique en trois points qui dépendent d'une équation de degré trois en un certain paramètre. Elle est donc incluse dans la surface lorsque les quatre coefficients de cette équation sont nuls et alors :

> « Damit ergeben sich vier Bestimmungsgleichungen für die vier unabhängigen Koordinaten der Geraden, die in allgemeinen eine endliche Anzahl von Lösungen haben werden. »

Meyer effectue quelques commentaires sur cette preuve, et précise en particulier qu'elle doit être complétée. Nous en reparlerons dès la prochaine section.

Citons encore Baker, dont le cas est un peu différent de ceux de De Jonquières, Salmon et Henderon. Dans un chapitre consacré aux surfaces cubiques, il cherche à montrer l'existence des vingt-sept droites, et écrit ainsi qu'il y a quatre conditions algébriques pour qu'une droite soit contenue dans la surface et qu'une droite dépend de quatre coefficients. Il n'en conclut toutefois pas pour autant qu'existe un nombre fini de droites tracées sur la surface. Au contraire, il continue en supposant l'existence d'au moins une droite sur la surface, avant de reprendre la preuve de Cayley avec les plans tangents triples.

Comme nous l'avons déjà souligné, trois points sont à relever dans les différentes démonstrations que nous venons de décrire. Le premier est que la méthode pour déterminer l'inclusion d'une droite dans une surface est à chaque fois la même : il s'agit de substituer les équations de la droite dans celle de la surface et de dire qu'il y a inclusion lorsque l'équation qui résulte de cette substitution est triviale [5]. Ce point ne nous semble pas litigieux, et par conséquent nous en resterons là en ce qui le concerne. Le deuxième point est le fait qu'une droite dépende de quatre coefficients, et le troisième est la propriété disant qu'un système d'équations — polynomiales, bien que cela ne soit jamais précisé — ayant autant d'équations que d'inconnues possède toujours un nombre fini de solutions. Cet argument d'existence de solutions à un système polynomial nous semble discutable [6]. Dans l'*Encyklopädie*, Meyer l'appelle « principe de dénombrement des constantes » [7] et indique qu'il doit être complété. Remarquons enfin que Baker n'utilise pas cet argument, alors que le début de sa preuve l'y invite. On peut peut-être considérer cela comme un rejet du principe de dénombrement des constantes de la part de Baker, pour une raison qui nous est par ailleurs inconnue.

Dans leur preuve, De Jonquières, Salmon et Henderson utilisent les deux arguments clés identifiés précédemment sans aucune justification. Ils n'invoquent pas non plus de théorème particulier : par exemple, aucun d'eux n'utilisent la dénomination « principe de dénombrement des constantes ». Afin d'évaluer le statut de ces deux arguments — sont-ils considérés comme des connaissances usuelles ? font-ils partie du « paysage » géométrique de l'époque ? —, nous cherchons à présent à en savoir plus à leur sujet.

5. Les raisons étant soit que l'équation a une racine de plus que son degré, soit qu'elle possède une infinité de racines. Bien entendu, ces deux raisons sont équivalentes.

6. Les exemples, certes triviaux, suivants le mettent en défaut : le système $\left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=2 \end{array} \right.$ n'a aucune solution et le système $\left\{ \begin{array}{c} x^2+y^2=1 \\ 2x^2+2y^2=2 \end{array} \right.$ en a au contraire une infinité.

7. « Prinzip des Konstantenzählens » dans l'*Encyklopädie*.

3.2 Les arguments invoqués

Nous essayons dans cette section de comprendre les deux arguments invoqués sans explication par les auteurs dont nous avons parlé dans la section précédente. Il s'agit du fait qu'une droite est déterminée par quatre coefficients indépendants, et qu'un système de quatre équations à quatre inconnues possède toujours un nombre fini de solutions.

3.2.1 Coordonnées d'une droite

Dans la note de bas de page de l'*Encyklopädie* sur l'existence d'un nombre fini de droites sur les surfaces cubiques, Meyer fait référence aux *Vorlesungen über höhere Geometrie* de Klein (1893) [8]. Klein y écrit que l'idée qu'une droite de l'espace dépend de quatre constantes apparaît dans un livre de Plücker publié en 1846 [9]. Cette idée est résumée par Klein de la façon suivante : une droite de l'espace est définie par ses projections sur deux plans de coordonnées, par exemple les plans x, z et y, z, auquel cas les équations de la droite peuvent s'écrire sous la forme

$$x = rz + \rho, \quad y = sz + \sigma.$$

Les quantités r, s, ρ, σ sont alors appelées les coordonnées de la droite. Toujours d'après Klein, ces coordonnées sont à la base de la géométrie des droites, qui considère les droites de l'espace comme des éléments de l'espace, et non pas comme ensembles de points [10].

Nous avons vu précédemment que Salmon utilise explicitement cette forme d'équations pour une droite. Dans son traité de géométrie de 1862, il introduit les quatre coefficients d'une droite d'une manière un peu différente : une droite est donnée comme intersection de deux plans, et par un procédé d'élimination entre les équations de ces plans, on obtient des équations identiques à celles proposées par Plücker. Salmon précise alors le lien entre les équations qu'il obtient et les projections de la droite sur les plans de coordonnées.

Puisque le fait qu'une droite de l'espace dépende de quatre coordonnées indépendantes est exposé dans un ouvrage destiné à un grand public comme celui de Salmon, et puisque les auteurs que nous avons évoqués dans la section précédente utilisent ce fait sans référence ni justification, on peut penser qu'il s'agit d'un fait connu et acquis par les mathématiciens de l'époque. Remarquons enfin que la façon d'introduire quatre coordonnées indépendantes pour une droite est un peu floue. Toutes les droites ne peuvent en effet pas admettre des équations de la forme [11] $x = rz + \rho, \quad y = sz + \sigma$; quant à l'indépendance des coordonnées, elle n'est ni définie ni justifiée.

3.2.2 Principe de dénombrement des constantes

Rappelons que c'est le principe de dénombrement des constantes qui permet aux auteurs d'affirmer qu'un système de quatre équations à quatre inconnues possède un nombre fini de solutions, le corollaire étant que toute surface cubique contient un nombre fini de droites.

Au sujet de ce principe, Meyer renvoie à un article de Clebsch de 1871 consacré à Plücker [12] où est décrit ce principe :

8. Nous avons utilisé l'édition de 1926, éditée par Wilhelm Blaschke : [Klein 1926].
9. [Plücker 1846].
10. Klein indique que cette théorie a été développée par Plücker dans [Plücker 1868].
11. Par exemple, les axes des x et des y n'ont pas de telles équations. Certes, il suffit alors de permuter les coordonnées dans les équations proposées, mais cela traduit une difficulté de paramétrer toutes les droites de l'espace de façon unifiée.
12. [Clebsch 1871], traduit en français par Paul Mansion dans [Mansion 1872].

« Der Gedanke, die Erfüllbarkeit eines Gleichungssystems, aus dem Umstande zu erschliessen, dass die Zahl der in demselben enthaltenen Unbekannten der Zahl der Gleichungen gleichkommt, liegt sehr nahe. » [13]

Clebsch précise que cette méthode est évoquée par Plücker dans la préface de son traité *Theorie der algebraischen Curven* (1839). Cette préface ne contient cependant ni justification du principe, ni même un énoncé précis.

Bien que De Jonquières, Salmon et Henderson n'en invoquent pas le nom, c'est certainement avec ce principe que ces auteurs démontrent l'existence d'un nombre fini de droites sur les surfaces cubiques, puisque Meyer indique, en 1928, qu'il s'agit de l'argument usuellement utilisé pour le problème d'existence de droites. Cependant, Clebsch et Meyer soulignent que des précautions doivent être prises pour pouvoir appliquer le principe de dénombrement des constantes. En effet, d'après Meyer — les commentaires de Clebsch sont similaires —, si les équations du système sont incompatibles ou non indépendantes, le système n'a aucune solution dans le premier cas et en a au contraire une infinité dans le second cas. Et même lorsque les équations sont compatibles et indépendantes, Meyer affirme qu'il faut encore vérifier que les objets géométriques définis par les solutions ne sont pas dégénérés. Il complète alors les arguments à donner dans le cas des surfaces cubiques : si les équations étaient incompatibles, aucune surface cubique ne contiendrait de droite, et si elles étaient dépendantes les unes des autres, toutes les cubiques seraient des surfaces réglées, ce qui n'est manifestement pas le cas. Enfin, comme les objets définis par les solutions du système sont des droites, il n'y a pas de dégénérescence possible.

Une remarque est à apporter. Pour justifier la compatibilité et l'indépendance des équations du système, Meyer invoque le fait qu'il existe des surfaces cubiques non réglées ainsi que des surfaces contenant une droite [14]. Mais il faut bien rappeler que le système en question dépend *a priori* de la surface cubique dont il s'agit. On peut ainsi interpréter l'argument de Meyer comme une sorte d'argument de « généricité » : le système doit de façon générale (ou générique) comporter un nombre fini de solutions, le cas contraire mettant en défaut des résultats particuliers connus [15]. Ces considérations non justifiées de généralité, additionnées à l'absence d'énoncé précis du principe, contribuent à une sorte de flou autour du principe. Nous essayons d'en savoir plus dans la section suivante.

3.3 Vers une interprétation moderne

Les deux résultats qui ont fait l'objet de la section précédente — le fait qu'une droite dépende de quatre coefficients et le principe de dénombrement des constantes — n'ont finalement pas vraiment d'énoncés précis. Pourtant, les auteurs semblent convaincus de leur véracité, et les utilisent sans justification particulière. Même Meyer, qui insiste sur les précautions à prendre pour utiliser le principe de dénombrement des constantes, reste flou sur l'énoncé de celui-ci. Nous nous intéressons ainsi au statut de ces résultats après 1928, date de publication de l'article

13. Dans [Mansion 1872] ce passage est traduit par : « L'idée fondamentale de cette méthode se rapproche de celle qui consiste à conclure la résolubilité d'un système d'équation de cette circonstance que le nombre des inconnues est égal à celui des équations ».

14. Il donne en exemple la « cubique avec quatre nœuds ». Il s'agit de la surface dite « de Cayley », d'équation $xyz + yzw + zwx + wxy = 0$. On pourra en voir une représentation graphique à l'annexe C.

15. On pourra se référer à [Dieudonné 1974] pour un résumé historique sur les notions de généralité et de généricité en géométrie algébrique.

sur les surfaces cubiques de l'*Encyklopädie* : sont-ils encore invoqués tels quels, apparaissent-ils sous de nouvelles formes plus précises ou disparaissent-ils peut-être complètement ?

Sans prétendre établir une chronologie précise de ces deux résultats (nous perdons en effet la trace du principe de dénombrement des constantes tel qu'il a été présenté dans la section précédente), nous indiquons dans cette section ce qu'ils sont devenus au XX^e siècle. Il sera en particulier souligné que les nouvelles versions de ces résultats se retrouvent dans les démonstrations modernes de l'existence de droites sur les surfaces cubiques.

3.3.1 Coordonnées de Plücker et Grassmannienne

Après avoir exposé la manière de Plücker de mettre en évidence les quatre coefficients r, s, ρ, σ associés à une droite de l'espace [16], Klein montre comment trouver des coordonnées homogènes d'une telle droite. Il commence par introduire la quantité $\eta = r\sigma - s\rho$, puis il montre que si la droite passe par deux points de coordonnées respectives x, y, z et x', y', z', alors

$$r = \frac{x - x'}{z - z'},\ s = \frac{y - y'}{z - z'},\ \rho = \frac{x'z - xz'}{z - z'},\ \sigma = \frac{y'z - yz'}{z - z'},\ \eta = \frac{xy' - x'y}{z - z'}.$$

Est alors introduite la quantité [17] $r : s : 1 : -\sigma : \rho : \eta$, qui s'écrit aussi, au vu des relations précédentes :

$$(x - x') : (y - y') : (z - z') : (yz' - y'z) : (zx' - xz') : (xy' - yx').$$

Ces six quantités sont appelées *coordonnées homogènes de la droite* ; ce sont les sous-déterminants de la matrice

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \end{vmatrix}$$

et elles vérifient la relation $(x - x')(yz' - y'z) + (y - y')(zx' - z'x) + (z - z')(xy' - x'y) = 0$. Afin de s'affranchir des coordonnées rectangulaires, Klein indique qu'il faut considérer la matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

et considérer les quantités $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ (à coefficient multiplicatif près) avec (i, k) prenant les valeurs $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$ et $(2, 3)$. Les p_{ik} sont finalement appelées les coordonnées de la droite ; elles sont soumises à la relation

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Ces coordonnées sont appelées dans la littérature récente [18] *coordonnées de Plücker*. Les étapes que nous venons de décrire permettent de montrer que l'ensemble des droites de l'espace projectif, appelé *Grassmannienne*, est une sous-variété de $\mathbb{P}^5$ de dimension 4. La Grassmannienne est utilisée dans les preuves modernes d'existence de droites sur les surfaces de degré trois ; la propriété essentielle qui y est exploitée est le fait qu'elle est de dimension 4. On pourra se reporter à l'annexe B pour plus de détails.

16. Rappelons (cf. 3.2.1) qu'il s'agit de mettre les équations d'une droite sous la forme $x = rz + \rho,\ y = sz + \sigma$.
17. Notation de Klein pour désigner le sextuplet de coordonnées homogènes $(r, s, 1, -\sigma, \rho, \eta)$.
18. Par exemple dans [Shafarevich 1988].

3.3.2 Principe de dénombrement des constantes, nouvelle version

Comme nous l'avons annoncé au début de cette section, nous perdons, à partir de 1928, la trace du principe de dénombrement des constantes tel que nous l'avons rencontré à la section précédente. C'est dans des textes des géomètres Francesco Severi, Bartel Leendert van der Waerden, Oscar Zariski, Pierre Samuel, David Mumford [19] que nous le retrouvons. Il y est énoncé sous la même forme ; c'est un résultat sur les *correspondances algébriques.* Nous commençons par exposer rapidement le concept de correspondance algébrique afin de pouvoir énoncer le principe de dénombrement. Pour cela, nous nous basons sur l'article de Van der Waerden, dont nous conservons les notations et auquel nous renvoyons pour les détails et les preuves que nous omettons dans la suite.

Une correspondance algébrique $\mathfrak{K}$ entre deux espaces projectifs P_m et P_n est une variété de paires de points de P_m et de P_n [20]. Si ses équations sont notées

$$F_\nu(\xi'_0, \ldots, \xi'_m; \eta'_0, \ldots \eta'_n) = 0, \tag{3.1}$$

un procédé d'élimination permet d'obtenir le système résultant

$$G_\lambda(\xi'_0, \ldots, \xi'_m) = 0 \tag{3.2}$$
$$H_\mu(\eta'_0, \ldots, \eta'_n) = 0 \tag{3.3}$$

vérifiant la propriété que pour toute solution ξ' de (3.2) ou η' de (3.3), on peut trouver un couple (ξ', η') solution de (3.1). Les équations (3.2) définissent une variété $\mathfrak{M}$ de P_m appelée *variété source*, les équations (3.3) définissent une variété $\mathfrak{N}$ de P_n appelée *variété image* [21]. On parle alors de correspondance entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$. On dit que la correspondance est *irréductible* si la variété $\mathfrak{K}$ est irréductible. Le principe de dénombrement des constantes est alors énoncé de la façon suivante :

On considère une correspondance irréductible de dimension q entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de dimensions respectives a et c. Si à un point générique [22] *ξ de $\mathfrak{M}$ correspond une variété de $\mathfrak{N}$ de dimension b et à un point générique η de $\mathfrak{N}$ correspond une variété de $\mathfrak{M}$ de dimensions d, alors on a*

$$q = a + b = c + d.$$

Van der Waerden précise que les points ξ' et η' qui définissent la correspondance doivent être pensés comme les coordonnés homogènes de divers objets possibles : coordonnées de Plücker d'une droite, coefficients d'une matrice d'homographie, etc. En guise d'exemple d'application, il utilise le principe de dénombrement des constantes pour montrer que, étant données sept droites en position générale dans un plan, on peut toujours trouver une quartique ayant ces sept droites comme bitangentes.

L'appellation « dénombrement des constantes » peut être plus ou moins naïvement justifiée par le lien entre la dimension d'une variété et le nombre de constantes définissant les objets de la variété. Par exemple, nous avons vu qu'une droite est définie par quatre constantes, ce

19. [Severi 1921 ; Van der Waerden 1934 ; Zariski 1934 ; Samuel 1967 ; Mumford 1976]. En anglais, le principe est appelé « principle of counting constants » ; en allemand, il est appelé « Prinzip der Konstantenzählung ».

20. Dans un langage plus moderne, une correspondance algébrique est une variété de l'espace produit $P_m \times P_n$.

21. En allemand : « Urmannigfaltigkeit » et « Bildmannigfaltigkeit ».

22. En allemand : « allgemeiner Punkt ». Dans [Zariski 1934] par exemple, le terme correspondant est « generic point ».

qui correspond à la dimension quatre de la Grassmannienne. Le lien avec la version du principe exposée au paragraphe 3.2.2, à savoir qu'un système d'équations ayant autant d'inconnues que d'équations est résoluble, semble moins clair. On pourra tout de même remarquer l'utilisation de points génériques, ce qui fait écho aux arguments de généralité de Meyer que nous avons évoqués au paragraphe 3.2.2.

En revanche, nous pouvons voir comment utiliser le principe de dénombrement des constantes dans le cas des surfaces cubiques. L'idée est de prendre la correspondance entre l'espace des droites et l'espace des surfaces cubiques, définie par la relation d'inclusion. Les équations (3.1) sont alors les quatre équations de condition qui résultent de la substitution des équations d'une droite dans celle d'une surface cubique, comme cela a été vu au paragraphe 3.1.2. Pour conclure, en supposant que la correspondance est irréductible, il suffit de voir que la dimension de l'espace des droites est 4, celle de l'espace des surfaces cubiques est 19 et celle de l'espace des surfaces cubiques contenant une droite donnée est 15. Le principe de dénombrement montre alors que l'espace des droites incluses dans une surface cubique « générique » donnée est de dimension 0, c'est-à-dire qu'il est fini [23].

Nous soulignons bien que les deux paragraphes précédents sont notre propre interprétation. En particulier, dans aucun des travaux sur lesquels nous nous sommes basés pour la « nouvelle » version du principe des constantes n'est justifiée l'appellation de ce dernier ; on n'y trouve pas non plus d'application au problème des droites sur les surfaces cubiques. Nous renvoyons enfin à l'annexe B pour une preuve moderne de l'existence de droites sur les surfaces de degré trois. On pourra y voir une nouvelle interprétation du principe de dénombrement des constantes dans un théorème concernant les morphismes de variétés projectives.

3.4 Conclusion

La lacune laissée par Cayley dans sa première démonstration, *via* les textes qui la complètent, a permis de mettre en avant deux théorèmes indépendants de notre sujet et ayant leur propre développement. Le premier concerne le nombre de coefficients indépendants dont dépend une droite de l'espace. Le second est le principe de dénombrement des constantes, dont la forme originelle (selon Clebsch) dit *grosso modo* que tout système d'équations polynomiales ayant autant d'inconnues que d'équations possède un nombre fini de solutions.

Énoncé tel quel, le principe de dénombrement des constantes est erroné, comme le fait remarquer en 1928 Meyer dans l'*Encyklopädie*. Ce principe se retrouve dans des ouvrages de géométrie algébrique du XX^{e} siècle, et déjà en 1914 [24], sous une nouvelle forme mettant en jeu des dimensions de variétés algébriques. Si ceux qui énoncent dans leurs ouvrages cette forme du principe n'établissent pas de lien avec celle utilisée par De Jonquières, Salmon et Henderson, il est en revanche certain que la conclusion de ces trois-là est un peu hâtive : la compatibilité des équations et leur indépendance n'est jamais évoquée, ce que souligne Meyer dans l'*Encyklopädie*. Leur idée de démonstration de l'existence d'un nombre fini de droites sur les surfaces cubiques se retrouve cependant dans des preuves récentes utilisant l'arsenal de la géométrie algébrique contemporaine : Grassmannienne, morphismes de variétés, théorèmes de dimension, etc [25].

23. On pourra se reporter à l'annexe B pour des détails concernant notamment le calcul des dimensions.
24. On peut lire dans la préface de [Severi 1921] que ce livre est daté de 1914, mais qu'il a été publié en 1921 à cause de la Première Guerre mondiale. En fait, il s'agit d'une version allemande des *Lezioni di geometrica algebrica* datant de 1908.
25. Voir l'annexe B à ce sujet.

Puisque la seconde démonstration de l'existence des vingt-sept droites proposée par Cayley est indépendante de la première et permet de combler sa lacune, nous pouvons nous demander pourquoi une preuve d'existence indépendante de celle-ci a été recherchée, et même pourquoi une preuve de l'existence des vingt-sept droites dont Cayley savait pertinemment qu'elle était incomplète a été publiée. Nous voyons quatre réponses possibles à cela. La première serait simplement la volonté de démontrer un théorème de deux façons totalement indépendantes. Une deuxième serait le fait qu'à l'époque, les mathématiciens étaient déjà convaincus de l'existence de droites sur les surfaces cubiques. Une troisième réponse envisageable serait de voir en une telle preuve non pas une démonstration en tant que telle, mais plutôt une application de théorèmes plus généraux comme par exemple le principe de dénombrement des constantes. Une dernière réponse, que nous pensons la plus probable, serait que la première démonstration de Cayley est instructive dans sa méthode de dénombrement des droites. Elle met en effet en valeur les plans tangents triples, qui élucident partiellement les relations d'incidence entre les droites, permettant ainsi une meilleure compréhension de la configuration des vingt-sept droites. Cette utilisation des plans tangents triples s'est en particulier vue au chapitre précédent lors de l'établissement des différents systèmes de notation des droites de la part de Cayley, Salmon et Hart. La notation de Schläfli exploite également les relations d'incidence entre les droites données par la considérations des plans tangents triples ; elle fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

La notation de Schläfli

Nous avons constaté aux chapitres 1 et 2 l'importance du problème de notation des vingt-sept droites. En particulier, Cayley et Salmon s'y essaient sans pour autant être satisfaits de leurs propositions ; c'est pourquoi nous avons cherché à en savoir plus sur la question. Dans son livre, Henderson indique qu'une notation efficace a été trouvée en 1858 par Schläfli et que cette notation est restée, selon lui, la meilleure.

Ce chapitre est ainsi consacré à la notation proposée par Schläfli. Nous allons bien entendu la décrire, en commençant par détailler les calculs qui permettent d'y aboutir et que l'on trouve dans l'article de 1858 de Schläfli. Après cela, nous essayerons de voir en quoi les propos élogieux de Henderson peuvent justifiés ou au contraire démentis, en examinant l'accueil de la notation de Schläfli de la part de différents auteurs. Cette appréciation sera lue à deux niveaux : d'abord en relevant des commentaires directs sur la notation, ensuite en essayant de voir si cette notation a été effectivement utilisée dans les travaux sur les surfaces cubiques postérieurs à 1858.

La lecture de l'article de Schläfli nous ayant révélé *a posteriori* une certaine ressemblance avec une partie de celui de Cayley de 1849, nous commençons par rappeler certains points de ce dernier déjà évoqués dans les chapitres précédents.

4.1 L'article de Cayley de 1849

Nous revenons rapidement sur l'article de Cayley de 1849, en particulier sur la notation due à Salmon que Cayley y expose et dont nous avons pu constater qu'elle présentait des ressemblances avec une partie du travail de Schläfli. Nous reviendrons également sur le commentaire de Cayley concernant le problème de la notation des droites.

4.1.1 La notation de Salmon

Dans ce paragraphe, nous rappelons brièvement le second système de notation que Cayley expose dans son article [1] de 1849. Cette notation est due à Salmon, comme le précise lui-même Cayley. Nous verrons à la prochaine section que la démarche de Schläfli est assez proche de ce qu'écrit Cayley.

Celui-ci commence par écrire l'équation de la surface sous la forme $ace - bdf = 0$, où a, b, c, d, e et f sont des fonctions linéaires en les coordonnées de l'espace. Cette écriture met en évidence

1. [Cayley 1849].

neuf droites tracées sur la surface : ce sont les intersections respectives des plans $a = 0$, $c = 0$, $e = 0$ avec les plans $b = 0$, $d = 0$, $f = 0$. Cayley note ces droites ab, ad, …, ef, où ab désigne l'intersection des plans $a = 0$ et $b = 0$, etc.

Il montre ensuite que l'une des deux autres droites d'un plan tangent triple contenant ab rencontre les droites cd et ef, et que l'autre rencontre les droites cf et de. Ces droites sont alors notées respectivement $ab.cd.ef$ et $ab.cf.de$. Les plans tangents ainsi utilisés étant au nombre de trois, Cayley ajoute des indices, obtenant ainsi les vingt-sept droites :

$$\begin{array}{ccc}
ab & ad & af \\
cb & cd & cf \\
eb & ed & ef \\
(ab.cd.ef)_1 & (ab.cd.ef)_2 & (ab.cd.ef)_3 \\
(ad.cf.eb)_1 & (ad.cf.eb)_2 & (ad.cf.eb)_3 \\
(af.cb.ed)_1 & (af.cb.ed)_2 & (af.cb.ed)_3 \\
(ab.cf.ed)_1 & (ab.cf.ed)_2 & (ab.cf.ed)_3 \\
(ad.cb.ef)_1 & (ad.cb.ef)_2 & (ad.cb.ef)_3 \\
(af.cd.eb)_1 & (af.cd.eb)_2 & (af.cd.eb)_3
\end{array}$$

Cayley indique ensuite quelles sont les droites de la surface incluses dans les cinq plans tangents triples contenant une droite donnée.

4.1.2 Le commentaire de Cayley sur la notation

Après avoir présenté ce système de notation, Cayley conclut :

> « This is great difficulty in conceiving the complete figure formed by the twenty-seven lines, indeed this can hardly I think be accomplished until a more perfect notation is discovered. »

Cayley reconnaît ainsi que les notations qu'il a exposées [2] dans son article ne sont pas optimales, en tout cas pas assez claires pour lui permettre d'appréhender de manière efficace les droites d'une surface cubique. Le problème d'une notation inadaptée se traduit donc par un certain blocage dans la compréhension de la configuration des vingt-sept droites.

Le commentaire que nous venons de citer montre que Cayley abandonne — dans cet article du moins — la question de la notation. Dans la suite de l'article, il utilise le système de notation qu'il vient d'exposer pour établir quelques propriétés géométriques de la configuration des vingt-sept droites. Ainsi, bien qu'étant imparfaite à ses yeux, la notation que Cayley décrit lui permet tout de même de trouver un certain nombre de propriétés.

4.2 La notation de Schläfli

Nous en venons maintenant à la notation de Schläfli. Dans son article, ce dernier commence par introduire une première notation proche de celle de Salmon. Il effectue ensuite un pas supplémentaire et débouche sur un système de notation dépendant de ce qu'il appelle un « double-six ». Avant de détailler ces étapes, nous présentons l'article en question.

2. Rappelons que Cayley propose une première notation avant de présenter celle de Salmon.

4.2.1 Présentation de l'article de Schläfli

En 1858, Schläfli publie un article [3] intitulé *An Attempt to Determine the Twenty-seven Lines upon a Surface of the Third Order and to Divide Them into Species in Reference to the Reality of the Lines upon the Surface.* Cet article est séparé en deux parties qui, bien qu'apparaissant dans le même volume du *Quarterly Journal of Mathematics*, ne sont pas présentées l'une à la suite de l'autre. Son sous-titre indique qu'il a été traduit en anglais par Cayley [4]. À noter qu'il n'existe pas de publication de cet article en d'autres langues [5]. En particulier, il n'existe pas d'article original composé avec les mots de Schläfli lui-même.

La première partie concerne les surfaces algébriques de degré quelconque. Schläfli y détermine le degré de la courbe selon laquelle la surface est touchée par ce qu'il appelle la « développable doublement circonscrite » [6]. Il en déduit que les surfaces cubiques possèdent vingt-sept droites et quarante-cinq plans tangents triples. Cayley, le traducteur de l'article, fait remarquer que ces travaux sont proches de ceux de Salmon, mais plus poussés. Il ne précise toutefois pas dans quelle mesure les résultats de Schläfli sont des approfondissements de ceux de Salmon.

Le cadre de la seconde partie est celui des surfaces cubiques. Schläfli y montre que l'équation d'une telle surface peut s'écrire sous la forme $uvw + xyz = 0$, où $u, \ldots, z$ désignent des fonctions linéaires en les coordonnées de l'espace. Partant de cette équation, il en déduit une première notation, proche de celle de Salmon. Schläfli prouve ensuite l'existence de ce qu'il baptise « double-six », que ces double-six sont au nombre de trente-six, et propose alors une notation basée sur un double-six. C'est à cette notation que la littérature fait référence lorsqu'elle mentionne « la notation de Schläfli ». Le reste de l'article est consacré aux questions de réalité des droites d'une surface cubique.

L'objet du chapitre étant le problème de notation des vingt-sept droites, nous n'aborderons de façon détaillée que ce qui y a trait. Nous délaissons donc la première partie de l'article ainsi que le problème de réalité des droites.

4.2.2 Une première notation

En utilisant des équations bien choisies de plans tangents triples, Schläfli commence par écrire l'équation de la surface sous la forme [7] $\begin{vmatrix} u & U \\ x & X \end{vmatrix} = 0$, où u et x sont des fonctions linéaires, et U et X sont des polynômes du second degré dont les surfaces qu'elles représentent sont touchées par les plans $u = 0$ et $x = 0$. Schläfli montre alors qu'il existe une fonction linéaire p telle que $U + pu$ et $X + px$ se scindent tous deux en deux facteurs du premier degré : $U + pu = -yz$ et $X + px = vw$. L'équation de la surface s'écrit alors $uvw + xyz = 0$, ce qui donne immédiatement neuf droites tracées sur la surface : par exemple la droite $(u = 0, x = 0)$, que Schläfli note $\overline{ux}$.

Schläfli introduit ensuite six coefficients A, B, C, D, E, F dépendant linéairement d'un même

3. [Schläfli 1858].

4. Très probablement depuis l'allemand. En effet, on peut y lire des mots laissés en allemand comme par exemple « Vollcurve » et « Theilcurve ». Rappelons en outre que Schläfli est à ce moment professeur à l'Université de Berne.

5. On peut trouver la liste des publications de Schläfli dans [Graf 1896].

6. Une surface développable est une surface réglée telle que le plan tangent est le même le long d'une génératrice. Schläfli appelle « développable doublement circonscrite », la surface développable dont les plans générateurs touchent la surface en deux points.

7. Nous conservons les notations de Schläfli dans ce paragraphe 4.2.2 et dans le paragraphe 4.2.4.

facteur arbitraire et tels que $Au + Bv + Cw + Dx + Ey + Fz = 0$. Il calcule :

$$Au(Bv + Dx)(Cw + Dx) + Dx(Au + Ey)(Au + Fz) = ABCuvw + DEFxyz$$

Le membre de gauche est alors une équation de la surface lorsque $ABC = DEF$. Cette dernière équation étant du troisième degré en le facteur arbitraire dont dépendent $A, \ldots, F$, elle possède trois facteurs solutions, auxquels correspondent donc trois sextuplets de coefficients notés (a, b, c, d, e, f), $(a', \ldots, f')$ et $(a'', \ldots, f'')$. Les équations de la surface correspondantes à ces sextuplets de coefficients mettent en évidence dix-huit systèmes du type ($au + dx = 0, bv + ey = 0$, $cw + fz = 0$), où la troisième équation est toujours conséquence des deux premières. Schläfli en déduit ainsi dix-huit droites notées $\ell, \ell', \ell'', m, \ldots, r''$ dont les relations avec les neuf premières droites sont données par les tableaux

$$\left|\begin{array}{cccc} \text{à travers} & \overline{ux}, \overline{vy}, \overline{wz} & \text{passent} & \ell, \ell', \ell'' \\ \text{“} & \overline{uy}, \overline{vz}, \overline{wx} & \text{“} & m, m', m'' \\ \text{“} & \overline{uz}, \overline{vx}, \overline{wy} & \text{“} & n, n', n'' \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{cccc} \text{à travers} & \overline{ux}, \overline{vz}, \overline{wy} & \text{passent} & p, p', p'' \\ \text{“} & \overline{uz}, \overline{vy}, \overline{wx} & \text{“} & q, q', q'' \\ \text{“} & \overline{uy}, \overline{vx}, \overline{wz} & \text{“} & r, r', r'' \end{array}\right|$$

Les relations d'incidence supplémentaires sont données par les règles suivantes. Deux droites d'un même tableau se rencontrent lorsque les lettres et les accents qui les représentent sont différents, et seulement dans ce cas-là ; deux droites de tableaux différents se rencontrent lorsque les symboles qui les représentent ont le même accent, et seulement dans ce cas-là.

4.2.3 Comparaison avec la notation de Salmon

Nous pouvons à ce stade remarquer la ressemblance entre ce qui précède et la notation de Salmon que nous avons rappelée au paragraphe 4.1.1. Les deux démarches commencent en effet par l'écriture l'équation de la surface sous une forme simple permettant de mettre en évidence neuf droites « fondamentales » qui sont symbolisées par des lettres correspondant à leurs équations. L'étape suivante est de déduire de ces neuf droites les dix-huit restantes. Celles-ci sont regroupées trois par trois, suivant les droites fondamentales qu'elles intersectent. Le tableau suivant montre la correspondance entre les deux notations, pour six des droites :

Schläfli	$\overline{ux}$	$\overline{vy}$	$\overline{wz}$	ℓ	ℓ'	ℓ''
Salmon	ab	cd	ef	$(ab.cd.ef)_1$	$(ab.cd.ef)_2$	$(ab.cd.ef)_3$

L'analogie entre les deux méthodes n'est probablement pas fortuite, mais Schläfli n'évoque à aucun moment Cayley ou Salmon. Rappelons cependant que Cayley, le traducteur de l'article de Schläfli, avait déjà souligné la proximité entre les travaux de Schläfli et de Salmon à la fin de la première partie de cet article.

Schläfli ne s'arrête toutefois pas là, et aboutit à une nouvelle notation en introduisant ce qu'il appelle un « double-six ».

4.2.4 Le double-six

Schläfli annonce : « An easier survey of the 27 lines of the [surface] may be arrived at as follows. » Il part à nouveau de l'équation $uvw + xyz = 0$, qu'il met sous les formes équivalentes

$$\begin{vmatrix} 0 & u & x \\ y & 0 & v \\ w & z & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{puis} \quad \begin{vmatrix} r & s & t \\ r' & s' & t' \\ r'' & s'' & t'' \end{vmatrix} = 0,$$

où $r, s, \dots, t''$ sont des combinaisons linéaires en $u, v, \dots, z$.

Schläfli considère trois fonctions linéaires [8] $p = \alpha r + \beta s + \gamma t$, $p' = \alpha r' + \beta s' + \gamma t'$ et $p'' = \alpha r'' + \beta s'' + \gamma t''$ et annonce qu'il y a six triplets (α, β, γ) tels que les p, p' et p'' sont reliées par une relation de la forme $\kappa p + \kappa' p' + \kappa'' p'' = 0$. Si on a effectivement une telle relation, l'équation de la surface s'écrit alors

$$\begin{vmatrix} 0 & \kappa s + \kappa s' + \kappa s'' & \kappa t + \kappa' t' + \kappa'' t'' \\ p' & s' & t' \\ p'' & s'' & t'' \end{vmatrix} = 0.$$

Schläfli en déduit qu'à la droite $(p = 0, p' = 0, p'' = 0)$, qui est incluse dans la surface, correspond la droite [9] $(\sum \kappa r = 0, \sum \kappa s = 0, \sum \kappa t = 0)$, et que ces droites ne se rencontrent pas.

Comme il y a six droites du type $(p = 0, p' = 0, p'' = 0)$, il y a six droites du type $(\sum \kappa r = 0, \sum \kappa s = 0, \sum \kappa t = 0)$. Schläfli affirme que toute droite du premier type rencontre toutes celles du second type, sauf celle qui lui correspond par la construction donnée précédemment, et que deux droites du même type ne se rencontrent pas. Il baptise un tel groupe de douze droites un « double-six », et montre qu'il existe exactement trente-six double-six .

Schläfli applique ces calculs en partant cette fois de l'équation $\begin{vmatrix} 0 & u & x \\ y & 0 & v \\ w & z & 0 \end{vmatrix} = 0$. En utilisant la notation précédente des droites, Schläfli obtient un double-six qu'il note

$$\begin{pmatrix} \overline{uz}, & \overline{vx}, & \overline{wy}, & \ell, & \ell', & \ell'' \\ \overline{vy}, & \overline{wz}, & \overline{ux}, & n, & n', & n'' \end{pmatrix},$$

où deux droites d'une même ligne ou d'une même colonne ne s'intersectent pas, mais deux droites issues d'une ligne et d'une colonne différentes s'intersectent.

Enfin, Schläfli rappelle que

> « By means of the double-sixes we arrive, as already noticed, at an easy survey of the 27 lines [...] of the [surface] »,

puis représente un double-six de façon plus abstraite :

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, & b_6 \end{pmatrix}.$$

Avec les règles d'incidence données précédemment (deux droites s'intersectent si, et seulement, si elles ne sont ni sur la même ligne ni sur la même colonne), les droites a_1 et b_2 se rencontrent et

8. Coquille de l'article, où il est écrit « $p' = \alpha' r + \beta' s + \gamma' t$ » et « $p'' = \alpha'' r + \beta'' s + \gamma'' t$ ».

9. La notation de Schläfli $\sum \kappa r$ désigne simplement la quantité $\kappa r + \kappa r' + \kappa r''$.

forment donc les côtés d'un triangle dont le troisième côté est une droite de la surface notée c_{12}. Schläfli trouve donc quinze droites $c_{12}, \ldots, c_{56}$ telles que chacune n'intersecte parmi les droites a et b que celles dont les indices correspondent (par exemple, c_{12} ne rencontre que a_1, a_2, b_1 et b_2), et deux droites c se rencontrent lorsque leurs indices n'ont pas de chiffre en commun, et seulement dans ce cas-là.

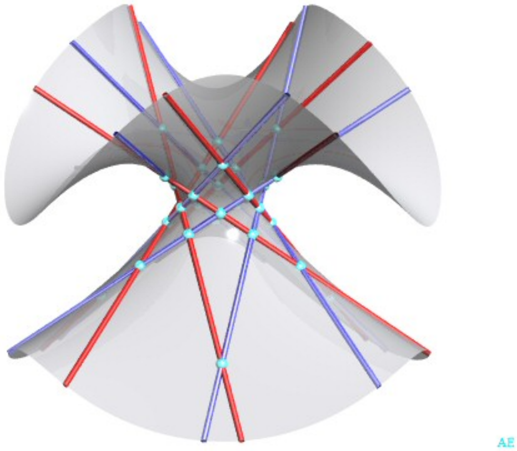

Figure 4.1 – Représentation d'un double-six
Source : `http://www.mathcurve.com`

C'est à cette notation avec les symboles a, b et c, où les droites a et b forment un double-six, que réfèrent se Henderson et d'autres mathématiciens lorsqu'ils évoquent la notation de Schläfli. On notera que cette dernière n'est pas unique, puisqu'elle dépend du choix d'un double-six parmi les trente-six qui existent.

4.3 Réception de la notation de Schläfli

Nous essayons dans cette section de mesurer la réception du système de notation de Schläfli par différents mathématiciens. Pour cela, nous procédons en deux temps : nous relevons d'abord les commentaires directs sur la notation, puis, dans le but de voir si celle de Schläfli a été adoptée, nous examinons des articles où une certaine notation des vingt-sept droites est utilisée. Afin de délimiter un corpus dans lequel chercher de telles informations, nous nous sommes basés sur l'analyse que nous avons faite de l'*Encyklopädie*, du *Jahrbuch* et du *Twenty-seven Lines* de Henderson au chapitre 1. Nous avons complété avec les ouvrages plus récents qui ont été évoqués au chapitre 3.

4.3.1 Les commentaires

Nous trouvons le premier commentaire sur la notation de Schläfli dans le traité de géométrie dans l'espace de Salmon [10] publié en 1862. Salmon fait ce commentaire juste après avoir exposé son propre système de notation :

10. [Salmon 1862].

> « Prof. Schläfli has made a new arrangement of the lines [...] which leads to a simpler notation, and gives a clearer conception of how they lie. »

Salmon expose ensuite cette notation, en faisant notamment le lien avec la sienne. En 1869, dans son long mémoire sur les surfaces cubiques [11], Cayley fait quelques remarques sur la notation des vingt-sept droites d'une surface cubique. Il commence par expliquer que l'existence d'un système de notation unique est à exclure à cause de la grande complexité de la symétrie de la configuration des droites, et que, par conséquent, toute notation ne peut être obtenue qu'en partant d'un arrangement non unique. Il poursuit en évoquant sa notation, puis celles de Hart et de Schläfli :

> « [The notation] of Dr. Hart [...] is a singularly elegant one, and will be presently reproduced. But the most convenient one is Schläfli's, starting from a double-sixer ».

Cayley montre ensuite comment faire correspondre la notation de Schläfli avec la sienne d'une part, et avec celle de Hart d'autre part. À plusieurs endroits de son livre, Henderson [12] commente le système de notation de Schläfli, à chaque fois en termes élogieux. Il la qualifie ainsi de « epoch-making » et affirme qu'elle est bien supérieure à celle de Salmon. Une phrase résume bien son point de vue :

> « The notation derived [from a double six] is the simpliest and most convenient that has yet been discovered for the twenty-seven lines ».

Salmon, Cayley et Henderson reconnaissent donc explicitement l'efficacité de la notation de Schläfli. En particulier, ils ne semblent pas considérer que le choix initial d'un double-six est un problème. Au contraire, Cayley pense qu'un tel choix est inhérent à la configuration des vingt-sept droites.

Au sujet de cette question d'unicité, Henderson fait référence à un article de 1894 de Henry Martyn Taylor [13], qui trouve une notation indépendante de tout choix initial, démentant ainsi les propos de Cayley. Dans le préambule de son article, Taylor rappelle le commentaire de Cayley sur le problème de la notation (cf. 4.1.2) puis commente :

> « Schläfli has discovered a notation of great merit which affords a powerful method of dealing with the twenty-seven lines ; it is based upon the selection of some twelve of the lines which form a "double-six". »

Taylor annonce alors que le but de son article est de trouver une notation indépendante d'un choix initial quelconque. Henderson estime cependant que cette notation ne peut s'agir d'une amélioration par rapport à celle de Schläfli.

Citons encore J.S. Frame [14], qui propose en 1938 (soit 80 années après l'article de Schläfli) une notation des vingt-sept droites dont il précise qu'elle permet de trouver les relations d'incidence entre les droites de façon extrêmement simple. Ainsi, en parlant de sa propre notation, il écrit :

> « For this reason it has some advantages over the commonly used double-six notation devised by Schläfli. »

11. [Cayley 1869].
12. [Henderson 1911].
13. [Taylor 1894].
14. [Frame 1938].

Frame considère donc que son système de notation [15] surpasse par sa plus grande clarté celui, usuel, de Schläfli.

On peut ainsi voir une certaine gradation dans tous ces commentaires, allant au fil du temps de l'éloge à la remise en question. Cependant, il serait imprudent de voir dans cette gradation une tendance générale. En effet, nous n'avons relevé ici que des commentaires directs tous isolés de leur contexte historique ; aussi la réserve de Frame n'est-elle peut-être pas représentative de l'avis de ses contemporains. D'autre part, le recensement de commentaires explicite n'est pas (et probablement, ne peut pas) être le seul moyen de mesurer la réception du système de Schläfli car il ne permet de repérer que des avis personnels expressément formulés dans des textes mathématiques. C'est pourquoi nous complétons notre approche par une recherche d'utilisations de notations. Cela montrera si la notation de Schläfli a été utilisée dans les travaux sur les surfaces cubiques ou non, indiquant ainsi l'adhésion ou le rejet du système de Schläfli de la part des différents auteurs.

4.3.2 Utilisations de notations

Dans son article de 1858 où la notation du double-six est présentée, Schläfli tente de répondre à la question de réalité des droites. Pour cela, il n'utilise pas la notation du double-six, mais l'autre proposée dans l'article : $\overline{ux}, \ldots, \ell, \ldots, r''$. D'ailleurs, dans un article [16] de 1863 où il reprend et complète les questions de réalité, Schläfli utilisera à nouveau cette notation pour mener ses raisonnements. Le fait que Schläfli lui-même n'utilise pas sa notation basée sur le double-six peut être troublant au premier abord. Cela s'explique peut-être de la façon suivante : la notation du double-six est une notation synthétique, qui a l'avantage d'être claire en ce qui concerne les relations d'incidence entre les vingt-sept droites. Mais les symboles qui la constituent ne réfèrent à aucun système de coordonnées, et *a fortiori* à aucune équation. Or, les questions de réalité sont traitées de façon analytique par Schläfli grâce aux équations de droites et plans données non pas par la notation du double-six, mais par celle exposée en premier : $\overline{ux}, \ldots, \ell, \ldots, r''$.

Toujours en 1863, Schröter [17] retrouve par d'autres moyens le double-six de Schläfli et adopte une notation similaire : la seule différence est que les droites c_{ij} de Schläfli sont notées g_{ij}. Schroter est d'ailleurs cité par Clebsch [18] en 1866, dans un article où celui-ci fait le lien entre sa représentation de la surface cubique sur le plan (voir le paragraphe 1.3.2) et le double-six de Schläfli, sans pour autant utiliser la notation correspondante.

Dans son mémoire sur les surfaces cubiques de 1868, Cremona relie lui aussi le double-six de Schläfli et l'application de Clebsch, en utilisant cette fois la notation de Schläfli. Il montre ainsi que les droites notées $a_1, \ldots, a_6$ sont les droites au-dessus des points fondamentaux $A_1, \ldots, A_6$, que les droites $b_1, \ldots, b_6$ sont les droites au-dessus des coniques passant par cinq des six points fondamentaux, et que les droites $c_{12}, \ldots, c_{56}$ sont celles au-dessus des droites joignant deux à deux les A_i (cf. 1.3.2). On voit ici que le système de notation de Schläfli s'adapte naturellement

15. Frame montre que les vingt-sept droites d'une surface cubique sont en correspondance biunivoque avec les vingt-sept triplets $(0, b, c)$, $(a, 0, c)$, $(a, b, 0)$ avec $a, b, c \in \{1, \omega, \overline{\omega}\}$, où $0, 1, \omega, \overline{\omega}$ sont les racines de la congruence $u^4 \equiv u \mod 2$. Les relations d'incidence sont données comme suit : deux droites qui se rencontrent correspondent à deux triplets ayant une et une seule coordonnée en commun.

16. [Schläfli 1863].

17. [Schröter 1863].

18. [Clebsch 1866].

à la description des surfaces cubiques donnée par l'application de Clebsch. On pourra également noter que dans les ouvrages plus récents de géométrie, où les vingt-sept droites sont trouvées de cette façon, la notation de Schläfli est systématiquement adoptée [19].

En 1869, Jordan publie deux articles [20] sur l'équation aux vingt-sept droites. Il y note les droites $a, b, \ldots, u, m', \ldots, u'$ avant de donner la liste des quarante-cinq plans tangents triples suivant les trois droites qui les définissent — il énonce ainsi les règles d'incidence entre les droites. Dans un article [21] de 1870 sur le même thème, Jordan utilise encore une autre notation : il note d'abord les plans tangents triples avec les nombres $1, 2, \ldots, 45$, puis il note une droite par les cinq nombres correspondant aux cinq plans tangents triples qui la contiennent. Jordan ne justifie pas ses choix de notation. Il est difficile de comprendre pourquoi il introduit sa propre notation, qui paraît nettement moins symétrique que celle de Schläfli, d'autant plus que des auteurs plus récents comme Élie Cartan en 1946 et Hartshorne en 1977 [22] utilisent celle-ci pour des questions relatives au groupe des vingt-sept droites, similaires à celles de Jordan.

La notation de Schläfli est utilisée par Cayley dans son mémoire de 1869 et dans un article de 1873 [23]. Dans la première de ces deux références et dans une partie de la seconde, il modifie toutefois légèrement la notation, en nommant le double-six de base de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 1', & 2', & 3', & 4', & 5', & 6' \end{pmatrix}.$$

Dans l'article de 1873, Cayley trouve en particulier des équations pour les droites a et b afin de créer un modèle concret des vingt-sept droites. Il décrit également un modèle de Christian Wiener où les droites a, b et c sont en bleu, jaune et rouge respectivement. La question du modèle est aussi traitée par Henderson en 1911 grâce à la notation de Schläfli. D'ailleurs, Henderson utilise celle-ci tout au long de son livre pour trouver des propriétés géométriques associées aux vingt-sept droites [24].

En 1895 est publié dans les *Nouvelles annales de mathématiques* un article de Maurice d'Ocagne [25] consacré à la résolution d'un problème donné au concours d'admission à l'École Polytechnique. Le problème est de déterminer les vingt-sept droites d'une surface cubique définie comme un certain lieu de points. D'Ocagne utilise la notation de Schläfli — qu'il attribue cependant à Cremona — en exploitant les relations entre les droites a, b et c afin de résoudre le problème. Les *Nouvelles annales* étant destinées aux étudiants et aux enseignants, l'exemple de l'article de D'Ocagne montre que le système de Schläfli n'est pas utilisé uniquement dans les articles de recherche ; au contraire, il est appliqué « sur le terrain » à des questions destinées à un public de non-spécialistes.

Nous voyons donc que l'utilisation de la notation de Schläfli n'est pas systématique. Certains auteurs font le choix d'une autre notation ; peut-être est-ce parce que celle de Schläfli n'est pas

19. Par exemple [Godeaux 1946 ; Hartshorne 1977 ; Semple & Roth 1986].
20. [Jordan 1869a,b].
21. [Jordan 1870].
22. [Cartan 1946 ; Hartshorne 1977].
23. [Cayley 1869, 1873].
24. Par exemple, Henderson montre de manière géométrique qu'il existe 120 paires triédrales, une paire triédrale étant un ensemble de six plans d'équations respectives $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 0$ et $\zeta = 0$ tels que l'équation de la surface peut s'écrire $uvw - \xi\eta\zeta = 0$.
25. [d'Ocagne 1895].

adaptée à toutes les situations. D'autres l'utilisent afin de résoudre des questions relatives aux surfaces cubiques. Enfin, elle est utilisée également pour nommer les droites obtenues *via* la représentation des surfaces par l'application de Clebsch. Dans ces deux derniers cas, l'utilisation de la notation de Schläfli peut s'interpréter comme un assentiment tacite son efficacité.

4.4 Conclusion

L'article de 1858 de Schläfli se situe dans la continuité des travaux de Cayley et de Salmon, comme le montre la proximité de ses raisonnements avec ceux de Cayley. Ainsi, et bien qu'il ne l'indique pas, tout laisse à penser que Schläfli a lu les articles de Cayley et de Salmon sur les droites d'une surface cubique, et en particulier le commentaire de Cayley sur le problème de la notation. En affirmant que :

> « By means of the double-sixes we arrive at an easy survey of the 27 lines [...] of the [surface] »,

Schläfli apporte ainsi ce qu'on peut interpréter comme une réponse à la question de la notation laissée en suspens en 1849. On pourra d'ailleurs remarquer que Cayley lui-même ne propose pas de notation entre 1849 et 1858.

L'éloge de la notation de Schläfli de la part de Henderson a été une des motivations de ce chapitre. L'examen des commentaires et des utilisations de cette notation permet de le nuancer quelque peu. Parmi les mathématiciens que nous avons relevés dans la section 4.3, la plupart louent et utilisent le système de Schläfli dans leurs travaux, mais certains, dont Schläfli lui-même, lui en préfèrent d'autres suivant les occasions. On peut donc penser que cette notation, si utile soit-elle pour comprendre de façon synthétique la configuration des droites, n'est pas adaptée à certains problèmes. Une autre de ses faiblesses, selon certains auteurs sus-cités qui essaieront d'y remédier en proposant d'autres notations, est que, dépendant du choix initial d'un double-six, elle n'est pas canonique.

Dans son ouvrage de 1929 sur l'histoire des notations mathématiques, Florian Cajori consacre un paragraphe aux vingt-sept droites des surfaces cubiques [26]. Son affirmation :

> « The notation most generally adopted is that of the "double-six", due to L. Schläfli, of Bern. »

n'est pas démentie par l'examen des ouvrages postérieurs à 1929 que nous avons mené : les géomètres algébristes contemporains semblent adopter le système de Schläfli, surtout en raison du lien étroit qu'il entretient avec la réalisation des surfaces cubiques comme éclatement du plan projectif en six points fondamentaux, réalisation permettant par ailleurs de mettre en évidence les relations d'incidence entre les droites. Ainsi, bien qu'on ait pu lui reprocher de ne pas être canonique ou de ne pas être assez claire, on voit finalement que la notation de Schläfli s'est imposée dans de nombreuses situations.

26. [Cajori 1929]. L'auteur y explique la notation de Hart (cf. chapitre 2), évoque sans la détailler celle de Salmon puis décrit celle de Schläfli.

Conclusion

Pour ce mémoire, nous nous étions fixé l'objectif d'étudier de façon historique le théorème des vingt-sept droites. L'examen de l'*Encyklopädie*, du *Jahrbuch* et du *Twenty-seven Lines* de Henderson a rapidement révélé de nombreux thèmes connexes au sujet des vingt-sept droites — construction de modèles concrets, application de Clebsch, courbes quartiques planes, théorie des groupes et analyse, etc. — que nous avons structurés en trois catégories : problèmes de compréhension de la configuration des droites et de visualisation des surfaces cubiques, procédés de réalisation de ces surfaces, parenté du théorème des vingt-sept droites avec d'autres domaines mathématiques. Nous avons ainsi dégagé différents courants de recherche dont nous avons établi qu'ils possédaient chacun un développement propre. Nous avons également constaté que l'*Encyklopädie* ainsi que le *Twenty-seven Lines* considèrent 1849 comme une année fondamentale dans le développement du sujet des vingt-sept droites. C'est en effet l'année durant laquelle sont publiés les deux articles conjoints de Cayley et de Salmon qui, d'après ces sources, sont les premiers à traiter du résultat d'existence des vingt-sept droites, résultat par ailleurs développé dans une correspondance entre les deux mathématiciens britanniques. De l'analyse de ces articles ont émergé plusieurs sujets relatifs au problème des vingt-sept droites que l'on avait déjà remarqués dans l'*Encyklopädie*. Parmi ces sujets se trouvent des questions laissées en suspens par Cayley, dont deux ont retenu notre attention : la lacune dans une des démonstrations de Cayley et le problème de la notation des droites. L'étude de la première a mis en évidence deux arguments clés — le paramétrage des droites de l'espace et le principe de dénombrement des constantes — dont nous avons pu constater le devenir à défaut d'en suivre précisément l'évolution. Quant à la seconde question, elle s'est ouverte sur l'étude de la réception d'un résultat mathématique, ici la notation de Schläfli.

Le travail que nous avons mené dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre plus général de l'écriture de « l'histoire d'un théorème ». À ce sujet, nous empruntons en partie à Catherine Goldstein [1] les réflexions qui suivent. Comment décrire historiquement un théorème ? Comment délimiter le champ d'étude : faut-il prendre en compte tout ce qui touche de près ou de loin au théorème, ou seulement une partie restreinte ? Quels sont les critères à prendre en compte pour pouvoir inscrire un théorème dans une chronologie mathématique ? Où commencer, et où finir ? Ces interrogations reflètent la complexité de l'écriture l'histoire d'un théorème, ou plutôt de l'écriture d'*une* histoire d'un théorème : selon les axes privilégiés par l'historien — et celui-ci, de par ses objectifs, sa formation ou ses influences, en privilégie nécessairement —, il s'agit bien de l'écriture d'une histoire particulière. Nous ne prétendons pas avoir écrit dans ce mémoire une histoire du théorème des vingt-sept droites, bien que nous pensons que certains des éléments que nous avons étudiés ou simplement évoqués pourraient y contribuer : contexte et présupposés

1. Voir [Goldstein 1992, 1995].

géométriques, démonstrations diverses, arguments clés, descendance et ramification thématique. Si l'on voulait poursuivre notre travail en essayant d'écrire une histoire du théorème des vingt-sept droites, une des difficultés serait sans doute la délimitation du champ d'étude. Cette délimitation serait à considérer suivant deux directions : chronologique et thématique. Voyons cela plus en détails avant de clore ce mémoire.

Du point de vue chronologique, nous nous posons surtout la question du début de l'histoire de notre théorème. Comme nous l'avons déjà rappelé, l'*Encyklopädie* et le *Twenty-seven Lines* affirment que le théorème est apparu dans une correspondance entre Cayley et Salmon et que les résultats qui en sont issus ont été publiés en 1849. Nous n'avons certes pas vérifié cette information, mais aucune des sources primaires ou secondaires que nous avons consultées durant notre travail ne nous permet de la mettre en doute [2]. Il faut alors essayer de voir où faire commencer l'histoire du théorème : quelle place accorder au contexte mathématique d'alors ? Quels sont résultats antérieurs à prendre en compte dans cette histoire [3] ? Quelles étaient les motivations de Cayley et de Salmon ? Des éléments de réponse à ces questions pourraient probablement être apportés par la correspondance entre les deux mathématiciens britanniques que nous n'avons malheureusement pas pu retrouver lors de notre travail sur ce mémoire [4].

Enfin, revenons sur la question de la délimitation thématique du champ d'étude. Cette question nous paraît d'autant plus importante que nous avons constaté à deux reprises — dans l'*Encyklopädie* et à travers notre recherche Internet introductive — cette grande ramification thématique autour du théorème des vingt-sept droites déjà évoquée plusieurs fois. Il s'agit donc de se demander à quel point prendre en compte les nombreux thèmes connexes au sujet des vingt-sept droites. La réponse est sans doute relative aux choix de celui qui étudie le théorème ; on pourrait par exemple imaginer ne s'intéresser qu'aux surfaces algébriques de degré trois ou qu'au sujet de droites tracées sur des surfaces. Pour notre part, nous pensons que les thèmes en rapport avec le théorème des vingt-sept droites sont trop étroitement liés à celui-ci pour pouvoir les exclure de son histoire. Et nous estimons même que c'est à travers ces thèmes que s'exprime pleinement la richesse du théorème. Aussi pensons-nous que la matière nécessaire à une histoire du théorème ne saurait se réduire à un voisinage trop restreint du théorème lui-même et devrait inclure les articulations de ces thèmes avec le théorème, mais aussi entre eux. Resterait alors à appréhender les dynamiques globales de l'ensemble « théorème – thèmes connexes » afin de mieux comprendre historiquement le théorème des vingt-sept droites sur les surfaces cubiques.

2. On gardera toutefois à l'esprit qu'un léger flou puisse subsister. Pour voir un exemple où l'historiographie classique d'un sujet a été réévaluée, on pourra consulter [Gilain 1991], où Christian Gilain montre que l'histoire usuelle du théorème fondamental de l'algèbre est sujette à discussion.

3. Rappelons qu'il a été vu au chapitre 1 que l'*Encyklopädie* et le *Twenty-seven Lines* proposaient deux préhistoires différentes. Cela souligne l'importance de réfléchir à cette question.

4. Hourya Sinaceur souligne dans l'avant-propos de [Sinaceur 1999] la nécessité de revenir aux textes originaux, qui contiennent « toutes les identités que le “progrès” efface : identité d'un contexte, d'un objectif, d'une perspective, d'un langage ».

Annexe A

Résultats du *Jahrbuch*

Cette annexe présente les articles et livres recensés par le *Jahrbuch*. Ont été sélectionnés parmi les ouvrages dont le titre contient l'expression « surface cubique », ceux dont le titre fait explicitement référence aux vingt-sept droites. Cela inclut par exemple les articles dont le titre évoque les double-six.

1. Arthur Cayley. « On the Double-sixers of a Cubic Surface ». *The Quarterly Journal of Mathematics*, 10 : 58-71, 1869.
2. Camille Jordan. « Sur la trisection des fonctions abéliennes et sur les vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre ». *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 68 : 865-869, 1869.
3. Camille Jordan. « Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré ». *Journal de Liouville*, 14 : 147-166, 1869.
4. Luigi Cremona. « Sulle 27 rette di una superficie del 3° ordine ». *Rendiconti Instituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere*, 3, 1870.
5. Camille Jordan. « Sur une nouvelle combinaison des vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre ». *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 70 : 326-328, 1870.
6. Arthur Cayley. « On Dr. Wiener's Model of a Cubic Surface with 27 real lines ; and on the Construction of a Double-sixer ». *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 12 : 366-383, 1873.
7. Persival Frost. « On the Twenty-seven Lines, the Forty-five Triple Tangent Planes and the Thirty-six Double Sixers of a Cubic Surface, with a Hint for the Construction of Models which give the Position of the Lines, when they are all Real ». *The Quarterly Journal of Mathematics*, 18 : 89-96, 1882.
8. Felix Klein. « Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique ». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 4 : 169-175, 1888.
9. Richmond. « A Symmetrical System of Equations of the Lines on a Cubic Surface, which has a Conical Point ». *The Quarterly Journal of Mathematics*, 23 : 170-179, 1888.

10. Henry Martyn Taylor. « On a Graphical Representation of the Twenty-seven Lines on a Cubic Surface (Abstract) ». *Proceedings of the Royal Society of London*, 54 : 148-149, 1893.

11. Henry Martyn Taylor. « On a Special Form of the General Equation of a Cubic Surface and on a Diagram Representing the Twenty-seven Lines on the Surface ». *Philosophical Trasactions of the Royal Society of London*, 185 : 37-69, 1894.

12. H. M. Blythe. « On the Construction of a Model of 27 Straight Lines upon the Cubic Surface ». *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 8 : 241-248, 1895.

13. Henry Martyn Taylor. « On the Construction of a Model Showing the 27 Lines on Cubic Surfaces ». *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 18 : 375-379, 1900.

14. Leonard Eugene Dickson. « The configuration of the 27 Lines on a Cubic Surface and the 28 Bitangents to a Quartic Curve ». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8 : 63-70, 1901.

15. Leonard Eugene Dickson. « A Class Group in an Arbitrary Realm Connected with the Configuration of the 27 Lines on a Cubic Surface ». *The Quarterly Journal of Mathematics*, 33 : 145-173, 1902.

16. Edward Kasner. « The Double-six Configuration Connected with the Cubic Surface an a Related Group of Cremona Transfomation ». *American Journal of Mathematics*, 25 : 107-122, 1903.

17. Leonard Eugene Dickson. « A Class Group in an Arbitrary Realm Connected with the Configuration of the 27 Lines on a Cubic Surface (Second Paper) ». « A Class Group in an Arbitrary Realm Connected with the Configuration of the 27 Lines on a Cubic Surface ». *The Quarterly Journal of Mathematics*, 39 : 205-209, 1907.

18. William Burnside. « On the Group of the Twenty-seven Lines of a Cubic Surface ». *The Quarterly Journal of Mathematics*, 40 : 246-250, 1908.

19. Arthur Bayron Coble. « A Configuration in Finite Geometry Isomorphic with that of the Twenty-seven Lines of a Cubic Surface ». *Johns Hopkins university Circular*, 208 : 80-88, 1908.

20. Arthur Bayron Coble. « The Lines and Triple Tangent Planes of a cubic Surface ». *Johns Hopkins university Circular*, 59-63, 1911.

21. Archibald Henderson. « The Twenty-seven Lines upon the Cubic Surface ». New-York : Hafner publishing Co., 1911.

22. Geoffrey Benett. « The System of Lines of a Cubic Surface ». *Proceedings of the Royal Society of London*, 11 : 285-311, 1912.

23. William Proctor Milne. « A Method of Establishing the 27-line Configruation of a Cubic Surface ». *Proceedings of the Rpyal Society of London*, 22 : 8-10, 1915.

24. Arthur Bayron Coble. « The Determination od the Lines in the Cubic Surface ». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 22 : 8-10, 1915.

25. J. F. Tinto. « On a Group of Tranformations Connected with the 27 Lines of the Non-sinular Cubic Surface ». *Proceedingsof the Edinburgh Mathematical Society*, 36 : 17-21, 1918.

26. D. V. Steed. « The Hypersapce Generalization of the Lines in the Cubic Surface ». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27 : 413, 1921.

27. D. V. Steed. « The Hyperspace Generalization of the Lines in the Cubic Surface ». *California University Publication Series*, 20 : 425-443, 1924.

28. V. Steed. « On a System of Equations Connected with the Lines on the Cubic Surface ». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30 : 14-15, 1924.

29. Alfred Cardew Dixon. « On the Lines on a Cubic Surface, Schur Quadrics and Quadrics through Six of the Lines ». *Journal of the London Mathematical Society*, 1 : 170-175, 1926.

30. H. L. Black. « A Cremona Group Isomorphic with the Group of the Twenty-seven Lines on a Cubic Surface ». *Annals of Mathematics*, 28 : 433-450, 1927.

31. S. Bishara. « On a Double-six whose Cubic Surface and Cubic Enveloppe are Apolar ». *Journal of the London Mathematical Society*, 5 : 196-199, 1930.

32. S. Bishara. « Double sixers whose Cubic Surface and Cubic Enveloppe are Apolar ». *Journal of the London Mathematical Society*, 8 : 178, 1933.

33. Henry Seely White. « Cross-points of Lines on a Cubic Surface ». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 42 : 41, 1936.

34. V. C. Morton. « the Triple Tangent Planes of a Cubic Surface ». *The Quarterly Journal of Mathematics(Oxford Series)*, 8 : 238-240, 1937.

35. J. S. Frame. « A Symmetric representation of the 27 Lines on a cubic Surface by Lines in a Finite Geometry ». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 44 : 658-661, 1938.

36. Harold Scott MacDonald Coxeter. « The Polytope 2_{21}, whose 27 vertices correspond to the Lines on the General Cubic Surface ». *American Journal of Mathematics*, 62 : 457-486, 1940.

Annexe B

Existence d'une droite sur les surfaces cubiques

La preuve de l'existence des vingt-sept droites proposée dans cette annexe est inspirée de [Shafarevich 1988] et de [Mumford 1976]. Nous avertissons le lecteur que certains détails seront omis, l'objectif de cette annexe étant essentiellement de comprendre l'idée de la preuve de l'existence d'une droite sur chaque surface de degré trois.

B.1 Paramétrage des droites et des surfaces cubiques

On commence par paramétrer les surfaces cubiques de $\mathbb{P}^3$ de la façon suivante : on note H_3 l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ homogènes et de degré 3, c'est un espace vectoriel de dimension 20. Alors l'ensemble des surfaces cubiques de $\mathbb{P}^3$ s'identifie naturellement à $\mathbb{P}(H_3) = \mathbb{P}^{19}$. Ainsi, l'ensemble des surfaces cubiques est un espace projectif de dimension 19.

Pour les droites, la situation est un peu plus compliquée. Étant donnée une droite ℓ de $\mathbb{P}^3$, et deux points distincts $a = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$, $b = (b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$ lui appartenant, les quantités $p_{ij} = a_ib_j = a_jb_i$ $(0 \leqslant i < j \leqslant 3)$ sont indépendantes du choix de a et b, à multiplication par un scalaire non nul près. Ce sont les *coordonnées plückériennes* de ℓ. On vérifie qu'elles satisfont la relation $p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$, et réciproquement, si un sextuplet $(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23})$ vérifie cette relation, alors il définit une droite de $\mathbb{P}^3$. L'ensemble des droites de $\mathbb{P}^3$ s'identifie donc à $G = \{(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23}) \in \mathbb{P}^5, p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0\}$. Cet ensemble G est une sous-variété projective de $\mathbb{P}^5$ lisse, irréductible et de dimension 4 ; c'est la *grassmannienne*.

B.2 Démonstration de l'existence de droites sur les surfaces cubiques

B.2.1 Deux théorèmes utiles pour la suite

Nous ne faisons qu'énoncer deux théorèmes que l'on utilisera dans le prochain paragraphe. Le lecteur pourra en trouver la démonstration dans [Shafarevich 1988], ainsi que les définitions utiles.

Théorème 1 *Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif entre variétés projectives irréductibles. Alors* $\dim X \leqslant \dim Y$ *et*

1. *Pour tout $y \in Y$ et pour toute composante F de $f^{-1}(y)$, on a* $\dim F \geqslant \dim X - \dim Y$.
2. *Il existe un ouvert non vide U de Y tel que pour tout $y \in U$,* $\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$.

On pourra remarquer que ce théorème est une version « morphisme » du principe de dénombrement des constantes tel que l'énonce Zariski par exemple (voir chapitre 3). Un corollaire est le théorème suivant :

Théorème 2 *Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif entre variétés projectives. On suppose que Y est irréductible et que toutes les fibres $f^{-1}(y)$ sont irréductibles et de même dimension. Alors X est irréductible.*

B.2.2 La démonstration

Lemme 1 *L'ensemble $\Gamma = \{(\ell, S) \in G \times \mathbb{P}(H_3), \ell \subset S\}$ est une sous-variété de $G \times \mathbb{P}(H_3)$, appelée sous-variété d'incidence.*

Preuve : On regarde dans le morceau affine correspondant à $p_{01} \neq 0$, et on y considère la droite ℓ passant par les points $(1 : 0 : a_2 : a_3)$ et $(0 : 1 : b_2 : b_3)$. On note S une surface cubique, définie par un polynôme $F = \sum_{|\alpha|=3} c_\alpha X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3}$. Alors on a

$$\ell \subset S \iff \forall (s,t), \quad \sum c_\alpha s^{\alpha_0} t^{\alpha_1} (sa_2 + tb_2)^{\alpha_2} (sa_3 + tb_3)^{\alpha_3} = 0.$$

On réorganise la somme du membre de droite suivant les puissances de s et t de la façon suivante : $s^3 f_0(a,b,c) + s^2 t f_1(a,b,c) + st^2 f_2(a,b,c) + t^3 f_3(a,b,c)$, où les f_i sont des polynômes homogènes en a_2, a_3, b_2, b_3 et en les c_α. Ainsi on a

$$\ell \subset S \iff \forall i \in [\![0,3]\!], \quad f_i(a,b,c) = 0.$$

Les conditions qu'on obtient sont polynômiales et homogènes en les coefficients de ℓ et de S, ce qui montre le résultat. □

Lemme 2 *La variété d'incidence Γ est irréductible et de dimension* 19.

Preuve : On va utiliser la projection $\psi : \Gamma \to G$. Le fait que φ soit surjective est clair : cela signifie que pour toute droite, on peut trouver une surface cubique la contenant (penser aux cônes de degré trois). On regarde maintenant les fibres $\psi^{-1}(\ell)$. On suppose que ℓ est donnée par les équations $x_0 = x_1 = 0$. Alors une surface d'équation $F = 0$ la contient si, et seulement, si F est de la forme $F = X_0 G + X_1 H$, où G et H sont des polynômes homogènes de degré 2. Cela montre que $\psi^{-1}(\ell)$ est un sous-espace linéaire de $\mathbb{P}(H_3)$ de dimension $20 - 4 - 1 = 15$. Toutes les fibres $\psi^{-1}(\ell)$ sont donc irréductibles et de même dimension. Par le théorème 2, Γ est irréductible, ce qui permet d'appliquer le théorème 1 et d'en conclure que la dimension de Γ est effectivement 19. □

On est maintenant en mesure de prouver l'existence de droites sur toute surface cubique. On regarde la surface d'équation $X_0 X_1 X_2 = X_3^3$: on vérifie aisément que sa partie affine ne contient aucune droite et que sa partie située à l'infini est formée de trois droites. On a donc trouvé une surface S telle que $\varphi^{-1}(S)$ soit finie et non vide, c'est-à-dire de dimension 0, où φ désigne la projection $\Gamma \to \mathbb{P}(H_3)$. D'après le théorème 1, on a nécessairement $\dim \varphi(\Gamma) = 19$. Donc $\varphi(\Gamma) = \mathbb{P}(H_3)$, ce qui signifie exactement que toute surface cubique contient une droite.

Annexe C

Quelques représentations de surfaces cubiques

Toutes les représentations de surfaces cubiques présentes dans cette annexe sont tirées du site `http://www.cubics.algebraicsurface.net` qui en contient beaucoup d'autres, ainsi que des vidéos montrant des déformations des surfaces cubiques. On pourra également consulter les sites `http://www.mathcurve.com` et `http://www.madore.org/~david` pour voir d'autres représentations de surfaces cubiques avec leurs droites.

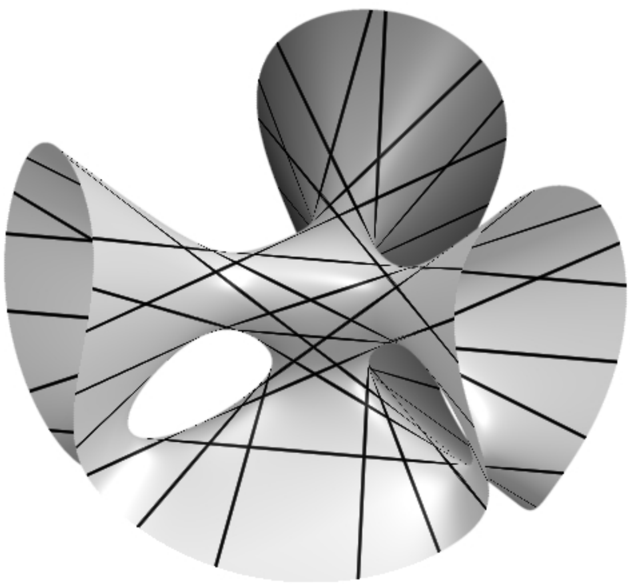

FIGURE C.1 – La surface diagonale de Clebsch

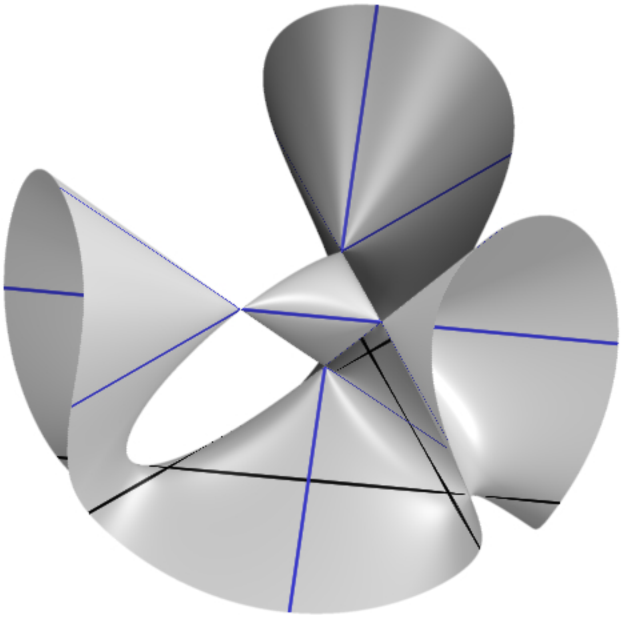

Figure C.2 – La surface de Cayley

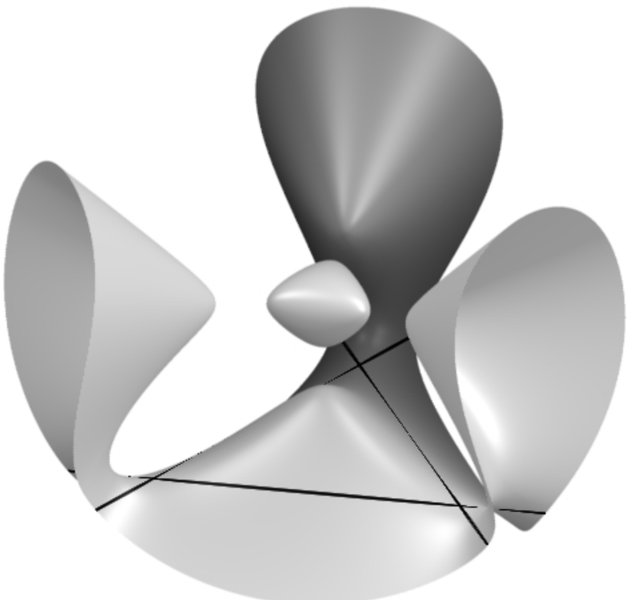

Figure C.3 – Une autre surface cubique lisse

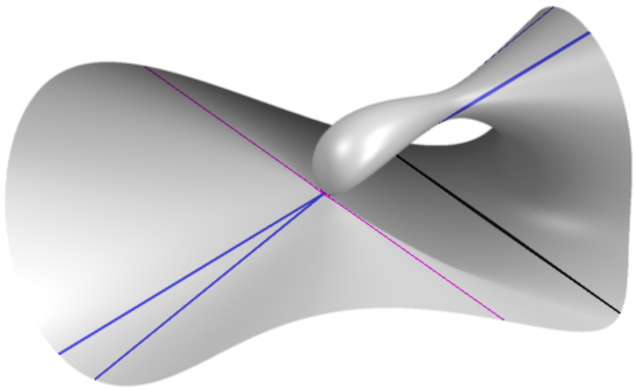

Figure C.4 – Une surface cubique avec une singularité

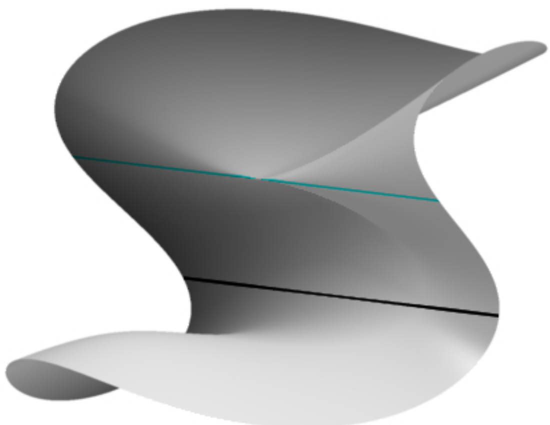

Figure C.5 – Une autre surface cubique avec une singularité

Bibliographie

Baker Henry Frederick. 1923. *Principles of Geometry.* Vol. 3. Cambridge : Cambridge University Press.

Beauville Arnaud. 1978. « Surfaces algébriques complexes ». *Astérisque*, **54**.

Cajori Florian. 1929. *A Hitsory of Mathematical Notations.* Vol. ii : Notations mainly in Higher Mathematics. Chicago : The Open Court Publishing Company.

Cartan Élie. 1946. « Quelques remarques sur les 28 bitangentes d'une quartique plane et les 27 droites d'une surface cubique ». *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **70**, 42–45.

Cayley Arthur. 1847. « Recherches sur l'élimination, et sur la théorie des courbes ». *Journal für die reine une angewandte Mathematik*, **34**, 30–45.

Cayley Arthur. 1849. « On the Triple Tangent Planes of Surfaces of Third Order ». *The Cambridge and Dublin mathematical journal*, **4**, 118–132.

Cayley Arthur. 1869. « A Memoir on Cubic Surfaces ». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **159**, 231–326.

Cayley Arthur. 1873. « On Dr. Wiener's Model of a Cubic Surface with 27 real lines ; and on the Construction of a Double-sixer ». *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **12**, 366–383.

Clebsch Alfred. 1866. « Die Geometrie auf den Flächen dritten Ordnung ». *Journal für die reine une angewandte Mathematik*, **66**, 359–380.

Clebsch Alfred. 1871. « Zum Gedächtnis an Julius Plücker ». *Abhandlungen der Königlischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, **16**, 1–40.

Cremona Luigi. 1868. « Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre ». *Journal für die reine une angewandte Mathematik*, **68**, 1–133.

Crilly Tony. 2006. *Arthur Cayley : mathematician laureate of the Victorian age.* Baltimore : The Johns Hopkins University Press.

De Jonquières Ernest. 1859. « Solution de la question 376 ». *Nouvelles annales de mathématiques*, **18** (1ère série), 129–138.

Dieudonné Jean. 1974. *Cours de géométrie algébrique.* Vendôme : Presses Universitaires de France.

d'Ocagne Maurice. 1895. « Solution géométrique complète de la troisième partie du problème d'admission à l'Ecole Polytechnique ». *Nouvelles annales de mathématiques*, **14** (3ème série), 339–344.

Fischer Gerd. 1986. *Mathematische Modelle.* Braunschweig : Vieweg.

Frame J. S. 1938. « A Symmetric Representation of the Twenty-seven Lines on a Cubic Surface by Lines in a Finite Geometry ». *Bulletin of the American Mathematical Society*, **44** (10), 658–661.

Geiser Karl. 1869. « Ueber die Doppeltangenten eine ebenen Curven viertens Grades ». *Mathematische Annalen*, **1**, 129–130.

Gilain Christian. 1991. « Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral ». *Archive for History of Exact Sciences*, **42**, 91–136.

Gispert Hélène. 2001. « The German and French Editions of the Klein-Molk Encyclopedia : Contrasted Images ». *In :* Bottazzini Umberto & Dalmedico Amy Dahan (eds), *Changing Images in Mathematics : from the French Revolution to the New Millennium.* London - New York : Routledge.

Godeaux Lucien. 1946. *Introduction à la Géométrie Supérieure.* 2e édition. Liège : Université de Liège.

Goldstein Catherine. 1992. « On a Seventeenth Century Version of the "Fundamental Theorem of Arithmetic" ». *Historia Mathematica*, **19**, 177–187.

Goldstein Catherine. 1995. *Un théorème de Fermat et ses lecteurs.* Saint-Denis : Presses Universitaires de Vincennes.

Gow Rod. 1997. « George Salmon 1819–1904 : his mathematical work and influence ». *Irish Mathematics Society Bulletin*, **39**, 26–76.

Gow Rod. 2006. « Life and work of George Salmon (1819–1904) ». *BSHM Bulletin : Journal for the British Society for the History of Mathematics*, **21**, 212–218.

Graf Johann Heinrich. 1896. « Ludwig Schläfli ». *Mitteilungen der Naturforschenden Gesselschaft in Bern*, 120–203.

Grassmann Hermann. 1856. « Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades, und die dadurch erzeugten Oberflächen ». *Journal für die reine une angewandte Mathematik*, **49**, 47–65.

Hartshorne Robin. 1977. *Algebraic Geometry.* New-York : Springer.

Henderson Archibald. 1911. *The Twenty-Seven Lines upon the Cubic Surface.* New-York : Hafner publishing Co.

Jordan Camille. 1869a. « Sur la trisection des fonctions abéliennes et sur les vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre ». *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences*, **68**, 865–869.

Jordan Camille. 1869b. « Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré ». *Journal für die reine une angewandte Mathematik*, **14**, 147–166.

Jordan Camille. 1870. « Sur une nouvelle combinaison des vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre ». *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences*, **70**, 326–328.

Klein Felix. 1888. « Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique ». *Journal für die reine une angewandte Mathematik*, **4**, 169–176.

Klein Felix. 1926. *Vorlesungen über höhere Geometrie.* Berlin : Springer. (Texte de 1893).

Magnus Ludwig Immanuel. 1837. *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie.* Berlin : Duncher und Humblot.

Mansion Paul. 1872. « Notice sur les Travaux de Jules Plücker ». *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, **5**, 183–212.

Meyer Wilhelm Franz. 1928. « Flächen dritter Ordnung ». *Pages 1439 – 1536 de : Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen* III.*2.2.B.* Leipzig : Teubner.

Mossbrugger Leopold. 1841. « Untersuchungen über die geometrische Bedeutung der constanten Coefficienten in den allgemeinen Gleichungen der Flächen des zweiten und dritten Grades ». *Archiv der Mathematik und Physik*, **1**, 337–360.

Mumford David. 1976. *Algebraic geometry 1 : complex projective varieties.* Berlin : Springer.

Plücker Julius. 1829. « Über die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschidenen Ordnungen haben ». *Journal für die reine une angewandte Mathematik*, **4**, 349–370.

Plücker Julius. 1846. *System der Geometrie des Raumes.* Düsseldorf : Schaub'sche Buchhandlung.

Plücker Julius. 1868. *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement.* Leipzig : Teubner.

Powell William S. 1988. *Dictionary of North Carolina Biography : Vol. 3, H-K.* Dublin : The University of North Carolina Press.

Reid Miles. 1988. *Undergraduate Algebraic Geometry.* Cambridge : Cambridge University Press.

Salmon George. 1847. « On the Degree of a Surface Reciprocal to a given one ». *The Cambridge and Dublin mathematical journal*, **2**, 65–73.

Salmon George. 1849. « On the Triple Tangent Planes to a Surface of Third Order ». *The Cambridge and Dublin mathematical journal*, **4**, 252–260.

Salmon George. 1860. « On quaternary cubics ». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **150**, 229–240.

SALMON GEORGE. 1862. *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions.* Dublin : Hodges, Smith and Co.

SAMUEL PIERRE. 1967. *Méthodes d'Algèbre Abstraite en Géométrie Algébrique.* 2e édition. Berlin Heidelberg New York : Springer. 1re édition : 1955.

SCHLÄFLI LUDWIG. 1858. « An Attempt to Determine the Twenty-seven Lines upon a Surface of the Third Order and to Divide Them into Species in Reference to the Reality of the Lines upon the Surface ». *The Quarterly Journal of Mathematics*, **2**, 55–65, 110–120.

SCHLÄFLI LUDWIG. 1863. « On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species, in reference to the presence or absence of Singular Points and the reality of their Lines ». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **153**, 193–241.

SCHRÖTER HEINRICH. 1863. « Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung ». *Journal für die reine une angewandte Mathematik*, **62**, 265–280.

SEGRE CORRADO. 1887. « Sulla varietà cubica con dieci punti dopii dello spazio a quattro dimensioni ». *Atti della Reale Accademia di Scienze di Torino*, **22**, 791–801.

SEMPLE JOHN GREENLEES & ROTH LEONARD. 1986. *Introduction to Algebraic Geometry.* Oxford : Clarendon Press.

SEVERI FRANCESCO. 1921. *Vorlesungen über algebraische Geometrie.* Leipzig : Teubner.

SHAFAREVICH IGOR. 1988. *Basic Algebraic Geometry 1.* 2e édition. Berlin Heidelberg New York : Springer. 1re édition : 1972.

SINACEUR HOURYA. 1999. *Corps et Modèles.* 2e édition. Mayenne : Mathesis. 1re édition : 1991.

STEINER JAKOB. 1856. « Ueber die Flächen dritten Grades ». *Journal für die reine une angewandte Mathematik*, **53**, 133–141.

STURM RUDOLF. 1867. *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung.* Leipzig : B. G. Teubner.

SYLVESTER JAMES. 1851. « Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre ». *The Cambridge and Dublin mathematical journal*, **6**, 199–200.

TAYLOR HENRY MARTYN. 1894. « On a Special Form of the General Equation of a Cubic Surface and on a Diagram Representing the Twenty-seven Lines on the Surface ». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **185**, 37–69.

VAN DER WAERDEN BARTEL LEENDERT. 1934. « Algebraische Korrespondenzen und rationale Abbildungen ». *Mathematische Annalen*, **110**, 134–160.

ZARISKI OSCAR. 1934. *Algebraic Surfaces.* Berlin Heidelberg New York : Springer.