Université Pierre et Marie Curie

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

François Lê

Vingt-sept droites sur une surface cubique : rencontres entre groupes, équations et géométrie dans la deuxième moitié du XIX^{e} siècle

---

dirigée par Catherine Goldstein

Soutenue le 29 juin 2015 devant le jury composé de :

Mme Caroline Ehrhardt	Université Vincennes Saint-Denis	examinatrice
Mme Catherine Goldstein	Institut de mathématiques de Jussieu-PRG	directrice
M. Jeremy Gray	The Open University	examinateur
M. Ilia Itenberg	Université Pierre et Marie Curie	examinateur
M. Norbert Schappacher	Université de Strasbourg	rapporteur
Mme Rossana Tazzioli	Université de Lille 1	rapporteure

Institut de mathématiques de Jussieu-
Paris Rive gauche. UMR 7586
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Université Pierre et Marie Curie
École doctorale de sciences
mathématiques de Paris centre
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Ich halte mich an die erste Hälfte [Ihres Buches],
wo die Geometrie mir zu Hülfe kommt, und die
Gedanken auch bei den abstracten Dingen leitet.
Hoffentlich wird auch das Verständnis des
Übrigen mir nicht immer versagt bleiben.

Alfred Clebsch à Camille Jordan, 5 mars 1871

Remerciements

Dans ces lignes où il m'est donné l'occasion de remercier les personnes qui m'ont aidé d'une façon ou d'une autre dans l'élaboration de mon travail de thèse, je voudrais commencer par exprimer toute ma gratitude envers Catherine Goldstein. Après m'avoir proposé ce beau sujet des vingt-sept droites et accepté de diriger ma thèse, elle a toujours été présente pour guider mon cheminement. Grâce à son écoute, son savoir et son conseils, j'ai pu être formé à la recherche en histoire des mathématiques et parvenir, au bout de cet exercice de quatre ans, à achever la rédaction de ce manuscrit. Ma thèse n'aurait évidemment pas la même couleur si Catherine n'avait pas été là pour m'aider, et je lui en suis infiniment reconnaissant.

Je tiens ensuite à remercier Norbert Schappacher et Rossana Tazzioli d'avoir accepté de rapporter ma thèse et, incidemment, de m'avoir communiqué leurs précieux commentaires et suggestions sur mon travail. Ma reconnaissance va également à Caroline Ehrhardt, Jeremy Gray et Ilia Itenberg qui me font le plaisir et l'honneur de faire partie de mon jury.

Les membres du projet « Histoire des sciences mathématiques » de l'Institut de mathématiques de Jussieu-Paris Rive gauche m'ont chaleureusement accueilli au sein de leur équipe durant les dernières années et je leur en suis reconnaissant. Merci aussi à tous les chercheurs que j'ai rencontrés au cours de séminaires, colloques et autres groupes de travail, et dont les approches, questions ou suggestions m'ont été profitables. Je pense en particulier à ceux engagés dans le projet ANR CaaFÉ, et spécifiquement à Frédéric Brechenmacher, Sébastien Gauthier et Sloan Despeaux.

Je remercie également les doctorants et anciens doctorants en histoire des mathématiques dont j'ai eu l'occasion de croiser le chemin. J'ai été heureux de converser avec Jenny et Anne-Sandrine sur nos sujets de recherche respectifs et de bénéficier de leur soutien dans des moments plus difficiles. Ce sont par ailleurs elles qui ont organisé la première session du *Novembertagung* à laquelle j'ai participé : cette rencontre et celles qui ont suivi ont été riches pour moi à tous points de vue, et je saisis l'occasion pour penser à tous les participants que j'y ai croisés. Parmi eux, c'est avec plaisir que je mentionne Samson et Simon, dont j'apprécie la bonne humeur et l'aide qu'ils sont toujours prêts à apporter.

Par leur soutien ou leur intérêt envers mon sujet, mes amis de Lyon ont aidé à l'avancement de ma thèse : merci tout particulièrement à Blanche, Jordane, Sébastien et Julien. Je pense aussi à mes amies de plus longue date Charline et Charlotte qui m'ont encouragé plus d'une fois durant ces dernières années.

Il me tient à cœur d'exprimer ma gratitude envers mes parents qui m'ont sans cesse soutenu dans mes efforts et m'ont appris à toujours essayer de faire du mieux possible. Nul doute que tout cela a contribué à mon engagement continu dans des études toujours plus longues que la présente thèse clôt finalement.

Depuis mon arrivée à l'IMJ, j'ai pu y rencontrer un bon nombre de doctorants, et j'ai maintenant le bonheur de pouvoir en compter parmi mes véritables amis. J'ignore s'il est chose commune d'avoir eu la chance d'évoluer dans une atmosphère quotidienne si agréable, comme ce fut le cas pour moi grâce à leur présence. Il ne fait en tout cas aucun doute que cette ambiance a largement participé à rendre extrêmement plaisantes mes nombreuses journées de travail au laboratoire — ainsi que mes soirées de l'autre côté de la place Jussieu. Qu'il me soit permis ici de ne citer, par ordre chronologique inversé, que certains d'entre eux ; les autres comprendront et me pardonneront. Juliette, Liana, Maÿlis, Thibaud, Clément, Olivier et Florian : chacun à votre façon, vous avez compté dans ces années de thèse et je vous en remercie sincèrement.

Résumé

En 1849, Arthur Cayley et George Salmon démontrent que toute surface cubique contient exactement vingt-sept droites. Résultat célèbre de la deuxième moitié du XIX^e siècle, ce théorème a notamment donné lieu à des recherches sur une équation algébrique particulière appelée « équation aux vingt-sept droites ». Dans notre thèse, nous étudions les rapprochements entre groupes, équations et géométrie opérés dans ces recherches. Après un travail préparatoire mettant en place certains points mathématiques et chronologiques associés aux vingt-sept droites, nous nous intéressons au *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Camille Jordan, publié en 1870. Cet ouvrage contient une section consacrée à l'équation aux vingt-sept droites dont nous analysons en détail les mathématiques. Pour mettre en contexte certains points, un corpus plus large est ensuite construit autour des « équations de la géométrie », famille d'équations associées à des configurations géométriques dont les vingt-sept droites ne sont qu'un exemple. Ce corpus s'étend de 1847 à 1896, et ses principaux auteurs sont Jordan, Alfred Clebsch et Felix Klein. Dans le but de rendre compte de l'organisation particulière du savoir partagé dans le corpus, nous discutons et utilisons alors la notion de « culture ». Enfin, nous étudions précisément deux textes du corpus proposant de géométriser certaines parties de l'algèbre et nous montrons en quoi les équations de la géométrie ont participé à une compréhension géométrique de la théorie des substitutions ainsi qu'à l'élaboration des idées du *Programme d'Erlangen* de Klein (1872).

Mots-clés

Vingt-sept droites, équations de la géométrie, Jordan, Clebsch, Klein, culture, histoire de l'algèbre et de la géométrie.

Twenty-seven Lines on a Cubic Surface: Encounters between Groups, Equations, and Geometry in the Second Half of the 19^{th} Century

Abstract

In 1849, Arthur Cayley and George Salmon proved that every cubic surface contains exactly twenty-seven lines. A famous result in the second half of the 19^{th} century, this theorem gave rise to research about a particular algebraic equation called the "twenty-seven lines equation." In our thesis, we study how groups, equations, and geometry interact throughout this research. After a preparatory work presenting some mathematical and chronological points about the twenty-seven lines, we look into Camille Jordan's *Traité des substitutions et des équations algébriques*, published in 1870. This book contained a section devoted to the twenty-seven lines equation, the mathematics of which we thoroughly study. In order to contextualize some elements, a larger corpus is then built around "geometrical equations," a family of equations linked to geometrical configurations among which the twenty-seven lines are just one example. The corpus extends from 1847 to 1896 and its main authors are Jordan, Alfred Clebsch, and Felix Klein. Aiming at describing the particular organization of the knowledge shared in the corpus, we then discuss and use the notion of "culture." Finally, we closely study two texts of the corpus, each of them presenting a geometrization of a part of algebra, and we ascertain that geometrical equations participated to a geometrical understanding of substitution theory as well as the elaboration of the ideas of Klein's *Erlanger Programm* (1872).

Keywords

Twenty-seven lines, geometrical equations, Jordan, Clebsch, Klein, culture, history of algebra and of geometry.

Table des matières

Introduction

Cette thèse vise à mettre en lumière un épisode de l'acculturation de la théorie des groupes en géométrie dans la deuxième moitié du XIXᵉ siècle. Son fil conducteur est un théorème, démontré par Arthur Cayley et George Salmon en 1849, pouvant s'énoncer en termes actuels de la façon suivante :

Théorème. *Toute surface cubique non singulière de* $\mathbf{P}^3$ *contient exactement* 27 *droites.*

Une surface cubique est un ensemble de points de l'espace dont les coordonnées vérifient une équation polynomiale de degré 3. Ces coordonnées sont des éléments d'un corps algébriquement clos, disons ici le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$ pour fixer les idées. Les surfaces non singulières, ou lisses, sont celles pour lesquelles il est possible de « bien » définir un plan tangent en chacun de leurs points. Le théorème stipule alors que toutes ces surfaces contiennent un même nombre fini de droites, à savoir 27, dès lors qu'on accepte de chercher des droites éventuellement situées à l'infini ou n'ayant aucun point à coordonnées réelles. Pour visualiser la situation, voir le modèle en plâtre d'une surface cubique avec ses droites proposé en page 16.

Le théorème des vingt-sept droites semble avoir été un résultat important pour les mathématiciens, dès l'époque de Cayley et de Salmon. Par exemple pour leur collègue et ami James Joseph Sylvester :

> Avec probablement la même bonne raison qu'Archimède a fait graver le cylindre, le cône et la sphère sur sa pierre tombale, nos compatriotes distingués pourraient laisser des instructions testamentaires pour que l'eikosiheptagramme cubique soit gravé sur la leur [1]. [Sylvester 1866-69, p. 155]

Aujourd'hui encore, le résultat d'existence des vingt-sept droites des surfaces cubiques reste présent dans la production mathématique, que ce soit dans des livres de géométrie algébrique [2] ou des articles de recherche [3].

1. « Surely with as good reason as had Archimedes to have the cylinder, cone, and sphere engraved on his tombstone might our distinguished countrymen leave testamentary directions for the cubic eikosiheptagram to be engraved on theirs. » L'« eikosiheptagramme cubique » désigne la figure formée des vingt-sept droites d'une surface cubique. Sauf mention du contraire, toutes les traductions faites dans cette thèse sont les miennes, et tous les italiques des citations sont issues des textes d'origine.
2. [Hartshorne 1977 ; Beauville 1978 ; Reid 1988 ; Shafarevich 1994 ; Mumford 1995 ; Milne 2014].
3. Le moteur de recherche *MathSciNet* des *Mathematical Reviews* recense 121 d'articles de mathéma-

FIGURE 1 – Modèle en plâtre de la surface cubique dite « surface de Clebsch » ou « surface diagonale », d'équation homogène $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3 = 0$. Source : [Fischer 1986b].

Alors que la notion de groupe n'est pas apparente dans l'énoncé du théorème des vingt-sept droites, une partie de ces travaux récents parlent du « groupe des permutations des vingt-sept droites », du « groupe des symétries des vingt-sept droites » ou encore du « groupe des vingt-sept droites [4] ». Cela indique ainsi la mise en place, à un certain moment, de processus de rapprochements mathématiques entre groupes et géométrie opérés autour des vingt-sept droites.

Cette hypothèse est également appuyée par un constat historiographique. En effet, le théorème d'existence des vingt-sept droites apparaît dans des travaux historiques se rapportant à la fois à la géométrie, [Dieudonné 1974 ; Gray 1989 ; Barrow-Green & Gray 2006 ; Rowe 2013], et à l'algèbre, [Van der Waerden 1985 ; Gray 2000 ; Brechenmacher 2011], dans la seconde moitié du XIXe siècle. Dans ces derniers, on apprend que Camille Jordan avait étudié du point de vue des groupes une certaine équation algébrique associée aux vingt-sept droites, appelée « l'équation aux vingt-sept droites », dans son célèbre *Traité des substitutions et des équations algébriques* publié en 1870 — le rôle clé de cet ouvrage dans la constitution de la théorie des groupes a par ailleurs été montré dans les recherches de Hans Wussing, [Wussing 1969] [5]. Toutefois, ces apparitions sporadiques des vingt-sept droites sur une surface cubique dans les histoires de la géométrie ou de l'algèbre ne permettent pas de comprendre précisément comment ces deux domaines mathématiques se sont entremêlés autour de ce résultat.

Il est commun d'associer la rencontre entre théorie des groupes et géométrie au *Programme d'Erlangen* de Felix Klein (1872), souvent présenté comme le texte unificateur de ces deux domaines. Par exemple, dans la préface d'une édition de ce *Programme*, Jean Dieudonné écrit :

> Le « programme d'Erlangen » de F. Klein est, à juste titre, considéré comme un des jalons les plus importants de l'histoire des mathématiques au XIXe siècle. Avec un siècle de recul, on peut dire qu'il constitue une sorte de « ligne de partage des eaux » : il apparaît comme un aboutissement de la longue et brillante évolution de la Géométrie projective depuis le début du siècle, qu'il résume, condense et « explique » grâce à la mise en valeur du rôle fondamental joué par le concept de groupe. [Klein 1974, p. IX]

Plusieurs travaux historiques ont été consacrés au *Programme d'Erlangen* [6]. En particulier, Thomas Hawkins a étudié l'influence qu'a eu le *Programme* durant les cinquante années qui ont suivi sa publication, revenant ainsi sur des lieux communs le présentant comme le texte le plus important et le plus influent de cette époque, [Hawkins 1984]. Il a ainsi montré que le *Programme* est resté relativement inconnu pendant une vingtaine d'années après 1872,

---

tiques dont les comptes rendus comportent l'expression « 27 lines », publiés régulièrement entre 1940 (année de début des recensions) et 2015.

4. Voir par exemple [Frame 1951 ; Benson 1989 ; Elsenhans & Jahnel 2011 ; Milne 2014].

5. Voir aussi [Kiernan 1971 ; Corry 2004].

6. Outre les références citées dans le paragraphe qui suit, voir [Birkhoff & M. K. Bennett 1988 ; Gray 1992 ; Gray 2005 ; Rowe 1983 ; Rowe 1985 ; Wussing 1969].

que d'autres mathématiciens ont lié groupes et géométrie durant cet intervalle de temps et que les travaux de Sophus Lie et ses élèves ont grandement participé à la diffusion des idées du *Programme*. D'un autre côté, des recherches historiques se sont intéressées aux travaux mathématiques qui avaient précédé et participé à l'élaboration du *Programme d'Erlangen*. Ainsi, David E. Rowe a décrit les travaux communs de Lie et de Klein du début des années 1870 sur les transformations infinitésimales de courbes ainsi que les connaissances que Klein avait à cette époque sur les géométries non euclidiennes et la *Liniengeometrie*, [Rowe 1989b ; Rowe 1992] [7].

Ces descriptions historiques du *Programme d'Erlangen* évoquent pour la plupart un point particulier : Klein avait été inspiré par la présentation de la théorie des équations sous l'angle de la notion de groupe de substitutions faite dans le *Traité* de Jordan, et avait voulu la transporter par analogie au cas de la géométrie au moyen des groupes de transformations. L'historiographie ayant davantage insisté sur les groupes de transformation que sur les groupes de substitutions, la mise en œuvre de cette analogie restait toutefois encore à comprendre. Dans la présente thèse, je montrerai notamment que le transfert voulu par Klein de la théorie des équations à la géométrie a été nourri par des exemples techniques, déjà étudiés avant lui, liés à des configurations géométriques telles que les vingt-sept droites.

Après l'ouvrage de référence de Jeremy Gray mettant en lumière certains transferts entre groupes, équations différentielles et géométrie, [Gray 2000], et celui de Erhard Scholz sur la cristallographie, les groupes et la géométrie, [Scholz 1989], d'autres rapprochements disciplinaires impliquant soit l'algèbre soit la géométrie ont attiré l'attention des historiens. Ainsi, Catherine Goldstein et Norbert Schappacher ont mis en évidence un champ de recherche qu'ils ont baptisé « analyse algébrique arithmétique », à l'interface de l'algèbre, l'analyse et la théorie des nombres, et mêlant équations algébriques, congruences, lois de réciprocités, séries de Fourier et fonctions elliptiques, [Goldstein & Schappacher 2007]. Sébastien Gauthier a quant à lui mené des recherches au sujet de la géométrie des nombres, fruit de rencontres entre géométrie et théorie des nombres, [Gauthier 2007]. Plus récemment, Tom Archibald a aussi étudié des rapprochements entre équations algébriques et équations différentielles à travers la mise en place de la théorie de Galois différentielle, [Archibald 2011].

Les histoires de l'algèbre et de la géométrie au XIXe siècle se sont par ailleurs beaucoup enrichies récemment. D'un côté, mentionnons les travaux de Fréderic Brechenmacher et de Caroline Ehrhardt qui ont permis de préciser les diverses identités de l'algèbre dans différents temps et espaces sociaux, [Brechenmacher 2007a ; Brechenmacher 2010 ; Ehrhardt 2011 ; Ehrhardt 2012 ; Brechenmacher & Ehrhardt 2010]. De l'autre côté, citons les recherches du collectif Lise Bioesmat-Martagon sur l'espace projectif, [Bioesmat-Martagon 2011], ou celles de Jemma Lorenat, qui est revenue sur l'opposition entre géométrie analy-

7. Voir aussi [Hawkins 2000] pour une description plus détaillée des travaux communs de Lie et de Klein sur les transformations de courbes.

tique et géométrie synthétique au début du XIXe siècle, [Lorenat 2015a]. Par le renouveau qu'ils ont apporté sur les histoires de l'algèbre et de la géométrie, ces travaux récents suggéraient la pertinence d'étudier des épisodes de rencontres de ces domaines, comme ce qui est proposé dans la présente thèse.

Pour mener à bien ce travail, j'ai presque systématiquement été au plus près des mathématiques elles-mêmes. Ce faisant, j'ai adopté une démarche micro-historique comme proposée par Carlo Ginzburg, consistant à analyser des détails et à les constituer en indices, en traces de phénomènes plus larges qu'ils permettent ainsi de comprendre [8]. La fréquente présence du théorème des vingt-sept droites au XIXe siècle, sa longévité et son association avec des groupes dans les travaux mathématiques récents laissaient espérer qu'il pouvait servir d'indice des rapprochements entre théorie des groupes et géométrie dans la seconde moitié du XIXe siècle ; c'est pourquoi il a été choisi comme fil conducteur de la thèse.

J'avais au départ pensé suivre la démarche utilisée par plusieurs historiens pour tracer l'« histoire d'un théorème ». Ces travaux ont chacun suivi un théorème particulier en analysant précisément ses formulations successives et en étudiant comment ces modifications successives d'énoncé étaient révélatrices de changements de cadres ou de transferts disciplinaires [9]. Cette approche, pourtant, échoue dans le cas du théorème des vingt-sept droites. En effet, nous verrons dans la suite que durant un intervalle de temps allant du milieu du XIXe siècle jusqu'à la Première Guerre mondiale, le théorème se caractérise par une très grande stabilité de la forme de son énoncé : depuis Cayley qui écrit en 1849 « *the whole number of lines upon the surface is twenty-seven* », les mathématiciens ne parlent jamais d'autre chose que des vingt-sept droites sur les surfaces cubiques et ne cherchent d'ailleurs que très rarement de nouvelles démonstrations de leur existence.

Dans les livres de géométrie algébrique récents mentionnés précédemment, ce n'est que vers la fin du XXe siècle qu'on peut relever, parfois, des changements de formulation du théorème, qui semblent résulter de modifications de la discipline elle-même. Pour James S. Milne par exemple, le théorème énonçant l'existence des vingt-sept droites est le suivant [10] : « l'ensemble des surfaces cubiques contenant exactement 27 droites correspond à un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{P}^{19}$ », [Milne 2014, p. 210]. Donnons également l'exemple d'Arnaud Beauville, qui commence par montrer que les surfaces de Del Pezzo contiennent un nombre fini de droites (les images des diviseurs exceptionnels) et en particulier que celles de degré 3 en contiennent 27, puis que toute surface cubique est une surface de Del Pezzo, [Beauville 1978, p. 63-64]. On remarquera toutefois que même dans ces réécritures, il s'agit encore de droites incluses dans des surfaces : on est loin du cas d'André Weil, pour qui le théorème de Fermat affirmant la non existence de « triangles rectangles en nombres d'aire carrée » n'était

8. [Ginzburg 1980 ; Ginzburg 1989].
9. [Gilain 1991 ; Sinaceur 1991 ; Goldstein 1995 ; Brechenmacher 2007a ; Bernard 2010 ; Ehrhardt 2012].
10. « The set of cubic surfaces containing exactly 27 lines correspond to an open subset of $\mathbf{P}^{19}$. »

rien d'autre qu'un cas particulier du théorème de Mordell sur les courbes elliptiques [11].

Une autre piste s'est avérée plus prometteuse : dans la deuxième moitié du XIXe siècle, le théorème des vingt-sept droites est rapidement associé à l'équation algébrique déjà évoquée, « l'équation aux vingt-sept droites ». Suivre cet objet situé à l'articulation même des équations algébriques et de la géométrie devait donc me permettre de pouvoir capter des dynamiques intéressantes sur les rapprochements disciplinaires en vue [12]. En partant de l'équation aux vingt-sept droites, l'enquête a révélé toute une famille d'équations analogues, associées à d'autres situations géométriques. J'ai ainsi été amené à étudier les façons de faire associées à ces équations, au cœur du lien entre théorie des substitutions et géométrie.

Ces façons de faire, partagées par une poignée de mathématiciens pendant une période de temps assez courte, ne peuvent être décrites par une catégorie d'analyse telle que « discipline », qui renvoie à un système d'activités systématisées [13]. Par ailleurs, ces activités intellectuelles partagées s'accompagnent de valeurs, ce qui m'a invité à chercher un descriptif plus large que celui de « pratiques [14] ». J'ai retenu ici le mot « culture » pour essayer de décrire l'organisation du savoir en jeu.

Le mot « culture » a déjà été proposé en histoire des mathématiques pour décrire des systèmes d'activités empreints de valeurs et soutenus par des structures institutionnelles [15]. Ainsi, Karine Chemla a défini une notion de culture mathématique pour comprendre des manières de travailler partagées par des groupes de personnes et se retrouvant sur plusieurs siècles, [Chemla 2009]. Pour expliquer certains aspects apparemment singuliers dans des sources chinoises, elle a proposé de tenir compte d'éléments textuels (problèmes, nombres, procédures, types de textes, instruments de calcul, figures, démonstrations), de valeurs épistémologiques (la généralité, dans son cas) ainsi que des types d'institutions et groupes sociaux dans lesquels les acteurs considérés sont impliqués. Ces composantes sont des « complexes de pratiques », liés de façon cohérente par les valeurs épistémologiques, en regard desquelles les aspects singuliers observés s'expliquent. De son côté, F. Brechenmacher définit des cultures associées à des réseaux de textes, en recourant à une notion de culture dont les actes élémentaires sont les interactions existant entre des individus ou

11. [Goldstein 1995]. Le théorème de Mordell affirme que le groupe des points rationnels d'une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$ est de type fini.

12. Alors que Jordan parle systématiquement du « groupe de l'équation aux vingt-sept droites », on trouve plus tardivement des expressions comme « le groupe des 27 droites » ou « le groupe de Galois de la configuration des 27 droites » dans des textes d'Élie Cartan, [Cartan 1896 ; Cartan 1946] — chez ce dernier, les vingt-sept droites interviennent dans un contexte de théorie des groupes de Lie : leur groupe est isomorphe au groupe de Lie exceptionnel E_6 (voir [Hawkins 2000] au sujet des groupes de Lie). On pourrait ainsi penser que le changement de cadre de « l'équation aux vingt-sept droites » vers « le groupe des vingt-sept droites » se réalise dans le contexte des groupes de Lie à la toute fin du XIXe siècle. Un objectif de la thèse est de montrer que le groupe associé aux vingt-sept droites se trouve bien plus tôt au centre de l'attention des géomètres.

13. Sur la notion de « discipline » en histoire des mathématiques, voir [Gauthier 2007 ; Goldstein & Schappacher 2007].

14. [Brechenmacher 2007a ; Brechenmacher 2007b ; Roque 2015].

15. Outre les exemples qui suivent, voir le projet *Mathematical Cultures*, `https://sites.google.com/site/mathematicalcultures/home`, et sa présentation [Larvor 2012].

des groupes d'individus, [Brechenmacher 201 ?]. Il définit ainsi « la culture de l'équation séculaire » en repérant, dans le réseau de textes associé à cette équation, des caractères mathématiques partagés et soutenus par une valeur épistémologique, celle de la généralité.

Pour ma part, je soulignerai pour le moment que le mot « culture » renvoie à l'organisation particulière d'ensembles de traits (incluant connaissances, valeurs et symboles) partagés par une pluralité de personnes, se transmettant par apprentissage et formant un système lié [16]. Ce dernier point est important : il signifie que les traits partagés ne sont pas simplement juxtaposés les uns aux autres, mais forment un tout cohérent (au sens d'une logique spécifique à la culture) au sein duquel ils prennent tout leur sens, alors qu'isolés, ils peuvent conduire l'observateur à une situation d'incompréhension. En outre, cette approche nous permet d'éviter un piège, celui de domaines (que ce soit la géométrie ou la théorie des groupes) qui seraient bien définis en eux-mêmes avant leur mise en contact. Comme le remarque en effet Denys Cuche, les travaux sur les processus d'acculturation, c'est-à-dire de rencontres de cultures, ont contribué à reconnaître le caractère dynamique des cultures et ainsi à révoquer le mythe de cultures pures, repliées sur elles-mêmes. Au contraire, ce sont les rencontres de cultures qui permettent de les appréhender :

> Le processus que connaît chaque culture en situation de contact culturel, celui de déstructuration puis de restructation, est en réalité le principe même d'évolution de n'importe quel système culturel. Toute culture est un processus permanent de construction, déconstruction et reconstruction. [Cuche 2010, p. 70]

C'est justement cette dynamique d'acculturation qu'il s'agit de capter dans cette thèse, en suivant les travaux sur l'équation aux vingt-sept droites dans la deuxième moitié du XIX$^{\text{e}}$ siècle.

Le premier chapitre de la thèse est un chapitre préparatoire. Lorsqu'ils proposent des remarques historiques, presque tous les travaux mathématiques récents sur les vingt-sept droites mentionnés précédemment utilisent une source commune. Il s'agit d'un livre de Archibald Henderson intitulé *The Twenty-Seven Lines upon the Cubic Surface*, [Henderson 1915], qui se présente donc comme « l'histoire officielle » du sujet [17]. Je vais m'intéresser à cette histoire proposée par Henderson, ce qui me permettra de présenter différents aspects mathématiques associés aux vingt-sept droites et de confirmer deux points que j'ai annoncés précédemment : la stabilité de la forme d'énoncé du théorème d'existence des vingt-sept droites et l'intérêt de se focaliser sur l'équation aux vingt-sept droites.

L'étude des travaux concernant cette équation débute au chapitre 2. Identifié par Henderson comme point de départ pour la suivre, le *Traité des substitutions et des équations*

16. Ces caractéristiques de « culture » sont celles qui sont le plus communément acceptées en sciences sociales. Voir à ce sujet [Kroeber & Kluckhohn 1952 ; Vermeersch 1965 ; Perrineau 1975 ; Cuche 2010 ; Spencer-Oatey 2012].

17. Voir par exemple [Frame 1951, p. 83 ; Milne 2014, p. 211]. Un certain nombre d'autres travaux mathématiques récents se réfèrent à des publications qui elles-mêmes renvoient au livre de Henderson.

algébriques de Jordan est l'objet principal du chapitre. J'y étudie au plus près la façon dont sont entremêlées géométrie et théorie des substitutions, autour des trois séries de résultats mathématiques qui concernent les vingt-sept droites. La première est l'étude des propriétés de résolubilité de l'équation aux vingt-sept droites ; la deuxième concerne des liens entre cette équation et des équations liées à d'autres configurations géométriques ; la troisième se rapporte aux vingt-sept droites et aux fonctions hyperelliptiques.

Pour mettre en contexte certains points du *Traité* difficilement explicables à partir de la lecture de cet ouvrage, un corpus de textes est créé au chapitre 3. Ce corpus est défini par les « équations de la géométrie », dont l'équation aux vingt-sept droites n'est qu'un exemple. En décrivant les textes du corpus, je suggérerai que l'on peut interpréter certains de leurs éléments comme des traces de cultures algébrique et géométrique au XIX^{e} siècle. Par ailleurs, je montrerai que si les « équations de la géométrie » sont des objets mal définis, ils donnent cependant lieu à des façons de faire assez précises et partagées par les auteurs du corpus.

Le chapitre 4 est dévolu à une description plus précise de ces façons de faire. Je commencerai par montrer que la catégorie d'analyse « discipline » ne permet pas d'en rendre compte. Après cela, en procédant à une dissection de ces façons de faire caractéristiques des équations de la géométrie, je montrerai en quoi l'organisation du savoir lié à ces objets peut être décrit en tant que « système culturel ».

Enfin, le cinquième et dernier chapitre de la thèse est consacré à certains travaux de deux des auteurs du corpus des « équations de la géométrie » : Alfred Clebsch et Felix Klein. Ces deux mathématiciens seront privilégiés dans ce chapitre en tant qu'auteurs de textes proposant des interprétations géométriques de certaines parties de la théorie des équations. Celui de Clebsch se rapporte à l'équation générale du cinquième degré ; celui de Klein sur une façon de représenter géométriquement des résolvantes d'équations. Je montrerai alors en quoi ce dernier texte, et avec lui tout le corpus des « équations de la géométrie, permet de relier ces équations au *Programme d'Erlangen*.

Je termine cette introduction en expliquant quelques résultats mathématiques utiles sur les vingt-sept droites. Rappelons d'abord que le théorème d'existence peut s'énoncer comme suit :

Théorème. *Toute surface cubique non singulière de* $\mathbf{P}^3$ *contient exactement* 27 *droites.*

Pour fixer les idées, je ne considérerai ici que l'espace projectif $\mathbf{P}^3$ est défini sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes[18]. Muni de coordonnées homogènes $(x : y : z : w)$, on y définit les surfaces cubiques comme étant les lieux décrits par des équations algébriques homogènes de degré 3. Autrement dit, une surface cubique est l'ensemble des points de $\mathbf{P}^3$

18. Comme écrit précédemment, il est possible de considérer plus généralement un corps algébriquement clos quelconque. Je me limiterai ici au cas des nombres complexes, ce qui est en accord avec tous les textes primaires qui seront utilisés dans la thèse.

dont les coordonnées $(x : y : z : w)$ vérifient une équation $P(x, y, z, w) = 0$, où P est un polynôme homogène de degré 3. Par exemple, l'équation $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0$ définit une surface cubique, de même que l'équation $xyz - w^3 = 0$ ou encore $2x^2y + iz^3 - zw^2 = 0$.

Dire que la surface est non singulière (ou lisse) signifie qu'elle ne contient aucun point singulier, c'est-à-dire qu'aucun point de coordonnées $(x : y : z : w)$ appartenant à la surface d'équation $P = 0$ ne vérifie en outre les équations

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial w} = 0.$$

Parmi les exemples précédents, on peut vérifier que la surface $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0$ est lisse, tandis que celle d'équation $xyz-w^3 = 0$ possède trois poins singuliers, de coordonnées respectives $(1 : 0 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0 : 0)$ et $(0 : 0 : 1 : 0)$.

Le théorème énonce qu'étant donnée une surface cubique non singulière, il existe exactement 27 droites qui y sont incluses. Regardons l'exemple de la surface lisse d'équation $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0$. La droite qui relie les points de coordonnées $(1 : -1 : 0 : 0)$ et $(0 : 0 : 1 : e^{i\pi/3})$ est formée de tous les points de coordonnées $(x : -x : z : e^{i\pi/3}z)$, les paramètres x et z parcourant $\mathbf{C}$ sans être simultanément nuls. On vérifie alors que pour tous tels paramètres x, z, le point $(x : -x : z : e^{i\pi/3}z)$ appartient à la surface cubique : c'est dire que la droite considérée est incluse dans la surface. Plus généralement, les vingt-sept droites de cette surface sont celles paramétrées comme suit :

$$(x : \omega x : z : \omega' z) \qquad \text{ou} \qquad (x : y : \omega y : \omega' x) \qquad \text{ou} \qquad (x : y : \omega x : \omega' y),$$

où ω et ω' sont des racines cubiques de -1.

Lorsqu'une surface est définie par un polynôme à coefficients réels, on peut se placer dans $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ et ne considérer que les points à coordonnées réelles vérifiant son équation de définition, ainsi que les droites réelles qui y sont incluses. Dans ce cas, le nombre de telles droites n'est pas nécessairement 27. Dans l'exemple précédent, il y a des droites réelles, comme celle paramétrée par $(x : -x : z : -z)$, mais d'autres ne le sont pas, comme celle paramétrée par $(x : -x : z : e^{i\pi/3}z)$. De façon générale, une surface cubique réelle peut contenir 27, 15, 7 ou 3 droites réelles.

Les vingt-sept droites ont la particularité d'être liées par des relations d'incidence qui sont les mêmes quelque soit la surface cubique considérée. Plus précisément, chacune des vingt-sept droites en coupe 10 autres, qui s'intersectent elles-mêmes deux à deux. Ainsi, les vingt-sept droites peuvent se regrouper en triplets, dont les éléments sont des droites se coupant deux à deux. Ces triplets peuvent être vus comme des triangles et on peut montrer qu'il existe en tout 45 tels triangles. Un plan défini par un triangle intersecte la surface cubique exactement en ce triangle [19] et il est tangent à la surface en chacun des sommets

19. L'intersection d'un plan quelconque avec une surface cubique est une courbe cubique. Ici, cette courbe consiste en la réunion de trois droites.

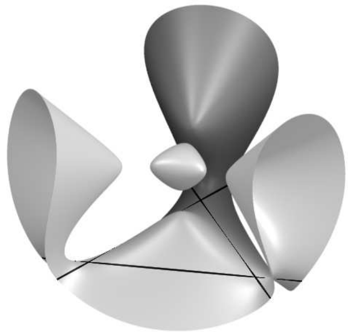


FIGURE 2 – Les trois droites tracées sur cette surface cubique se coupent deux à deux et forment un des 45 triangles (ou plans tangents triples). Cette image provient de la page web `http://cubics.algebraicsurface.net` gérée par Oliver Labs.

du triangle : pour cette raison, il est baptisé *plan tangent triple*. Voir la figure 2.

Soient abc et $a'b'c'$ deux des 45 triangles dont les côtés (ici notés $a, b, \ldots, c'$) sont tous distincts. Alors il existe un triangle $a''b''c''$ dont les côtés coupent $a, b, \ldots, c'$ de sorte à former trois triangles $aa'a''$, $bb'b''$ et $cc'c''$ (voir la figure 3). Trois triangles abc, $a'b'c'$ et $a''b''c''$ ainsi définis forment un trièdre T dit *de Steiner* ; ce dernier est associé à un autre trièdre T' de Steiner, à savoir $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$, et on obtient ainsi un *double trièdre*. Ces doubles trièdres peuvent enfin être groupés trois à trois en réunissant ensemble ceux qui n'ont aucune droite commune. Comme chaque double trièdre est défini avec 9 droites, ces triplets de doubles trièdres contiennent les 27 droites. On peut montrer qu'il existe exactement 40 tels triplets de doubles trièdres de Steiner.

Enfin, définissons l'*équation aux vingt-sept droites*. Pour simplifier un peu la présentation, considérons ici les droites de l'espace définies par des équations (en les coordonnées homogènes de l'espace) de la forme

$$\begin{cases} x = \alpha z + \beta w \\ y = \gamma z + \delta w. \end{cases} \tag{$*$}$$

Si l'équation de la surface cubique est $P(x, y, z, w) = 0$, alors une telle droite est incluse dans la surface si et seulement si

$$\forall z, w \in \mathbf{C}, \qquad P(\alpha z + \beta w, \gamma z + \delta w, z, w) = 0.$$

Comme P est un polynôme du troisième degré, cette condition peut également s'écrire sous la forme

$$\forall z, w \in \mathbf{C}, \qquad f_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta)z^3 + f_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)z^2w + f_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta)zw^2 + f_0(\alpha, \beta, \gamma, \delta)w^3 = 0,$$

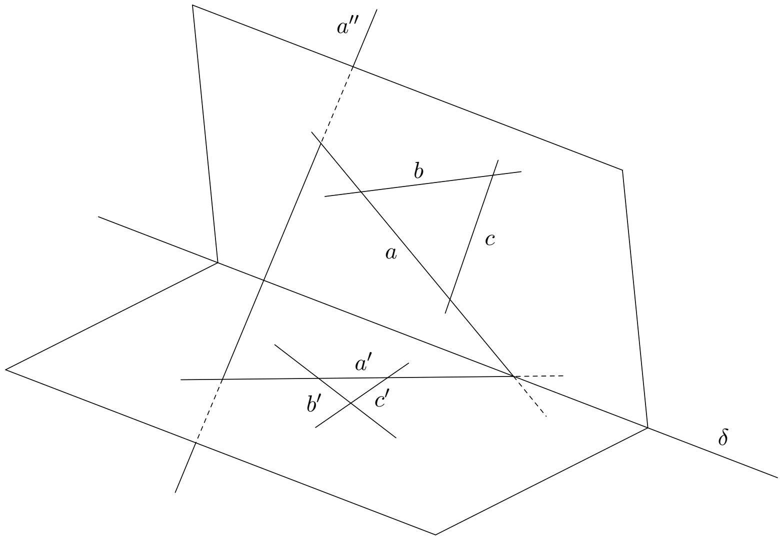


FIGURE 3 – Début de construction d'un trièdre de Steiner. Les triangles abc et $a'b'c'$ sont donnés et on suppose qu'ils n'ont aucun côté en commun. Il existe alors une droite a'' (parmi les vingt-sept) qui intersecte a et a', formant ainsi un nouveau triangle $aa'a''$. On peut construire de même des droites b'' et c'', et ainsi obtenir deux trièdres de Steiner : abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ d'une part, $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$ d'autre part.

où les f_i sont des polynômes homogènes de degré 3. Ainsi, une droite d'équations $(*)$ est incluse dans la surface si et seulement si

$$\begin{cases} f_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0 \\ f_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0 \\ f_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0 \\ f_0(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0. \end{cases}$$

Maintenant, si l'on élimine par exemple β, γ, δ parmi ces quatre équations, il reste une équation de degré 27 en α. À chacune des racines de cette équation correspond un triplet (β, γ, δ) et donc une des vingt-sept droites de la surface cubique. L'équation en α est *l'équation aux vingt-sept droites.* Ce n'est pas une équation générale de degré 27 : il y a des relations algébriques entre ses racines qui correspondent aux relations d'incidence existant entre les vingt-sept droites.

Chapitre 1

Sur « l'histoire officielle » des vingt-sept droites

Un livre, systématiquement cité lors des remarques historiques de travaux mathématiques sur les vingt-sept droites, a été mis en évidence dans l'introduction générale. Il s'agit de *The Twenty-seven Lines upon the Cubic Surface* d'Archibald Henderson, [Henderson 1915]. Seul ouvrage entièrement dévolu au sujet des vingt-sept droites, il en constitue ainsi ce que l'on peut appeler « l'histoire officielle », pour une période allant du milieu du XIX^{e} siècle jusqu'à la Première Guerre mondiale.

Ce premier chapitre s'attache à examiner cette histoire officielle et à en mettre en évidence quatre problèmes. Le premier est que l'histoire proposée par Henderson est écrite suivant un modèle analogue à la *History of the Theory of Numbers* de Dickson, c'est-à-dire qu'elle est découpée de façon arbitraire en thèmes, décrits à l'aide de petits résumés juxtaposés les uns aux autres. Si cette écriture a pour effet de briser la chronologie générale du sujet, la description superficielle de chaque article cité par Henderson pose aussi problème : ces discussions souvent trop sommaires, en particulier du point de vue mathématique, empêchent de voir les cohérences globales des articles en question et brisent certaines unités existant entre les thèmes choisis par Henderson. Enfin, ce dernier ne justifie pas la manière dont il a sélectionné les travaux mathématiques pour construire son histoire. En examinant les sources de Henderson, nous verrons que la question de savoir repérer des textes en rapport avec les vingt-sept droites n'est pas évidente et en particulier que la bibliographie du livre de Henderson n'épuise pas ce sujet.

1.1 Une histoire thématique à la Dickson

1.1.1 Archibald Henderson : vers l'écriture de son livre

Commençons par donner quelques informations au sujet du parcours professionnel de Henderson. Ces informations ont été trouvées grâce à deux sources : une courte note biographique que l'on trouve au début du livre sur les vingt-sept droites, ainsi que l'entrée du *Dictionary of North Carolina Biography* consacrée à Henderson, [Putzel 1988].

Archibald Henderson (1877-1963) est un mathématicien, mais aussi un critique littéraire, un biographe et un historien américain [1]. Entré à l'université de Caroline du Nord en 1894, il y obtient en 1902 un doctorat de mathématiques ; la thèse, intitulée *The Cone of the Normals and an Allied Cone for Surfaces of the Second Degree*, avait déjà été publiée sous forme d'un article en 1901, [Henderson 1901]. Recruté en 1902 dans cette même université en tant que *associate professor* de mathématiques, Henderson choisit de poursuivre en parallèle sa formation mathématique à l'université de Chicago durant quatre trimestres (été 1901 et année académique 1902-1903). Sous la direction de Leonard Eugene Dickson, il commence, toujours en 1902, un travail sur les vingt-sept droites des surfaces cubiques, en vue d'obtenir un doctorat de l'université de Chicago.

D'après Della Dumbaugh, il était à l'époque tout à fait inhabituel de préparer un deuxième doctorat aux États-Unis — Henderson est même le seul cas qui lui ait été porté à connaissance. Ni la note biographique du livre de Henderson ni l'entrée du *Dictionary* lui étant consacrée ne donnent d'explication à ce fait exceptionnel. Une hypothèse est que Henderson, voulant approfondir ses connaissances en mathématiques, avait été attiré par l'université de Chicago qui était alors en pleine expansion : à titre comparatif, entre 1862 et 1934, l'université de Caroline du Nord n'avait décerné que 2 doctorats en mathématiques (dont celui de Henderson), contre 237 pour celle de Chicago [2].

À cette époque, Dickson avait fait ou avait fait faire par certains de ses étudiants doctoraux des bilans historiographiques sur des sujets mathématiques qui l'intéressaient et sur lesquels il voulait travailler [3]. De tels bilans lui permettaient de se familiariser avec un sujet avant de se lancer dans la recherche mathématique proprement dite [4]. Le travail doctoral de Henderson sur les vingt-sept droites semble s'inscrire dans cette série : une recherche des travaux de Dickson dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* montre que celui-ci a publié des articles dont les titres mentionnent explicitement les vingt-sept droites en 1901, 1902 et 1915 [5], ce qui coïncide *grosso modo* avec les dates de début et de fin du projet de Henderson.

Revenons plus spécifiquement à l'élaboration de ce projet. Entre 1903 et 1905, Hender-

1. D'après [Putzel 1988], les travaux non mathématiques de Henderson incluent notamment une biographie de Mark Twain, de nombreux écrits biographiques sur George Bernard Shaw et des travaux sur l'histoire des États-Unis.

2. Pour ces chiffres, voir [Richardson 1936, p. 203]. Sur l'université de Chicago, voir le chapitre 9 de [Parshall & Rowe 1994].

3. Voir [Dumbaugh Fenster 1999] pour le cas de l'étudiant de Dickson nommé Albert Everett Cooper, chargé d'une synthèse historique sur la loi de réciprocité quadratique. Voir également [Dumbaugh Fenster 1997] sur les relations (notamment celle de « modèle ») de Dickson avec certains de ses étudiants et [Dumbaugh Fenster 2005] au sujet de *History of the Theory of Numbers.*

4. [Dumbaugh Fenster 2005, p. 835].

5. [Dickson 1901c ; Dickson 1902 ; Dickson 1915]. On peut ajouter les livres [Dickson 1901b] et [Miller et al. 1916], dans lesquels les vingt-sept droites apparaissent également.

son publie trois articles concernant les vingt-sept droites d'une surface cubique, [Henderson 1903 ; Henderson 1904 ; Henderson 1905]. En 1910-1911, il effectue un voyage scientifique en Europe, où il rencontre notamment Henry Frederick Baker et Bertrand Russell à Cambridge, Issai Schur et Hermann Schwarz à Berlin, ainsi qu'Émile Picard et Édouard Goursat à Paris [6]. Une première version du livre sur les vingt-sept droites, *The Twenty-seven Lines upon the Cubic Surface*, [Henderson 1911], est publiée à l'issue du voyage, comme treizième opus des *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics* — les trois articles de Henderson précédemment cités se retrouvent quasiment tels quels dans le livre [7]. Ce dernier fut ensuite republié à Chicago en 1915 en tant que thèse doctorale, sans autre modification que l'ajout de la courte note biographique évoquée précédemment.

Son second doctorat obtenu à Chicago et plusieurs propositions de postes dans d'autres universités n'ont pas détourné Henderson de l'université de Caroline du Nord : promu *full professor* dès 1908, il y devint chef du département de mathématiques en 1920 et y resta jusqu'à sa retraite en 1948. Noter que les 19 travaux de Henderson recensés par le *Jahrbuch* et *MathSciNet* ne concernent plus les vingt-sept droites à partir de 1915 [8]. Du reste, ces dix-neuf publications sont pour une bonne partie dévolues à la relativité générale ; parmi les autres, on trouve la version de 1911 de son livre sur les vingt-sept droites et un des articles qui en est un extrait, quelques articles de géométrie plane, deux autres sur les équations quadratiques, cubiques et biquadratique (incluant des interprétations géométriques de transformations qui y sont associées), un article sur certaines équations différentielles, une publication sur l'enseignement de la géométrie et une autre sur l'histoire de la *Elisha Mitchell Scientific Society* [9]. Henderson s'écarte donc définitivement du sujet des vingt-sept droites après avoir obtenu son doctorat et être rentré à l'université de Caroline du Nord, ce qui conforte d'ailleurs l'impression qu'il s'agissait d'un projet de Dickson lié à l'obtention d'un doctorat à Chicago.

1.1.2 Structure et contenu de *The Twenty-seven Lines*

Le livre de Henderson est formé d'une centaine de pages. Il se compose de remerciements adressés à Eliakim Moore, à Dickson et à Baker [10], d'une table de matières, d'un résumé

6. Le voyage en Europe est conforme à ce qui avait été préconisé par Dickson pour les recherches qui devaient mener à son *History of the Theory of Numbers*. Voir [Dumbaugh Fenster 2005, p. 835].

7. Dans l'ordre chronologique de publication, [Henderson 1903] est la première partie du chapitre VII du livre, [Henderson 1904] en est la suite (mais contient quelques calculs supplémentaires) et [Henderson 1905] est la reprise du résumé historique, de l'introduction, du chapitre I et du début du chapitre II.

8. *MathSciNet* recense toutefois une réimpression de [Henderson 1911] de 1960.

9. Voir la liste de ces publications en annexe A. Noter que les périodiques dans lesquels Henderson publie sont *The American Mathematical Monthly* et *National Mathematics Magazine*, qui sont deux journaux destinés à un public très large, ainsi que le *Journal of the Elisha Mitchell Society*. Ce dernier était destiné à rassembler des publications relatives à toutes les sciences et dont les auteurs étaient essentiellement issus de l'université de Caroline du Nord.

10. Henderson les remercie d'avoir lu son manuscrit et d'avoir fait des suggestions pour l'améliorer. Comme écrit précédemment, Henderson avait rencontré Baker à Cambridge. Moore, avec Oskar Bolza et Heinrich Maschke à ses côtés, dirigeait le département de mathématiques de Chicago ; il avait en outre

historique, d'une introduction générale, de sept chapitres, d'une bibliographie, d'un tableau annexe et de treize figures. La table des matières du livre est reproduite en table 1.1. Examinons brièvement le contenu des principales parties du livre.

Dans l'introduction, Henderson commence par prévenir qu'en raison de la richesse du sujet des vingt-sept droites, il lui a été impossible d'en traiter tous les aspects :

> Le problème des vingt-sept droites sur les surfaces cubiques est d'une telle ampleur et d'une telle envergure, et est associé à tant d'importants problèmes que donner un *résumé* de tout ce qui a été fait sur le sujet étendrait le présent mémoire en un livre volumineux. Il s'est avéré irréalisable de tenter de couvrir même les phases géométriques du problème, en particulier avec leur raccord au problème apparenté des quarante-cinq plans tangents triples, bien que les deux sujets vont de pair. Dans ce mémoire, cependant, est donné un tour d'horizon général sur le problème des vingt-sept droites d'un point de vue géométrique [11]. [Henderson 1915, p. 8]

En évoquant un « point de vue géométrique », Henderson sous-entend l'existence d'autres points de vue, qui ne sont cependant pas représentés dans les chapitres mathématiques du livre [12].

La suite de l'introduction consiste en une description sommaire des chapitres mathématiques. Le premier contient des théorèmes sur l'existence des vingt-sept droites et des quarante-cinq plans tangents triples ainsi qu'une présentation d'une notation des droites. Les chapitres suivants concernent les notions de double-six et de couples de trièdres associés aux vingt-sept droites ; l'établissement d'équations pour les vingt-sept droites et les quarante-cinq plans tangents ; les constructions de modèles de double-six et d'autres configurations de droites ; la dérivation de la configuration de l'hexagramme de Pascal à partir de celle des vingt-sept droites. Les figures du livre se rapportent à divers chapitres ; ce sont des dessins de certaines des configurations associées aux vingt-sept droites. Enfin, la table est un tableau représentant les intersections mutuelles des vingt-sept droites : il y a vingt-sept lignes et vingt-sept colonnes, et chaque case est marquée d'un point si et seulement si les deux droites correspondantes s'intersectent (voir la figure 1.1).

Les chapitres mathématiques de *The Twenty-seven Lines* sont surtout des expositions de travaux sur les surfaces cubiques déjà connus, auxquels Henderson ajoute quelques contributions personnelles. Ce dernier garnit en outre les chapitres II et V (concernant la notion de double-six) de paragraphes à vocation historique, intitulés respectivement

---

dirigé la thèse de Dickson. Voir [Parshall & Rowe 1994, p. 364 et suiv.].

11. « The problem of the twenty-seven lines upon the cubic surface is of such scope and extent, and is allied to so many other problems of importance, that to give a *résumé* of all that has been done upon the subject would enlarge the present memoir into an extensive book. It has not proved feasible to attempt to cover even the geometrical phases of the problem, in their extension in particular to the cognate problem of the forty-five triple tangent places, although the two subjects go hand in hand. In this memoir, however, is given a general survey of the problem of the twenty-seven lines, from the geometric standpoint ».

12. Ainsi le « point de vue de la théorie des groupes » dont il est fait mention dans le résumé historique (cf. *infra*).

« Histoire du théorème [du double-six] [13] » et « Informations historiques ». Dans ces paragraphes, Henderson reprend et développe les points correspondants du résumé historique général placé au début du livre.

Le résumé historique que Henderson propose est partagé en plusieurs paragraphes. Les deux premiers sont introductifs et se rapportent au sujet des surfaces cubiques. À l'exception d'un seul, chacun des paragraphes suivants débute par une phrase par laquelle un thème en rapport avec les vingt-sept droites lui est clairement attribué. Le paragraphe qui échappe à cette règle consiste en une liste de références concernant plusieurs de ces thèmes. Écrits selon leur ordre d'apparition dans le résumé historique, les paragraphes sont les suivants :

— Abondance, à l'époque d'Henderson, des écrits mathématiques concernant les surfaces cubiques ;

— Premier article traitant spécifiquement de surfaces cubiques, dû à Leopold Mossbrugger (1841) ;

— Existence des vingt-sept droites avec Arthur Cayley et George Salmon ;

— Base d'une « théorie purement géométrique [14] » des surfaces cubiques avec Jacob Steiner ;

— Problème de notation des vingt-sept droites et notion de double-six ;

— Travaux de Rudolf Sturm et de Luigi Cremona sur les surfaces cubiques du « point de vue synthétique [15] » ;

— Classifications des surfaces cubiques en regard de la réalité des droites qu'elles contiennent ou de leurs singularités ;

— Modèles des surfaces cubiques et de leurs droites ;

— Formes et modèles des surfaces cubiques ;

— Liens entre les vingt-sept droites et les vingt-huit tangentes doubles des courbes quartiques planes ;

— Liens entre les vingt-sept droites et l'hexagramme de Pascal ;

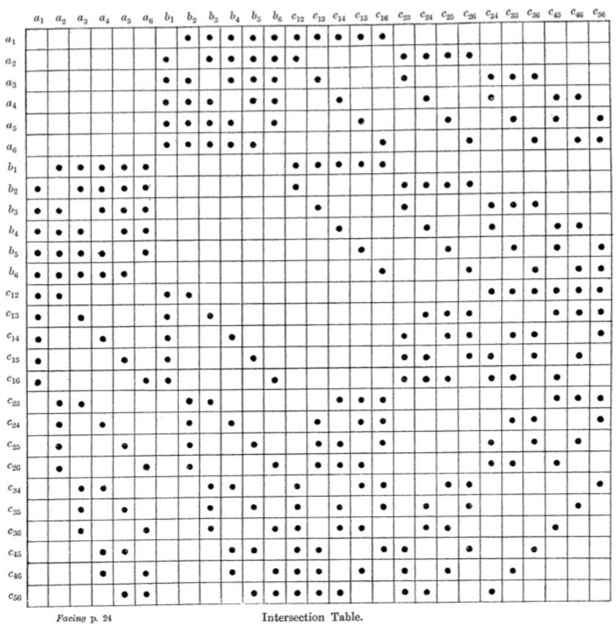
13. Ce théorème est énoncé de la façon suivante par Henderson : « Given five lines a, b, c, d, e which meet the same straight line X; then may any four of the five lines be intersected by another line. Suppose that A, B, C, D, E are the other lines intersecting (b, c, d, e), (c, d, e, a), (d, e, a, b), (e, a, b, c), and (a, b, c, d) respectively. Then A, B, C, D, E will all be met by one other straight line x. » [Henderson 1915, p. 14-15].

14. « The basis for a purely geometric theory of cubic surfaces was laid by Steiner in a short but extremely fruitful and suggestive memoir. » [Henderson 1915, p. 1].

15. « The first significant papers on cubic surfaces from the synthetic standpoint, following Steiner's memoir above mentioned, were by Cremona and Rudolf Sturm. » [Henderson 1915, p. 2].

CONTENTS

Table 1.1 – Reproduction de la table des matières de [Henderson 1915].



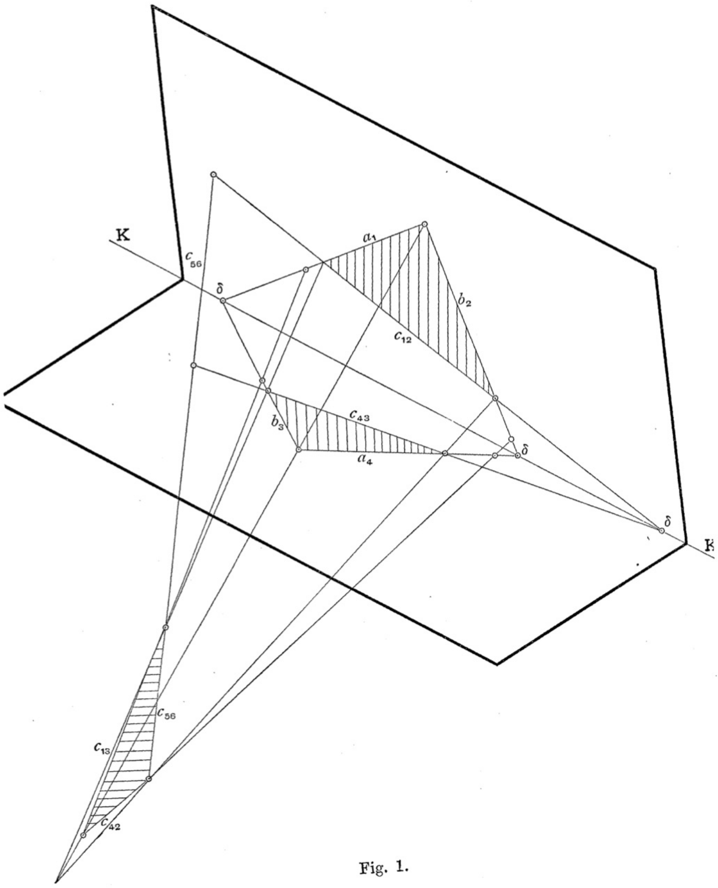


FIGURE 1.1 – Extraits de [Henderson 1915] : table d'intersection des vingt-sept droites et figure représentant un trièdre de Steiner.

— Paragraphe de références sur des travaux concernant les doubles-six ou le lien entre les vingt-sept droites et les vingt-huit tangentes doubles ;

— Recherches de Corrado Segre sur les variétés du troisième ordre dans un espace de dimension 4 ;

— Point de vue sur les vingt-sept droites de la théorie des groupes [16].

Henderson décrit brièvement ces thèmes et donne pour chacun d'eux quelques références bibliographiques de travaux mathématiques s'y rapportant. Les descriptions de Henderson consistent principalement en des successions de faits, parfois étoffés de quelques remarques anecdotiques. Par exemple, les paragraphes concernant respectivement l'existence des vingt-sept droites avec Cayley et Salmon et l'approche de Steiner sont les suivants :

> La théorie des droites sur une surface cubique a d'abord été étudiée dans une correspondance entre les mathématiciens britanniques Salmon et Cayley ; et les résultats ont été publiés, [Cayley 1849 ; Salmon 1849]. L'observation qu'un nombre défini de droites doivent reposer sur la surface est initialement due à Cayley, alors que la détermination de ce nombre a été faite en premier par Salmon (voir [Salmon 1882, §530, note] et [Cayley *Œuvres*, vol. 1, p. 589]).
>
> La base pour une théorie purement géométrique des surfaces cubiques a été posée par Steiner dans un mémoire court mais extrêmement fructueux et suggestif, [Steiner 1856b]. Cet article contient de nombreux théorèmes, donnés soit entièrement sans preuve, soit avec au plus une indication minime de la méthode de dérivation — une habitude de « ce célèbre sphinx », comme l'a décrit Cremona [17]. [Henderson 1915, p. 1-2]

La division du sujet des vingt-sept droites en plusieurs thèmes et le style d'écriture des paragraphes correspondants n'est ainsi pas sans rappeler la façon de faire adoptée par Dickson dans *History of the Theory of Numbers* [18]. Cette constatation appelle ainsi une série de questions sur la pertinence même de ce procédé d'écriture : comment Henderson a-t-il choisi ses thèmes ? Comment a-t-il décidé de la répartition des travaux mathématiques à effectuer en conséquence ? Certains thèmes ont-ils des rapports de cohérence entre eux ou sont-ils tous complètement disjoints ? Dans un cas ou dans l'autre, des travaux mathématiques ne relèvent-ils nécessairement que d'un unique thème ?

---

16. « The problem of the twenty-seven lines is full of interest from the group theoretic standpoint. » [Henderson 1915, p. 6].

17. « The theory of straight lines upon a cubic surface was first studied in a correspondence between the British mathematicians Salmon and Cayley; and the results were published, *Camb. and Dublin Math. Journal*, Vol. iv. (1849), pp. 118–132 (Cayley), pp. 252–260 (Salmon). The observation that a definite number of straight lines must lie on the surface is initially due to Cayley, whereas the determination of that number was first made by Salmon [Salmon, *Geometry of Three Dimensions*, 4th edition...]. The basis for a purely geometric theory of cubic surfaces was laid by Steiner ["*Ueber die Flächen dritten Grades*"] in a short but extremely fruitful and suggestive memoir. This paper contained many theorems, given either wholly without proof, or with at most the barest indication of the method of derivation—a habit of "*ce célèbre sphinx*," as he has been styled by Cremona. »

18. Voir [Dumbaugh Fenster 2005, p. 835-839].

Il est d'autant plus difficile de répondre à ces questions avec la lecture seule du résumé historique que, comme le suggère l'extrait cité plus haut, Henderson n'entre pas du tout dans les détails mathématiques. Les descriptions superficielles des articles mentionnés tout au long du résumé induisent ainsi un autre problème consistant en la perte de compréhension de leurs cohérences.

Par ailleurs, l'écriture du résumé historique en paragraphes thématiques entraîne une perte globale de la chronologie, pour deux raisons. D'abord, chaque paragraphe pris isolément étant chronologiquement ordonné, les dates de fin de l'un sont en général postérieures aux dates de commencement du suivant. Par exemple, le paragraphe sur les notations et le double-six s'étend de 1849 à 1894, mais le suivant, sur les travaux de Sturm et Cremona, débute en 1868. Ensuite, les paragraphes du résumé ne sont pas non plus classés par chronologie de leurs dates de début. À titre d'illustration, celui sur les variétés cubiques commence en 1887 alors que celui qui lui succède dans le résumé, consacré à la théorie des groupes, débute en 1869.

Pour tenter d'élucider tous ces problèmes, je vais décrire de façon plus précise le résumé historique de Henderson et surtout expliquer plus que lui le contenu mathématique des textes qui y sont cités. Cependant, afin de pouvoir porter un regard plus critique sur l'utilisation par Henderson de ces textes pour construire son histoire, je diffère légèrement ce travail et examine dès à présent la question des sources et de la bibliographie de Henderson.

1.2 Les sources et la bibliographie de Henderson

Henderson n'indique pas explicitement quelles ont été les méthodes de travail et les sources qui lui ont servi pour l'élaboration de son livre. Un indice est toutefois donné dans le premier paragraphe du résumé historique, dans lequel est évoquée, comme dit précédemment, la multitude de travaux mathématiques sur le sujet des surfaces cubiques :

> La littérature sur le sujet [des surfaces cubiques] est très étendue. Dans une bibliographie sur les courbes et surfaces compilée par J. E. Hill, de la *Columbia University* de New York, la section sur les surfaces cubiques contenait deux cent cinq titres, [Hill 1897]. Le volume de mathématiques pures (1908) du *Catalogue of Scientific Papers* de la *Royal Society* de Londres, 1800-1900, en contient bien plus [19]. [Henderson 1915, p. 1]

Les deux références données ici par Henderson sont autant d'indices sur ses possibles sources bibliographiques.

19. « The literature of the subject is very extensive. In a bibliography on curves and surfaces compiled by J. E. Hill, of Columbia University, New York, the section on cubic surfaces contained two hundred and five titles (*Bull. Am. Math. Soc.* Vol. III (1897), pp. 136-146). The Royal Society of London Catalogue of Scientific Papers, 1800-1900, volume for *Pure Mathematics* (1908), contains very many more. »

1.2.1 Un article de Hill concernant une bibliographie

L'article cité par Henderson est un article de John Ethan Hill [20]. Dans cet article, Hill décrit sommairement une bibliographie qu'il a constituée sur le sujet des surfaces et des courbes gauches. Hill n'explique pas comment il a formé cette bibliographie et se contente de présenter rapidement les différentes sections qu'il a établies. Sur les 3 715 références de sa bibliographie, il en évoque 205 se rapportant aux surfaces cubiques, ce qui concorde avec ce qu'écrit Henderson. Néanmoins, sur ces 205, Hill n'en donne explicitement que trois : d'une part, un article de Leopold Mossbrugger, [Mossbrugger 1841], qui est d'après Hill chronologiquement le premier à « traiter spécifiquement de la surface cubique », [Hill 1897, p. 137] ; d'autre part, les deux articles de Cayley et de Salmon sur les vingt-sept droites, [Cayley 1849 ; Salmon 1849], qui sont selon Hill « les premiers articles anglais listés dans cette section [sur les surfaces cubiques] », [Hill 1897, p. 137].

Henderson semble donc avoir repris telle quelle l'information concernant l'article de Mossbrugger dans son propre résumé historique. Henderson frôle d'ailleurs ici la paraphrase : comparer

> Alors qu'il ne fait aucun doute que la classification des surfaces cubiques est achevée, le nombre d'articles se rapportant à ces surfaces et continuant à apparaître d'année en année fournit d'abondantes preuves du fait qu'elles exercent encore la même fascination qu'au moment de la découverte des vingt-sept droites sur la surface cubique. [...] Le premier article à traiter spécifiquement avec la surface cubique est de L. Mossbrugger [21]. [Henderson 1915, p. 1]

avec

> Il est remarquable que le premier article que je peux trouver qui traite spécifiquement avec la surface cubique est un article de L. Mossbrugger [...]. Bien que l'on puisse dire que la classification des surfaces cubiques est pratiquement achevée, l'étude de ces surfaces semble, encore aujourd'hui, nourrir la même fascination que lorsque fut annoncée la découverte de l'existence et des relations des vingt-sept droites de la surface cubique générale [22]. [Hill 1897, p. 137]

Henderson s'est donc bel et bien servi de l'article de Hill, [Hill 1897]. En revanche, rien ne permet de dire s'il a eu accès à la bibliographie de Hill elle-même. Celle-ci ne semble

20. En 1897, Hill (1864-1941) était *tutor* à la *Columbia University*. Il avait obtenu son doctorat en 1895 à la *Clark University* avec une thèse intitulée « On Quintic Surfaces ». Voir la nécrologie [Hill 1943].

21. « While it is doubtless true that the classification of cubic surfaces is complete, the number of papers dealing with these surfaces which continue to appear from year to year furnish abundant proof of the fact that they still possess much the same fascination as they did in the days of the discovery of the twenty-seven lines upon the cubic surface. [...] The first paper that deals specifically with the cubic surface was by L. Mossbrugger ».

22. « It is remarkable that the first paper that I can find that deals specifically with the cubic surface is one by L. Mossbrugger [...]. Although one one may say that the classification of cubic surfaces is practically complete, the study of these surfaces appears, still to-day, to have the same fascination as was exhibited when the discovery of the existence and the relations of the 27 lines of the general cubic surface was first announced ».

d'ailleurs pas avoir été publiée — elle n'est en tout cas recensée ni dans le *Jahrbuch* ni sur *MathSciNet*. Remarquons pour finir sur ce point que si l'article de Hill mentionne bien une section sur les surfaces cubiques, rien n'est dit sur une supposée sous-section qui concernerait en particulier le sujet des vingt-sept droites.

1.2.2 Le *Catalogue of Scientific Papers*

Pour rappel, le *Catalogue of Scientific Papers*, également cité par Henderson, est le fruit d'une entreprise de recension bibliographique d'articles scientifiques parus dans des périodiques, menée par la *Royal Society of London* entre le milieu du XIXe siècle et le début du XXe siècle. Le *Catalogue* se compose de 19 volumes publiés entre 1867 et 1925, listant les articles scientifiques publiés entre 1800 et 1900. Entre 1908 et 1914 ont également été publiés trois volumes d'un *subject index* visant à classifier les articles recensés jusqu'alors dans le *Catalogue*. Paru en 1908, le premier volume, intitulé *Pure Mathematics*[23], est celui évoqué par Henderson.

Les premières divisions du volume de *Pure Mathematics* sont données en table 1.2. Les sections reproduites dans cette table sont encore subdivisées en plusieurs numéros, comprenant différents items. Sous ces items sont enfin listées les références bibliographiques, parfois regroupées par mots-clés. Par exemple, le détail du numéro correspondant à « Algebraic Curves and Surfaces of Degree Higher than the Second », dans lequel l'item « Configurations » répertorie entre autres des articles ayant « 27 straight lines » et « Triple tangent planes » dans leurs mots-clés, est reproduit en table 1.3. Si les auteurs du *Catalogue* n'expliquent pas comment ils ont créé et attribué ces mots-clés, on peut constater qu'ils reprennent souvent (mais pas systématiquement) les termes des titres des articles classifiés. Par exemple,une note de Camille Jordan a pour titre « Sur une nouvelle combinaison des vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre » et a pour mots-clés « 27 straight lines, new combination », [Jordan 1870a] ; un article de Cayley a pour titre « On the Triple Tangent Planes of Surfaces of Third Order » et a pour mots-clés « Triple tangent planes », [Cayley 1849][24], etc.

Par l'existence des mots-clés, les vingt-sept droites forment donc une rubrique *a priori* bien identifiable dans le *Catalogue*. Mais l'ensemble de toutes les références bibliographiques de Henderson n'est pas égal à l'ensemble des articles ayant pour mots-clés « 27 straight lines » ou « Triple tangent planes ». Précisons cela.

La bibliographie de Henderson est située à la fin du livre *The Twenty-seven Lines*. Elle est intitulée « A Bibliography of Books and Papers Referring to the Subject of the Present

23. Le deuxième volume est intitulé *Mechanics* et le troisième *Physics*. La publication s'est arrêtée à ce troisième volume en raison de la Première Guerre mondiale.

24. Rappelons que cet article [Cayley 1849] est celui qui contient deux des premières démonstrations de l'existence des vingt-sept droites, ce qui indique que les mots-clés « Triple tangent planes » sont *a priori* associés de très près aux vingt-sept droites.

PURE MATHEMATICS

ARITHMETIC AND ALGEBRA

— Foundations of Arithmetic

— Universal Algebra

— Theory of Groups

ALGEBRA AND THEORY OF NUMBERS

— Elements of Algebra

— Linear Substitutions

— Theory of Equations

— Theory of Numbers

ANALYSIS

— Foundations of Analysis

— Theory of Functions of Complex Variables

— Algebraic Functions and their Integrals

— Other Special Functions

— Differential Equations

— Differential Forms and their Differential Invariants

— Analytical Methods connected with Physical Problems

— Difference Equations and Functional Equations

GEOMETRY

— Foundations

— Elementary Geometry

— Geometry of Conics and Quadrics

— Algebraic Curves and Surfaces of degree higher than the second

— Transformations and General Methods for Algebraic Configurations

— Infinitesimal Geometry; applications of Differential and Integral Calculus to Geometry

— Differential Geometry; applications of Differential Equations to Geometry

APPENDIX

TABLE 1.2 – Classification des mathématiques pures du *Catalogue of Scientific Papers*. Chaque item écrit ici est encore subdivisé en plusieurs numéros. En outre, certaines de ces subdivisions sont données avant la partie « Arithmetic and Algebra ». Elles concernent des sujets comme la philosophie, l'histoire, mais aussi les tables de valeurs de fonctions, les instruments de calcul et les modèles.

Algebraic Curves and Surfaces of degree higher than the second

7600 General

7610 Metrical and projective properties of algebraic plane curves of degree higher than the second

7630 Special plane algebraic curves

7640 Algebraic surfaces of degree higher than the second

— Contacts, and Tangent Lines and Planes

— Surfaces, 2nd and 3rd, 2nd, 3rd and 4th, degrees

— Surfaces, 3rd degree

— Configurations

– 27 real straight lines, forms of surfaces containing.
– — straight lines.
– — — —, delineation.
– — — —, determination and classification of surfaces with respect to.
– — — —, equation.
– — — —, — determining, resolution.
– — — —, groups of substitutions connected with.
– — — —, new combination.
– — — —, and parabolic curve.
– — — —, representation on plane.
– — — — and 45 triple tangent planes.
– — — — — — — — — — and 36 double-sixers, construction of models showing lines.
– Triple tangent planes.
– — — —, Cayley's theorem, proof.
– — — —, polyhedral configurations.
– — — —, property.

— Surfaces, 3rd and 4th, 4th, 4th and 5th, 5th, $(m+n)$th, nth degrees

7650 Special algebraic surfaces

— Anallagmatic surfaces

— Kummer's surface

— Steiner's surface

— Surfaces, 3rd degree, 3rd and 4th degrees

— Surfaces, 4th degree

— Surfaces, 5th, 6th, 7th, 8th, nth, $(n+2)$th degrees

— Tore or Anchor-ring

— Wave surface

7660 Skew algebraic curves

TABLE 1.3 – Détail de la section « Algebraic Curves and Surfaces of degree higher than the second » du *Catalogue of Scientific Papers*. À noter qu'à part « 27 straight lines » et « Triple tangent planes » (seuls) qui regroupent respectivement 7 et 3 articles, tous les autres mots-clés sont associés à un unique article. En outre, l'item « Configurations » comporte d'autres mots-clés que ceux écrits dans cette table.

Memoir » et comporte 75 références [25] publiées entre 1849 et 1911. Plusieurs constatations peuvent être faites à son sujet. D'abord, elle ne coïncide pas avec l'ensemble des références données dans le corps du livre, c'est-à-dire le résumé historique, l'introduction et les sept chapitres. Plus précisément, si toutes les références données dans l'introduction et les sept chapitres sont présentes dans la bibliographie, il y en a d'autres, issues du résumé historique, qui n'y apparaissent pas. Ces références sont facilement identifiables. Viennent d'abord les articles de Hill et de Mossbrugger dont nous avons déjà parlé [Hill 1897 ; Mossbrugger 1841] ; un article de Sylvester qui ne se rapporte pas aux surfaces cubiques, mais dans lequel quelques commentaires les évoquent, [Sylvester 1866-69] ; trois articles donnés en référence dans le paragraphe concernant les variétés cubiques dans un espace de dimension 4, [C. Segre 1887 ; C. Segre 1889 ; Richmond 1902]. Mais la plus grande masse des références du résumé historique qui ne sont pas reprises dans la bibliographie se rapportent au « point de vue de la théorie des groupes », ce qui représente 18 items — en fait, seules deux références citée à ce sujet apparaissent dans la bibliographie, [Jordan 1869a ; Kasner 1903].

Réciproquement, certaines références de la bibliographie ne sont citées à aucun endroit du livre. Or, on peut remarquer que la plupart d'entre elles y ont des titres erronés. Par exemple, le titre de [Affolter 1874] est « Zur Theorie der Flächen dritter Ordung », mais il devient « The twenty-seven lines on the cubic surface » chez Henderson ; de même, le titre de [Caron 1880] est « Sur l'épure des vingt-sept droites d'une surface du troisième degré, dans le cas où ces droite sont réelles », qui devient « Delineation of the twenty-seven lines upon the cubic surface » dans la bibliographie du livre de Henderson. Ces incorrections semblent en fait être des reprises des mots-clés du *Catalogue of Scientific Papers* sous lesquels ils sont référencés. Cette hypothèse est confirmée par le fait que pour ces références litigieuses, la pagination donnée n'est jamais complète : seule la page de début est indiquée, comme dans le *Catalogue*, au contraire des autres références de la bibliographie de Henderson.

En comptant l'ensemble de toutes les références bibliographiques présentes dans [Henderson 1915], on obtient une liste de 99 items. Cette liste est donnée en annexe B ; les titres y ont été corrigés et leur provenance dans le livre de Henderson (résumé historique ou section bibliographique) y est indiquée.

À partir de ces 99 références, regardons comment les 68 qui sont des articles publiés avant 1901 sont répartis dans le *Catalogue* [26]. Elles sont 59 à appartenir à la section de géométrie, dont 2 (resp. 2, resp. 5) qui sont également listées dans la section d'arithmétique et d'algèbre (resp. la section d'analyse, resp. la section générale) ; 3 à appartenir seulement à cette section d'arithmétique et d'algèbre ; 2 à appartenir seulement à la section d'analyse ;

25. La liste elle-même en comporte une de plus, qui est une redondance. Il s'agit de « On the Double-sixers » de Cayley et daté de 1879, mais dont les références (*Trans. Camb. Phil. Soc.*, vol. XII, p. 366) renvoient en fait à [Cayley 1873], qui est également présent dans la bibliographie de Henderson.

26. Rappelons que les recensions du *Catalogue* s'arrêtent en 1900 et ne concernent que des articles publiés dans des revues. En particulier, ni les livres ni les thèses n'y sont listés.

1 à appartenir seulement à la section générale. En outre, 3 articles n'ont pas été localisés [27]. Le détail de la répartition est donné dans le tableau de l'annexe B.

Parmi les 59 références apparaissant dans la section de géométrie, il y en a 44 qui proviennent du numéro sur les surfaces algébriques de degré supérieur au second. Ces 44 comportent en particulier toutes les références ayant « 27 straight lines » ou « Triple tangent planes » dans leurs mots-clés, ce qui représente respectivement 20 et 6 items. Le reste se répartit dans diverses autres numéros de la section géométrique.

Il est clair que le *Catalogue of Scientific Papers*, ou du moins son index, a été utilisé par Henderson. L'argument le plus fort en faveur de cette assertion est, semble-t-il, la présence dans *The Twenty-seven Lines* de références ayant un titre erroné, et dont les mauvais titres reprennent justement les mots-clés du *Catalogue* contenant « 27 straight lines ». Comme écrit précédemment, toutes les entrées du *Catalogue* étiquetées avec ces mots-clés sont présentes dans la bibliographie de Henderson : ce dernier a ainsi manifestement voulu compléter sa bibliographie avec le *Catalogue*.

Les autres références de Henderson proviennent de divers endroits du *Catalogue*, que ce soit dans la partie sur les surfaces algébriques ou dans les sections qui ne relèvent pas de la géométrie. Ce constat permet de réfuter l'hypothèse que Henderson n'a utilisé que le *Catalogue* pour sa bibliographie — d'ailleurs, cette dernière contient aussi des éléments publiés après 1900.

Mais l'éparpillement dans le *Catalogue* des articles référencés par Henderson met en lumière un autre problème : le sujet des vingt-sept droites ne semble pas pouvoir être circonscrit par une étude d'articles qui leur seraient principalement dévolus. En particulier, la possible exhaustivité (entre 1800 et 1900) que l'on pourrait imaginer découler de l'existence de mots-clés « 27 straight lines » est loin d'exister. Par exemple, même les deux articles acceptés comme fondateurs en ce qui concerne le sujet des vingt-sept droites, [Cayley 1849 ; Salmon 1849], ne sont pas référencés avec ces mots-clés.

En tout cas, la bibliographie de Henderson, puisqu'elle comprend strictement la partie du *Catalogue* associée aux mots-clés « 27 straight lines », semble plus prometteuse que le *Catalogue* pour espérer obtenir un corpus raisonnable de textes concernant le sujet des vingt-sept droites. Afin de mesurer cela, je vais à présent utiliser un autre outil de recension, le *Jahrbuch über die Fortscrhitte der Mathematik*.

1.2.3 Comparaison avec le *Jahrbuch*

Au contraire de l'index du *Catalogue*, le *Jahrbuch* ne possède pas de rubrique correspondant au sujet des vingt-sept droites. Avec le moteur de recherche du site web de

27. Le premier est [Steiner 1856b], reprise exacte de [Steiner 1856a] qui est lui répertorié dans le *Catalogue*. Le deuxième est [Cayley 1868a] qui n'apparaît pas non plus dans le volume de recension du *Catalogue* correspondant. Le dernier est [Sylvester 1866-69], que je n'ai pas réussi à trouver.

Zentralblatt, j'ai d'abord listé les publications parues entre 1868 (date de début des recensions du *Jahrbuch*) et 1911 dont le titre contient « vingt-sept droites » ou ses équivalents anglais, allemand et italien.

Cette recherche fournit 34 résultats dont seulement 6 nouveaux (parmi lesquels 4 sont postérieurs à 1900) par rapport aux références bibliographiques de Henderson, si l'on omet les publications comme les courtes notes annonçant les résultats d'un article plus important qui est lui référencé chez Henderson. Une recherche de « vingt-sept droites » dans les titres n'apporte donc que peu de nouvelles publications — cela semble d'ailleurs conforter le fait que les mots-clés du *Catalogue* sont souvent créés à partir des titres des articles correspondants.

J'ai ensuite modifié la recherche en sélectionnant des textes dont le titre ou le rapport contiennent « vingt-sept droites ». Cette fois, 101 résultats sont obtenus, parmi lesquels 66 n'apparaissent pas parmi les références bibliographiques de Henderson et dont l'un concerne vingt-sept droites qui n'ont aucun rapport avec celles des surfaces cubiques.

Une bonne partie des nouveaux travaux ainsi trouvés sont des prolongements d'autres travaux qui apparaissent chez Henderson. On a par exemple toute une série d'articles de Dickson et de William Burnside (tous datés de la première décennie du XX^e siècle) qui se rattachent à l'étude de groupes associés aux vingt-sept droites d'une surface cubique. On a aussi un article de Geiser, [Geiser 1869c], où est établi un lien entre les droites d'une surface cubique et celles de surfaces quartiques particulières — cet article apparaîtra de façon naturelle dans la suite de la thèse, parce qu'il est lié à deux autres publications, [Geiser 1869b ; Jordan 1870b], qui sont elles discutées par Henderson.

En revanche, le repérage effectué avec le *Jahrbuch* met en évidence certains travaux qui n'apparaissent pas du tout chez Henderson : ceux de Clebsch sur la représentation de surfaces sur un plan. Ces travaux renvoient en particulier à un article de 1866 (qui n'est pas référencé par le *Jahrbuch* puisqu'il est antérieur à 1868), où Clebsch établit une représentation de la surface cubique sur un plan, c'est-à-dire qu'il montre comment construire (en termes modernes) une application birationnelle entre la surface cubique et le plan projectif, [Clebsch 1866]. En outre, une attention particulière est portée par Clebsch sur le comportement les vingt-sept droites vis-à-vis de l'application ainsi construite. Ces travaux de Clebsch apparaîtront eux aussi de façon plus saillante dans la suite de la thèse, et j'aurai alors l'occasion de les discuter plus précisément.

Je ne décrirai pas davantage les références bibliographiques obtenues par le *Jahrbuch*, le but étant ici surtout de souligner les difficultés de repérage du sujet des vingt-sept droites. Ainsi, bien que les vingt-sept droites forment explicitement une rubrique dans le *Catalogue*, elles se trouvent dans bien des publications qui y échappent. Cela montre donc des décalages existant entre les différents outils de repérage potentiels du sujet. On gardera en particulier à l'esprit que l'histoire proposée par Henderson manque un certain nombre de textes concernant le sujet des surfaces cubiques et de leurs vingt-sept droites.

1.3 Le résumé historique de Henderson disséqué

Je reviens maintenant à la description détaillée du résumé historique de *The Twenty-seven Lines* et des articles qui y sont cités. Cette description est faite en suivant strictement l'ordre d'écriture adopté par Henderson. Si l'ordre chronologique sera ainsi mis à mal, je le rétablirai dans le paragraphe récapitulatif final afin de mettre en exergue les renversements opérés par Henderson.

En revanche, à l'inverse de ce dernier, j'entrerai davantage dans les détails mathématiques des textes cités. Cela aura pour effet de montrer que le rangement thématique de ces textes n'est pas systématique, c'est-à-dire qu'un certain nombre d'entre eux pourraient appartenir à plusieurs des thèmes de Henderson, au contraire de ce que laisse supposer la lecture seule du résumé historique. Cette porosité entre les différents thèmes sera encore soulignée par l'existence de citations entre des articles classés par Henderson dans différents paragraphes.

Nous avons déjà vu que le premier paragraphe du résumé historique concerne l'abondante littérature, encore au début du XX^e^ siècle, sur le sujet des surfaces cubiques. Déjà commenté, ce paragraphe ne sera pas repris ici et je commencerai avec celui sur l'article de Mossbrugger.

1.3.1 L'article de Mossbrugger

Comme écrit précédemment, Henderson se base très probablement sur un texte de Hill, [Hill 1897], pour situer la première publication d'un travail concernant spécifiquement les surfaces cubiques en 1841, avec l'article de Mossbrugger, [Mossbrugger 1841]. Cet article propose en fait d'interpréter géométriquement les coefficients des équations générales à la fois des surfaces quadriques et des surfaces cubiques. L'interprétation consiste à montrer que ces coefficients sont égaux à certaines distances relatives aux surfaces en question.

Pour ce qui est d'une surface cubique, Mossbrugger note ainsi son équation

$$z^3 + By^3 + Cx^3 + 3Ayz^2 + 3Dxz^2 + 3Ey^2z + \cdots = 0.$$

Il montre alors que, étant données des valeurs quelconques x, y, x', y', on a par exemple

$$A = -\frac{M_1N_1 + M_2N_2 + M_3N_3}{3PP'},$$

où les points $M_1, \ldots, N_3, P, P'$ sont définis en termes d'intersections et de projetés orthogonaux à partir de la surface cubique et des trois droites d'équations respectives

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = x'' \\ y = y' \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = x'' \\ y = y''. \end{cases}$$

Tout le travail de Mossbrugger consiste à trouver des expressions similaires pour les autres coefficients de l'équation de la surface cubique. Dans tout l'article, il n'est toutefois jamais question de droites incluses dans des surfaces cubiques.

1.3.2 Existence des vingt-sept droites avec Cayley et Salmon

Henderson situe en 1849 les premières publications contenant la preuve d'existence des vingt-sept droites sur toute surface cubique : il s'agit de deux articles du *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, l'un écrit par Arthur Cayley et l'autre par George Salmon [28], ayant pour objet d'étude les surfaces algébriques du troisième ordre, [Cayley 1849 ; Salmon 1849]. Leurs titres respectifs sont « On the Triple Tangent Planes of Surfaces of Third Order » et « On the Triple Tangent Planes to a Surface of the Third Order » : ils n'insistent pas sur les vingt-sept droites, mais plutôt sur les plans tangents triples.

Les deux articles contiennent en tout trois démonstrations de l'existence de vingt-sept droites sur une surface cubique sans point singulier ; l'une d'elles permet aussi de voir que ces droites sont coplanaires trois à trois, et que les plans ainsi définis sont au nombre de quarante-cinq. Cayley et Salmon exhibent également certaines écritures particulières des équations définissant les surfaces cubiques et établissent une liste des équations des quarante-cinq plans contenant les vingt-sept droites trois à trois. Ils proposent en outre trois systèmes de notation des vingt-sept droites ainsi qu'une discussion des cas de surfaces ayant des singularités. Enfin, on trouve quelques résultats divers concernant par exemple les birapports de plans passant par deux droites coplanaires parmi les vingt-sept, ou encore des configurations spéciales de points et de droites obtenues en intersectant la surface cubique pas des plans.

Comme l'écrit Cayley lui-même, le contenu de son article avait été mûri dans une correspondance avec Salmon [29]. C'est notamment ce dernier qui avait trouvé le nombre 27, Cayley ayant vu auparavant que les surfaces cubiques devaient contenir un même nombre fini de droites :

> En conclusion, je me permets de signaler que le sujet tout entier de ce mémoire a été développé dans une correspondance avec M. Salmon, et en particulier que je lui suis redevable de la détermination du nombre de droites sur la surface et des recherches liées à la représentation des vingt-sept droites au moyen des lettres a, b, c, d, e, f comme développées précédemment [30]. [Cayley 1849, p. 132]

28. Sur Cayley, voir [Crilly 2006] ; sur Salmon, voir [Gow 1997 ; Gow 2006].

29. Je n'ai pas pu retrouver cette correspondance. [Crilly 2006, p. 559] indique qu'à la dispersion du *Nachlass* de Cayley, les lettres des mathématiciens alors décédés (ce qui inclut Salmon) n'ont pas survécu, sauf celles de Sylvester. Rod Gow m'a par ailleurs indiqué que la correspondance de Salmon conservée aux archives du *Trinity College* de Dublin ne contient rien de mathématique.

30. « I may mention in conclusion that the whole subject of this memoir was developped in a correspondance with Mr. Salmon, and in particular, that I am indebted to him for the determination of the number of lines upon the surface and for the representation of the twenty-seven lines by means of the letters a, b, c, d, e, f, as developped before. » Voir aussi [Cayley *Œuvres*, vol. 1, p. 589] ou encore [Salmon 1882, p. 496] : « The theory of right lines on a cubical surface was first studied in the year 1849, in a correspondance between Prof. Cayley and me, the results of which were published [in the *Cambridge and*

Les problèmes de la notation et des singularités évoqués dans cette citation seront discutés dans les prochains paragraphes. En ce qui concerne les démonstrations d'existence des vingt-sept droites, deux sont données dans l'article de Cayley, alors que la troisième se trouve dans celui de Salmon.

La première démonstration présentée par Cayley suppose acquise l'existence d'une droite sur la surface cubique. L'intersection d'un plan avec une surface cubique devant être une courbe cubique, celle-ci se compose, lorsque le plan contient la droite donnée, de cette dernière et d'une conique. Cayley affirme alors que parmi tous les plans contenant la droite donnée, il y en a exactement 5 pour lesquels la conique résiduelle dégénère en deux droites : cela donne ainsi $1+5\times 2 = 11$ droites (voir figure 1.2). Les plans contenant ainsi trois droites incluses dans la surface sont appelés *plans tangents triples* par Cayley[31]. Cayley procède alors au comptage des droites obtenues de cette façon. Étant donné un

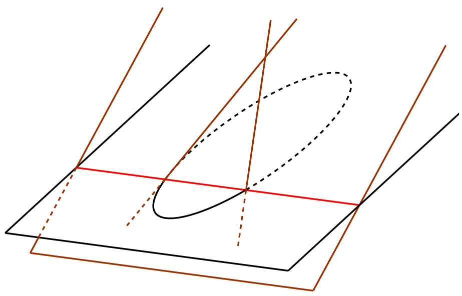


FIGURE 1.2 – Parmi les plans contenant une droite donnée (en rouge), il y en a 5 (comme celui en marron) pour lesquels la conique résiduelle dégénère en 2 droites. Un tel plan est appelé *plan tangent triple*.

plan tangent triple, chacune de ses trois droites est contenue dans 4 autres plans tangents triples. Ces 12 nouveaux plans tangents triples donnent ainsi lieu à 24 nouvelles droites, ce qui fait 27 en comptant les trois du plan tangent triple de départ. En outre, Cayley compte par ce biais 45 plans tangents triples.

Cayley vérifie ensuite que toute droite de la surface cubique a forcément été obtenue par ce procédé. En effet, comme les trois droites d'un plan tangent triple forment exactement son intersection avec la surface, toute autre droite D incluse dans celle-ci intersecte le plan tangent triple en un point situé sur une de ses trois droites. Avec cette droite, D définit donc un plan ; alors ce dernier coupe la surface cubique en déjà deux, donc finalement trois droites[32]. Il s'agit donc d'un plan tangent triple, et donc D avait bien déjà été comptée. Ainsi, Cayley trouve exactement vingt-sept droites et quarante-cinq plans tangents triples.

Dublin Mathematical Journal]. Prof. Cayley first observed that a definite number of right lines must lie on the surface; the determination of that number [has been] supplied by me. »

31. Ces plans sont en effet tangents à la surface cubique en chacun des points d'intersection mutuels des trois droites qu'ils contiennent

32. L'intersection du plan et de la surface est une courbe cubique qui, ici, contient déjà deux droites : c'est qu'elle dégénère en trois droites.

Pour la deuxième démonstration, Cayley commence par souligner qu'au contraire de la première, elle ne présuppose pas l'existence d'une droite incluse dans la surface :

> Le nombre de droites sur la surface peut également être obtenu par la méthode suivante, qui a l'avantage de ne pas supposer *a priori* l'existence d'une droite sur la surface [33]. [Cayley 1849, p. 119]

Dans cette méthode, Cayley considère un point de l'espace n'appartenant pas à la surface cubique et le cône tangent à cette dernière ayant pour sommet le point donné, c'est-à-dire le cône formé de toutes les droites passant par ce point et qui sont tangentes à la surface. Il établit ensuite une correspondance biunivoque entre les droites incluses dans la surface et les plans doublement tangents au cône. Cayley invoque alors une article de Salmon, [Salmon 1847], où sont calculés l'ordre ainsi que le nombre d'arêtes doubles et cuspidales [34] d'un cône tangent à une surface de degré n, qui sont respectivement 6, 0 et 6 dans le cas des surfaces cubiques $n = 3$. Il cite enfin le livre *Theorie der algebraischen Curven* de Julius Plücker, [Plücker 1839], pour conclure :

> Par la formule de la p. 211 de *Theorie der algebraischen Curven* de Plücker, énoncé de sorte à s'appliquer aux cônes plutôt qu'aux courbes planes (à savoir que, n étant l'ordre, x le nombre de droites doubles, y celui de droites cuspidales, u celui de plans tangents doubles, alors
>
> $$u = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (2x+3y)(n^2-n-6) + 2x(x-1) + 6xy + \frac{9}{2}y(y-1)),$$
>
> le nombre de plans tangents doubles est vingt-sept, ce qui est par conséquent également le nombre de droites sur la surface [35]. [Cayley 1849, p. 119]

Enfin, la troisième démonstration d'existence des vingt-sept droites est proposée dans l'article de Salmon, [Salmon 1849]. Elle s'inscrit dans un problème plus général qui y est traité : étant donnée une surface algébrique de degré n, déterminer le degré du lieu de ses points par lesquels on peut mener une droite lui étant tangente avec un contact d'ordre au moins 4. Pour $n = 3$, une telle droite est nécessairement incluse dans la surface, de sorte que le lieu en question devient plus simplement l'ensemble formé de telles droites, en nombre égal au degré cherché.

33. « The number of lines on the surface may also be obtained by the following method, which has the advantage of not assuming *a priori* the existence of a line upon the surface. »

34. Une arête du cône est *double*, resp. *cuspidale*, lorsque le point selon lequel elle touche la surface est un point double, resp. un point de rebroussement de première espèce (ou *cusp*), de la courbe intersection de la surface avec le cône.

35. « [B]y the formula in Plücker's "Theorie der Algebraischen Curven," [sic] p. 211, stated so as to apply to cones instead of plane curves, (viz. n being the order, x the number of double lines, y that of the cuspidal lines, u that of the double tangents planes, then

$$u = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (2x+3y)(n^2-n-6) + 2x(x-1) + 6xy + \frac{9}{2}y(y-1).)$$

The number of double tangent planes is twenty-seven, which is therefore also the number of lines upon the surface. »

Pour résoudre ce problème, Salmon utilise des méthodes provenant d'un article antérieur de Cayley, [Cayley 1847]. Prenant deux points de coordonnées (homogènes) x, y, z, w et x', y', z', w', il paramètre la droite qui les relie par les coordonnées $\ell x + mx'$, $\ell y + my'$, $\ell z + mz'$, $\ell w + mw'$. Substituer ces dernières dans l'équation de la surface donne une équation homogène en $\ell : m$ dont les racines donnent les coordonnées des points où la droite rencontre la surface.

Si cette surface a pour équation $U = 0$, Salmon effectue ladite substitution et obtient

$$\ell^n U + \ell^{n-1} m\delta U + \frac{1}{1\cdot 2}\ell^{n-2}m^2\delta^2 U + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\ell^{n-3}m^3\delta^3 U + \cdots$$
$$+ \cdots m^n U' + m^{n-1}\ell\delta' U' + \frac{1}{1\cdot 2}m^{n-2}\ell^2\delta'^2 U' + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}m^{n-3}\ell^3\delta'^3 U' + \cdots = 0$$

avec $\delta = x'\frac{d}{dx} + y'\frac{d}{dy} + z'\frac{d}{dz} + w'\frac{d}{dw}$ et $\delta' = x\frac{d}{dx'} + y\frac{d}{dy'} + z\frac{d}{dz'} + w\frac{d}{dw'}$. Pour que le point de coordonnées x', y', z', w' soit un point de contact d'ordre au moins 4, Salmon obtient donc les conditions

$$U' = 0, \qquad \delta U' = 0, \qquad \delta'^2 U' = 0, \qquad \delta'^3 U' = 0.$$

Le lieu cherché s'obtient ainsi en éliminant x, y, z, w parmi ces quatre équations. En se référant au même article de Cayley de 1847, Salmon indique qu'il obtient une équation de degré $(11n - 24)$. Le lieu cherché est donc une courbe de degré[36] $n(11n - 24)$, soit 27 lorsque $n = 3$. Comme expliqué plus haut, cela donne dans ce cas le nombre de droites incluses dans la surface.

Après avoir détaillé ces démonstrations, nous voyons (au moins partiellement) que les recherches de Cayley et Salmon sur les vingt-sept droites se rattachent à d'autres travaux de la première moitié du XIXe siècle, relatifs aux courbes et surfaces algébriques ou à des techniques d'élimination. Le sujet des courbes et surfaces de petit degré est donc, à l'époque, relativement familier pour Cayley et Salmon. Il est d'ailleurs intéressant de noter que Cayley avait déjà considéré une surface cubique contenant des droites (mais pas vingt-sept) dans un article paru cinq ans plus tôt, [Cayley 1844] : pour étudier certaines courbes cubiques, il était parti d'une surface cubique définie par la condition de contenir les six arêtes d'un tétraèdre donné. Cette remarque montre bien que le sujet des surfaces cubiques et des droites incluses n'était pas tout à fait nouveau en 1849.

1.3.3 Le mémoire de Steiner

D'après Henderson, un mémoire de Steiner constitue la base d'une « théorie purement géométrique » des surfaces cubiques, [Steiner 1856b]. Il correspond à une communication faite par Steiner à l'Académie des sciences de Berlin le 31 janvier 1856. En omettant

36. Coquille dans l'article, où est écrit « $11(un - 24)$ ».

souvent d'indiquer les démonstrations, Steiner y énonce de nombreux résultats concernant les surfaces cubiques.

Une série de ces résultats concernent les façons d'engendrer des surfaces cubiques, c'est-à-dire de les construire à partir d'objets de base comme des plans ou des surfaces quadriques. Par exemple, Steiner indique que si deux trièdres et un point quelconque de l'espace sont donnés, alors il existe une seule surface cubique contenant le point donné ainsi que les neuf droites qui sont les intersections mutuelles des deux trièdres. Un autre exemple décrit par Steiner consiste à partir d'un faisceau de surfaces quadriques et d'un faisceau de plans projectifs l'un à l'autre [37] : deux tels faisceaux engendrent alors une surface cubique, au sens où toutes les courbes coniques résultant de l'intersection de deux éléments correspondants des faisceaux forment une surface du troisième ordre.

D'autres résultats du mémoire de Steiner concernent des objets particuliers qui peuvent être associés à une surface cubique. Les exemples les plus simples de tels objets sont les vingt-sept droites, les quarante-cinq triangles que forment ces droites trois à trois [38], ou encore les trièdres qui ont par la suite été appelés *trièdres de Steiner*.

Expliquons, en suivant Steiner, ce que sont ces trièdres. Parmi les quarante-cinq triangles formés à partir des vingt-sept droites d'une surface cubique, on en considère deux, A et B, dont les côtés notés respectivement a, a_1, a_2 et b, b_1, b_2 sont supposés être tous distincts. Soit δ la droite d'intersection des plans contenant A et B. Alors les points d'intersection des côtés de A et B avec δ coïncident deux à deux [39]. Quitte à changer les notations, on peut donc supposer que les côtés qui se coupent sur δ sont a et b, a_1 et b_1, a_2 et b_2. Ces paires de droites définissent alors trois nouveaux triangles [40] $A_1 = abc$, $B_1 = a_1b_1c_1$ et $C_1 = a_2b_2c_2$ (voir la figure 1.3). Enfin, les trois droites c, c_1, c_2 sont sécantes deux à deux et forment donc un triangle C. Les deux trièdres définis par les triangles A, B, C d'une part, et A_1, B_1, C_1 d'autre part, forment une *paire de trièdre conjugués* ou encore une *paire de trièdres de Steiner*. Ce dernier montre en outre qu'il existe 120 telles paires de trièdres, et que ces paires se regroupent trois à trois en 40 triplets, de sorte que chaque triplet contienne l'ensemble de toutes les vingt-sept droites.

---

37. Un *faisceau de plans* est l'ensemble des plans passant par une droite donnée de l'espace. Un *faisceau de surfaces quadriques* est l'ensemble de telles surfaces passant par une courbe gauche d'ordre 4. Les deux faisceaux sont dits *projectifs* si on a associé à chaque plan du premier, une surface du second. Écrivons-le avec des équations : on se donne une droite qui est l'intersection de deux plans d'équations respectives $a = 0$ et $b = 0$. Alors les plans du faisceau correspondant sont tous les plans ayant une équation de la forme $\lambda a + \mu b = 0$. De même, un faisceau de quadriques est formé de surfaces d'équations de la forme $\lambda P + \mu Q = 0$, où $P = 0$ et $Q = 0$ sont deux équations de surfaces quadriques. En fixant (arbitrairement) de part et d'autre les paramètres λ, μ, on associe les faisceaux de façon projective : au plan $\lambda a + \mu b = 0$ correspond la quadrique $\lambda P + \mu Q = 0$, et réciproquement.

38. Steiner parle ainsi plutôt de triangles, là où Cayley et Salmon parlaient de plans tangents triples.

39. En effet, ces points d'intersection, *a priori* au nombre de 6, sont des points communs à δ et à la surface cubique. Or, une telle surface est en général intersectée par une droite en 3 points.

40. Comme par exemple les droites a et b sont sécantes, elles sont coplanaires. Le plan qui les contient coupe la surface cubique en une courbe cubique qui doit donc contenir a et b : c'est qu'elle dégénère en trois droites a, b et c.

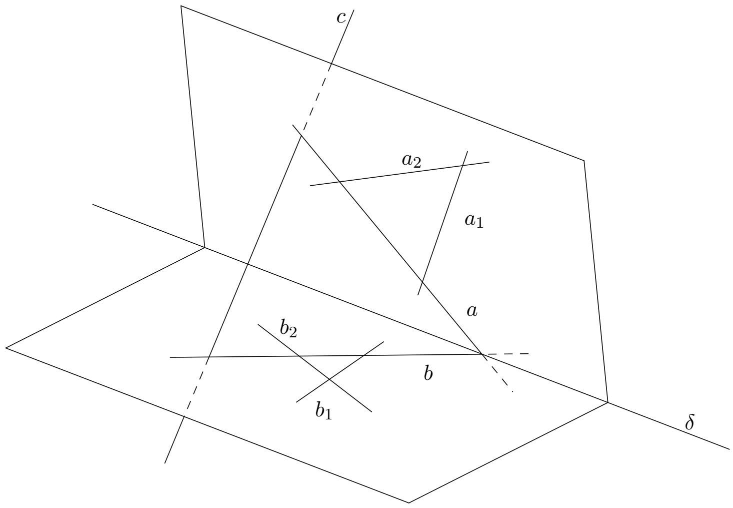


FIGURE 1.3 – Construction partielle d'une paire de trièdres de Steiner. Les droites a, b se coupent sur δ et il existe une droite c avec laquelle elles forment un triangle A_1.

Dans tout son mémoire, Steiner ne cite aucun travail antérieur fait par d'autres mathématiciens ou par lui-même sur quelque sujet que ce soit. Le seul nom de mathématicien qui apparaît est celui de Jean-Victor Poncelet, pour un résultat sur des faisceaux de surfaces quadriques [41]. En particulier, Steiner ne mentionne pas les travaux de Cayley et de Salmon sur les vingt-sept droites. Il était pourtant au courant de la découverte des vingt-sept droites dès 1853, comme le montre une de ses notes personnelles :

> Paris. Juillet 1853. Notes.
>
> 1. *De Sylvester.* Un anglais (Cayley) aurait trouvé que f^3 [une surface cubique] contient en général 27 droites. Voir combien j'en ai trouvé par les difficiles considérations de polaires. Pour une surface déterminée f_1^3, il n'y avait que 6 droites ; pour la panpolaire [42] F^3 sur [un faisceau de quadriques] $B(f^2)$ seulement 11 droites [43]. [Graf 1896, p. 91]

On pourra noter que Steiner n'a pas l'air de connaître Cayley en 1853 [44]. Ce dernier écrit quant à lui dans des notes à ses *Collected Papers* : « comme mentionné à la conclusion du

41. [Steiner 1856b, p. 134].

42. Étant donnés une surface F d'équation $U(x, y, z, w) = 0$ et un point M' de coordonnées x', y', z', w', on appelle *première polaire* de M' par rapport à F, la surface d'équation $x'\frac{\partial U}{\partial x} + y'\frac{\partial U}{\partial y} + z'\frac{\partial U}{\partial z} + w'\frac{\partial U}{\partial w} = 0$. Étant donnés un faisceau de surfaces F et un point M', on appelle *panpolaire* de M', le faisceau des premières polaires de M' par rapport aux surfaces F.

43. « Paris. Juli 1853. Notizen. 1. *Von Silvester* [sic]. Ein Engländer (Cayley) soll gefunden haben: dass f^3, im Allgemeinen, 27 G. enthält. Nachzusehen wie viele ich bei den schwierigen Polar-Betrachtungen gefunden habe. Bei einer bestimmten f_1^3 zeigten sich früher nur 6 G; bei der Panpolare F^3 auf $B(f^2)$ nur 11 G. »

44. En fait, les deux mathématiciens n'ont jamais été en relation proche. À la mort de Steiner en 1863, Cayley écrit en effet à Schläfli : « [Prof. Steiner's death] is indeed a great loss to mathematical science. I had not the advantage of a personal acquaintance with him. » [Graf 1905, p. 31].

mémoire [sur les vingt-sept droites], [Cayley 1849], le sujet tout entier a été développé dans une correspondance avec Dr. Salmon. Les recherches de Steiner sur les surfaces cubiques sont plus tardives [45] ».

Le seul autre commentaire que j'ai pu trouver à ce sujet se trouve dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Jordan, où ce dernier précise que « MM. Cayley et Salmon avaient découvert et étudié ces droites avant Steiner [46] », [Jordan 1870b, p. 665]. En particulier, aucune des lettres que j'ai pu lire (dont celles déjà citées entre Steiner et Schläfli ainsi qu'entre Cayley et Schläfli, mais également celles de Sylvester [47]) ne contient de trace de dispute concernant la priorité de la découverte des vingt-sept droites. Au contraire, dans ses lettres à Schläfli, Steiner parle souvent des « droites de Cayley [48] » pour désigner les vingt-sept droites d'une surface cubique.

En fait, les articles de Cayley et de Salmon de 1849 semblent avoir peu circulé sur le continent européen, au moins dans les années 1850. On a vu dans la citation précédente que Steiner a été mis au courant des travaux de Cayley par voie orale, *via* Sylvester. De même, c'est Steiner qui a informé oralement Ludwig Schläfli de cela, comme le montre l'extrait suivant d'une lettre de ce dernier à Cayley datant de 1856 :

> La raison [à mon article] m'a été donnée par votre découverte des vingt-sept droites sur la surface du troisième degré, que m'a communiquée oralement M. Steiner. Je n'ai malheureusement pas pu avoir eu main sur votre article correspondant dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, et je risque de donner des résultats de mes recherches sans savoir à quel point elles sont rendues superflues par des publications déjà faites [49]. [Graf 1905, p. 9]

L'article dont parle Schläfli est justement cité par Henderson dans la suite de son résumé historique, dans son paragraphe sur les problèmes de notation des vingt-sept droites et sur les doubles-six.

1.3.4 Notations des vingt-sept droites et notion de « double-six »

Henderson évoque trois systèmes de notation contenus dans les articles de Cayley et de Salmon de 1849 : un premier dû à Cayley, un deuxième de Salmon et un troisième,

45. « As mentionned at the conclusion of the Memoir [Cayley 1849] the whole subject was developped in a correspondence with Dr. Salmon. Steiner's researches upon Cubic Surfaces are of later date. » [Cayley *Œuvres*, vol. 1, p. 589].

46. Cette précision est une note corrective du *Traité* faisant suite à une remarque que Cremona a écrite à Jordan dans une lettre de 1869. Nous y reviendrons.

47. [Parshall 1998].

48. « Cayley'sche Geraden », [Graf 1896, p. 125 et suiv.].

49. « Die Veranlassung dazu gab mir Ihre von Herrn Steiner mir mündlich mitgetheilte Entdeckung der 27 Geraden auf der Fläche 3ten Grades. Ihre betreffende Abhandlung im Cambridge und Dublin Mathematical Journal konnte ich freilich bis jetzt nicht zur Hand bringen, und so wage ich es einiges von den Resultaten meiner Untersuchung vorzulegen, ohne zu wissen, in wie weit dieselben durch bereits Erschienenes überflüssig gemacht sind. »

attribué à Andrew Hart [50]. Les deux premiers systèmes de notation sont présentés dans l'article de Cayley de 1849 alors que le troisième se trouve dans celui de Salmon de la même année, [Cayley 1849 ; Salmon 1849]. Présentons-les brièvement.

Dans son article, après avoir donné ses deux démonstrations de l'existence des vingt-sept droites, Cayley s'attaque au problème de trouver des équations explicites pour les plans tangents triples. Il commence par indiquer qu'il est toujours possible de choisir des coordonnées (homogènes) de l'espace x, y, z, w de sorte que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $w = 0$ sont les équations de plans tangents triples ayant la propriété suivante : les trois droites (parmi les vingt-sept) contenues dans le $w = 0$ sont les intersections respectives de ce plan avec les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Cayley montre alors que l'équation de la surface est de la forme $wP + kxyz = 0$, où P est un polynôme du second ordre et k un paramètre. Il ajoute que le choix de la coordonnée z influe sur le fait que P se scinde en deux facteurs linéaires ou non.

Dans le cas où P n'est pas scindé, Cayley exprime la propriété selon laquelle les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ doivent être tangents à la surface $P = 0$ et obtient ainsi une équation de la surface cubique de la forme

$$\begin{aligned} w \Bigg\{ x^2 + y^2 + z^2 + yz\left(mn + \frac{1}{mn}\right) + zx\left(n\ell + \frac{1}{n\ell}\right) + xy\left(\ell m + \frac{1}{\ell m}\right) + \\ xw\left(\ell + \frac{1}{\ell}\right) + yw\left(m + \frac{1}{m}\right) + zw\left(n + \frac{1}{n}\right)\Bigg\} + kxyz = 0, \end{aligned}$$

où ℓ, m, n sont des paramètres. Sans indiquer de démonstration, Cayley énumère ensuite les équations des quarante-cinq plans tangents triples. Les coefficients de chaque équation s'expriment en fonction de k, ℓ, m, n et chaque équation est nommée par une lettre qui représente également la fonction linéaire définissant le plan en question. Voici quelques exemples :

$$\begin{array}{ll} (w) & w = 0 \\ (\theta) & \ell x + my + nz + w\left[1 + \frac{1}{k}\left(\ell - \frac{1}{\ell}\right)\left(m - \frac{1}{m}\right)\left(n - \frac{1}{n}\right)\right] = 0 \\ (\bar{\theta}) & \frac{x}{\ell} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} + w\left[1 - \frac{1}{k}\left(\ell - \frac{1}{\ell}\right)\left(m - \frac{1}{m}\right)\left(n - \frac{1}{n}\right)\right] = 0 \\ (\xi) & x + \frac{1}{k}\left(m - \frac{1}{m}\right)\left(n - \frac{1}{n}\right) w = 0 \end{array}$$

50. Andrew Searle Hart (1811-1890) était un mathématicien britannique qui était, en 1849, *fellow* au Trinity College de Dublin — il y devint *vice-provost* en 1876 — et collègue de Salmon. Ses quelques publications mathématiques concernent la géométrie des courbes et des surfaces (travaux de géodésie, mais aussi sur les courbes cubiques). Il est également cité en tant que relecteur dans les préfaces de [Salmon 1852 ; Salmon 1882]. Voir [Gow 1997] et la courte notice nécrologique à la p. 78 de l'appendice des *Proceedings of the Royal Irish Academy*, sér. 3, vol. 2, 1891-1893.

$$(\eta) \qquad y + \frac{1}{k}\left(n - \frac{1}{n}\right)\left(\ell - \frac{1}{\ell}\right) w = 0$$

$$(\zeta) \qquad z + \frac{1}{k}\left(\ell - \frac{1}{\ell}\right)\left(m - \frac{1}{m}\right) w = 0$$

$$(\mathrm{x}) \qquad x + \frac{l(p-\alpha) + 2mn}{p+\beta} w = 0$$

$$(\overline{\mathrm{x}}) \qquad x + \frac{\frac{1}{\ell}(p-\alpha) + 2\frac{1}{mn}}{p-\beta} w = 0,$$

où les paramètres α, β, p sont définis par

$$\alpha = \ell mn + \frac{1}{\ell mn}, \qquad \beta = \ell mn - \frac{1}{\ell mn}, \qquad k = \frac{p^2 - \beta^2}{2(p-\alpha)}.$$

Cayley utilise alors ces notations pour les plans tangents triples afin d'en déduire celles des vingt-sept droites. Toujours sans fournir d'explications, il numérote ces droites $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, \ldots, c_9$ en les définissant suivant les cinq plans tangents triples qui les contiennent chacune. Par exemple, la droite contenue dans les plans (w), (x), (ξ), (x) et $(\overline{\mathrm{x}})$ est appelée a_1, celle contenue dans les plans (w), (y), (η), (y) et $(\overline{\mathrm{y}})$ est appelée b_1, etc. Le tout est représenté en un tableau :

$(a_1).(w, x, \xi, \mathrm{x}, \overline{\mathrm{x}})$	$(a_4).(x, \mathrm{g}, \overline{\mathrm{h}}, \overline{\mathrm{l}}, \overline{\mathrm{l}_1})$	$(a_7).(\mathrm{x}, \mathrm{m}_1, \mathrm{n}, \mathrm{q}_1, \mathrm{r})$
$(b_1).(w, y, \eta, \mathrm{y}, \overline{\mathrm{y}})$	$(b_4).(y, \mathrm{h}, \overline{\mathrm{f}}, \overline{\mathrm{m}}, \overline{\mathrm{m}_1})$	$(b_7).(\mathrm{y}, \mathrm{n}_1, \mathrm{l}, \mathrm{r}_1, \mathrm{p})$
$(c_1).(w, z, \zeta, \mathrm{z}, \overline{\mathrm{z}})$	$(c_4).(z, \mathrm{f}, \overline{\mathrm{g}}, \overline{\mathrm{n}}, \overline{\mathrm{n}_1})$	$(c_7).(\mathrm{z}, \mathrm{l}_1, \mathrm{m}, \mathrm{p}_1, \mathrm{q})$
$(a_2).(\xi, \overline{\mathrm{f}}, \theta, \overline{\mathrm{p}}, \mathrm{p}_1)$	$(a_5).(x, \overline{\mathrm{g}}, \mathrm{h}, \mathrm{l}, \mathrm{l}_1)$	$(a_8).(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{m}_1}, \overline{\mathrm{n}}, \overline{\mathrm{q}_1}, \overline{\mathrm{r}})$
$(b_2).(\eta, \overline{\mathrm{g}}, \theta, \overline{\mathrm{q}}, \mathrm{q}_1)$	$(b_5).(y, \overline{\mathrm{h}}, \mathrm{f}, \mathrm{m}, \mathrm{m}_1)$	$(b_8).(\overline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{n}_1}, \overline{\mathrm{l}}, \overline{\mathrm{r}_1}, \overline{\mathrm{p}})$
$(c_2).(\zeta, \overline{\mathrm{h}}, \theta, \overline{\mathrm{r}}, \mathrm{r}_1)$	$(c_5).(z, \overline{\mathrm{f}}, \mathrm{g}, \mathrm{n}, \mathrm{n}_1)$	$(c_8).(\overline{\mathrm{z}}, \overline{\mathrm{l}_1}, \overline{\mathrm{m}}, \overline{\mathrm{p}_1}, \overline{\mathrm{q}})$
$(a_3).(\xi, \mathrm{f}, \overline{\theta}, \mathrm{p}, \overline{\mathrm{p}_1})$	$(a_6).(\mathrm{x}, \mathrm{m}, \mathrm{n}_1, \mathrm{q}, \mathrm{r}_1)$	$(a_9).(\overline{\mathrm{x}}, \mathrm{m}, \mathrm{n}_1, \overline{\mathrm{q}}, \overline{\mathrm{r}_1})$
$(b_3).(\eta, \mathrm{g}, \overline{\theta}, \mathrm{q}, \overline{\mathrm{q}_1})$	$(a_6).(\mathrm{y}, \mathrm{n}, \mathrm{l}_1, \mathrm{r}, \mathrm{p}_1)$	$(b_9).(\overline{\mathrm{y}}, \mathrm{n}, \mathrm{l}_1, \overline{\mathrm{r}}, \overline{\mathrm{p}_1})$
$(c_3).(\zeta, \mathrm{h}, \overline{\theta}, \mathrm{r}, \overline{\mathrm{r}_1})$	$(c_6).(\mathrm{z}, \mathrm{l}, \mathrm{m}_1, \mathrm{p}, \mathrm{q}_1)$	$(c_9).(\overline{\mathrm{z}}, \mathrm{l}, \mathrm{m}_1, \overline{\mathrm{p}}, \overline{\mathrm{q}_1})$.

Enfin, Cayley écrit réciproquement la liste des triplets de droites contenues dans chacun des quarante-cinq plans tangents triples :

(w)	$a_1b_1c_1$	(f)	$a_3b_5c_4$	(l)	$a_5b_7c_9$	(p)	$a_3b_7c_6$
(θ)	$a_2b_2c_2$	(g)	$b_3c_5a_4$	(m)	$b_5c_7a_9$	(q)	$b_3c_7a_6$
$(\overline{\theta})$	$a_3b_3c_3$	(h)	$c_3a_5b_4$	(n)	$c_5a_7b_9$	(r)	$c_3a_7b_6$
(x)	$a_1a_4a_5$	$(\overline{\mathrm{f}})$	$a_2b_4c_5$	$(\overline{\mathrm{l}})$	$a_4b_8c_6$	$(\overline{\mathrm{p}})$	$a_2b_8c_9$
(y)	$b_1b_4b_5$	$(\overline{\mathrm{g}})$	$b_2c_4a_5$	$(\overline{\mathrm{m}})$	$b_4c_8b_6$	$(\overline{\mathrm{q}})$	$b_2c_8a_9$
(z)	$c_1c_2c_3$	$(\overline{\mathrm{h}})$	$c_2a_4b_5$	$(\overline{\mathrm{n}})$	$c_4b_8a_1$	$(\overline{\mathrm{r}})$	$c_2a_8b_9$
(ξ)	$a_1a_2a_3$	(x)	$a_1a_6a_7$	(l_1)	$a_5b_9c_7$	(p_1)	$a_2b_6c_7$
(η)	$b_1b_2b_3$	(y)	$b_1b_6b_7$	(m_1)	$b_5c_9a_7$	(q_1)	$b_2c_6a_7$
(ζ)	$c_1c_2c_3$	(z)	$c_1c_6c_7$	(n_1)	$c_5a_9b_7$	(r_1)	$c_2a_6b_7$
		$(\overline{\mathrm{x}})$	$a_1a_8a_9$	$(\overline{\mathrm{l}_1})$	$a_4b_6c_8$	$(\overline{\mathrm{p}_1})$	$a_3b_9c_8$
		$(\overline{\mathrm{y}})$	$b_1b_8b_9$	$(\overline{\mathrm{m}_1})$	$b_4c_6a_8$	$(\overline{\mathrm{q}_1})$	$b_3c_9a_8$
		$(\overline{\mathrm{z}})$	$c_1c_8c_9$	$(\overline{\mathrm{n}_1})$	$c_4a_6b_8$	$(\overline{\mathrm{r}_1})$	$c_3a_9b_8$.

Ce premier système de notation des vingt-sept droites n'est pas commenté par Cayley, lequel passe tout de suite à la présentation du deuxième.

Pour ce deuxième système de notation (celui dû à Salmon), Cayley repart de l'équation $wP+kxyz=0$, mais suppose cette fois que le polynôme P est scindé en deux facteurs linéaires. En changeant encore une fois les coordonnées de l'espace, Cayley indique que l'équation de la surface peut alors se mettre sous la forme $ace-bdf=0$, où a,b,c,d,e,f sont toutes des formes linéaires. Il fait la remarque que les neuf droites qui sont les intersections mutuelles des plans $a=0, c=0, e=0$ avec $b=0, d=0, f=0$ sont incluses dans la surface, et les note $ab, ad, \ldots, ef$, où par exemple ab désigne la droite intersection des plans $a=0$ et $b=0$.

Cayley poursuit et indique que dans un plan tangent triple contenant la droite ab (par exemple), l'une des deux autres droites du plan rencontre cd et ef, tandis que l'autre rencontre cf et de. Il suggère alors de noter ces droites $ab.cd.ef$ et $ab.cf.de$ respectivement. Les plans tangents triples ainsi utilisés étant à chaque fois au nombre de trois, Cayley adjoint des indices à ces notations, de sorte que les vingt-sept droites sont les suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
ab & ad & af \\
cb & cd & cf \\
eb & ed & ef \\
(ab.cd.ef)_1 & (ab.cd.ef)_2 & (ab.cd.ef)_3 \\
(ad.cf.eb)_1 & (ad.cf.eb)_2 & (ad.cf.eb)_3 \\
(af.cb.ed)_1 & (af.cb.ed)_2 & (af.cb.ed)_3 \\
(ab.cf.ed)_1 & (ab.cf.ed)_2 & (ab.cf.ed)_3 \\
(ad.cb.ef)_1 & (ad.cb.ef)_2 & (ad.cb.ef)_3 \\
(af.cd.eb)_1 & (af.cd.eb)_2 & (af.cd.eb)_3
\end{array}$$

Cayley met ensuite cette notation en relation avec la précédente, c'est-à-dire qu'il indique la correspondance entre les deux. Sa conclusion révèle cependant son insatisfaction devant ces notations :

> Il est très difficile de concevoir la figure complète formée par les vingt-sept droites. Et je pense en effet que cela ne peut guère être accompli sans qu'une notation plus parfaite ne soit découverte [51]. [Cayley 1849, p. 127]

Puisque Cayley connaissait très certainement la notation de Hart présentée dans [Salmon 1849], il est raisonnable de penser que cette remarque s'y applique également.

Dans cette notation, les vingt-sept droites de la surface sont appelées A_1, B_1, C_1, $A_2, \ldots, C_3$, $a_1, \ldots, c_3$, $\alpha_1, \ldots, \gamma_1$, avec la convention que des symboles issus du même alphabet désignent des droites qui se rencontrent lorsque soit les lettres sont identiques, soit les indice le sont. Par exemple, A_1, A_2, A_3 s'intersectent deux à deux (et donc sont incluses dans un même plan tangent triple), de même que A_1, B_1, C_1, etc. Les relations d'incidence entre droites désignées par des symboles issus d'alphabets différents sont données par le

51. « This is of great difficulty in conceiving the complete figure formed by the twenty-seven lines, indeed this can hardly I think be accomplished until a more perfect notation is discovered. »

tableau suivant :

a_1	b_2	c_3	b_1	c_2	a_3	c_1	a_2	b_3
	A_1			B_1			C_1	
α_1	β_2	γ_3	β_1	γ_2	α_3	γ_1	α_2	β_3
c_2	a_3	b_1	a_2	b_3	c_1	b_2	c_3	a_1
	A_2			B_2			C_2	
β_3	γ_1	α_1	γ_2	α_1	β_2	α_3	β_1	γ_2
b_3	c_1	a_2	c_3	a_1	b_2	a_3	b_1	c_2
	A_3			B_3			C_3	
γ_2	α_3	β_1	α_2	β_3	γ_1	β_2	γ_3	α_1

La règle de lecture de ce tableau est que la droite désignée par une lettre située au milieu d'un petit carré rencontre chaque paire verticale de droites du même petit carré. Par exemple, les plans tangents triples contenant A_1 sont ainsi $A_1a_1\alpha_1$, $A_1b_2\beta_2$ et $A_1c_3\gamma_3$ (ainsi que $A_1A_2A_3$ et $A_1B_1C_1$ déjà mentionnés). Salmon ne fait pas de commentaire au sujet de la notation de Hart.

Henderson mentionne ensuite une notation « très marquante » due à Schläfli, présentée dans une publication de 1858 et basée sur ce qui appelé un « double-six », [Schläfli 1858] [52]. Comme écrit dans son en-tête, l'article de Schläfli a été traduit en anglais par Cayley lui-même. En fait, Schläfli avait communiqué une partie des résultats de l'article dans une lettre de 1856 écrite à Cayley [53]. C'est dans cette lettre, dont un extrait a été cité précédemment (p. 50), que Schläfli écrivait qu'il n'avait pas eu accès aux publications de 1849 de Cayley et qu'il ne savait pas si ses résultats avaient déjà été trouvés ou non. Comme nous allons le voir, des analogies existent effectivement entre les travaux de Schläfli et ceux de Cayley et Salmon.

L'article de Schläfli est séparé en deux parties. La première concerne les surfaces algébriques de degré quelconque et ne concerne pas la notation des vingt-sept droites. La seconde partie a pour cadre celui des surfaces cubiques. Schläfli commence par montrer que l'équation d'une telle surface peut s'écrire sous la forme $uvw + xyz = 0$, où $u, \ldots, z$ désignent des fonctions linéaires en les coordonnées de l'espace. Cette écriture lui permet de mettre en évidence l'existence de neuf droites tracées sur la surface [54] : ce sont les intersections respectives des plans $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ et $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Une notation provisoire est introduite par Schläfli : par exemple, la droite définie par les plans $u = 0$ et

52. « Schläfli was who invented the notation which may be called epoch-making—that of the double-six. » [Henderson 1915, p. 2]. Si la notation de Schläfli et celle de Hart sont décrites dans [Cajori 1929], celle de Salmon y est seulement vaguement évoquée.

53. Voir [Graf 1905, p. 5-10].

54. On voit ici la proximité avec l'approche de Salmon qui est exposée dans [Cayley 1849].

$x = 0$ est notée $\overline{ux}$.

Schläfli introduit ensuite six coefficients A, B, C, D, E, F dépendant linéairement d'un même paramètre et tels que $Au + Bv + Cw + Dx + Ey + Fz = 0$. Il calcule :

$$Au(Bv + Dx)(Cw + Dw) + Dx(Au + Ey)(Au + Fz) = ABCuvw + DEFxyz.$$

Le membre de gauche est alors une équation de la surface lorsque $ABC = DEF$. Cette dernière condition étant du troisième degré en le paramètre dont dépendent $A, \ldots, F$, elle possède trois solutions, auxquelles correspondent donc trois sextuplets (a, b, c, d, e, f), $(a', \ldots, f')$, $(a'', \ldots, f'')$. Pour chacun de ces sextuplets, on a donc une équation de la surface, comme

$$au(bv + dx)(cw + dw) + dx(au + ey)(au + fz) = 0.$$

Pour cette dernière équation, Schläfli remarque alors que la droite d'équations

$$au + dx = 0 \qquad ; \qquad bv + ey = 0 \qquad ; \qquad cw + fz = 0$$

est contenue dans la surface [55]. Il indique que pour un sextuplet $(a, \ldots, f)$, on peut trouver 6 droites de ce type, notées ℓ, m, n, p, q, r. En tenant compte des deux autres sextuplets, cela donne donc 18 droites $\ell, \ell', \ell'', m, \ldots, r''$.

Les relations d'incidence existant entre les neuf droites obtenues précédemment et les dix-huit nouvelles sont données par Schläfli :

à travers	$\overline{ux}, \overline{vy}, \overline{wz}$	passent	ℓ, ℓ', ℓ''
"	$\overline{uy}, \overline{vz}, \overline{wx}$	"	m, m', m''
"	$\overline{uz}, \overline{vx}, \overline{wy}$	"	$n, n'n''$

à travers	$\overline{ux}, \overline{vz}, \overline{wy}$	passent	p, p', p''
"	$\overline{uz}, \overline{vy}, \overline{wx}$	"	q, q', q''
"	$\overline{uy}, \overline{vx}, \overline{wz}$	"	r, r', r''

Il donne également les règles décrivant les relations d'incidence entre les dix-huit droites notées $\ell, \ldots, r''$: si deux de ces droites sont sur un même tableau, elles se rencontrent si et seulement si les lettres et les accents qui les représentent sont différents ; sinon, elles se rencontrent si et seulement si les symboles qui les représentent ont le même accent [56].

55. Remarquer que la dernière de ces équations est toujours conséquence des deux premières à cause de l'égalité $au + bv + cw + dx + ey + fz = 0$. Remplacer $dx = -au$, $ey = -bv$ et $fz = -cw$ dans l'équation de la surface donne une égalité à 0, ce qui montre que la droite ayant ces équations est incluse dans la surface.

56. Par exemple, ℓ rencontre $m', m'', n', n'', p, q, r$ (ainsi que $\overline{ux}$, $\overline{vy}$, $\overline{wz}$).

Schläfli continue son travail et montre que les vingt-sept droites peuvent se grouper douze à douze en ce qu'il appelle des *doubles-six*, selon les relations d'incidence qu'elles entretiennent entre elles. Par exemple, les douze droites

$$\begin{pmatrix} \overline{uz}, & \overline{vx}, & \overline{wy}, & \ell, & \ell', & \ell'' \\ \overline{vy}, & \overline{wz}, & \overline{ux}, & n, & n', & n'' \end{pmatrix}$$

forment un double-six car deux d'entre elles s'intersectent si et seulement si elles ne sont écrites ni sur une même ligne ni sur une même colonne. Schläfli prouve en outre qu'il existe exactement trente-six doubles-six que l'on peut former à partir des vingt-sept droites.

Il écrit enfin que l'« on arrive, au moyen des doubles-six, [...] à une description aisée des vingt-sept droites et des quarante-cinq plans de la [surface] [57] ». Pour cela, il considère un double-six, qu'il note cette fois

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, & b_6 \end{pmatrix}.$$

Avec les règles d'incidence données précédemment (deux droites s'intersectent si et seulement si elles ne sont ni sur une même ligne ni sur une même colonne), deux droites a_i et b_j se rencontrent lorsque $i \neq j$ et forment ainsi deux côtés d'un triangle, dont le troisième côté est noté c_{ij}. Il y a donc quinze droites $c_{12}, \ldots, c_{56}$; une telle droite c intersecte parmi les droites a, b seulement celles dont les indices correspondent (par exemple, c_{12} ne rencontre que a_1 et b_2) et deux droites c se rencontrent lorsque leurs indices n'ont pas de chiffre en commun, et seulement dans ce cas-là.

Il est intéressant de remarquer que certaines références bibliographiques de Henderson, qui ne sont pourtant pas citées pour le problème des notations, comportent des commentaires sur celles-ci. Ainsi, dans un grand mémoire sur les surfaces cubiques, [Cayley 1869a], Cayley commente :

> Il y a, dans le système des 27 droites et des 45 plans, une symétrie compliquée et *many-sided* qui exclut l'existence d'une notation unique : la notation ne peut être obtenue qu'en partant d'un arrangement qui n'est pas unique mais qui fait partie d'un système d'arrangements analogues. La notation employée dans mon article original, [Cayley 1849], [avec les (w), (ξ), etc.] part d'un tel arrangement ; mais elle est si compliquée qu'elle ne peut guère être considérée comme mettant en évidence les relations des droites et des plans ; celle du Dr. Hart (dans [Salmon 1849]), dépendant d'un arrangement des 27 droites selon un cube 3×3, est particulièrement élégante [...]. Mais la plus commode est celle de Schläfli, basée sur un double-six [58]. [Cayley 1869a, p. 243]

57. « By means of the double-sixes we arrive [...] at an easy survey of the 27 lines and 45 planes of the [surface]. » [Schläfli 1858, p. 116].

58. « There is in the system of the 27 lines and 45 planes a complicated and many-sided symmetry which precludes the existence of any unique notation: the notation can only be obtained by starting from some arrangement which is not unique, but one of a system of several like arrangements. The notation

Par ailleurs, dans son *Treatise on the Geometry of Three Dimensions*, Salmon expose sa propre notation (présentée dans [Cayley 1849]) puis commente celle de Schläfli :

> Le professeur Schläfli a fait un nouvel arrangement des droites, conduisant à une notation plus simple et donnant une conception plus claire de la manière dont elles sont disposées [59]. [Salmon 1882, p. 499]

Ces deux commentaires de Cayley et de Salmon insistent ainsi sur l'importance de la simplicité d'une notation, et lient explicitement l'utilité d'une notation à la compréhension des relations d'incidence existant entre les vingt-sept droites.

L'insistance mise sur les avantages de la notation de Schläfli se confirme en partie par son utilisation dans un certain nombre de travaux listés dans la bibliographie de Henderson, comme [Schröter 1863 ; Cayley 1869a ; Cayley 1873 ; Salmon 1882], ou dans d'autres publications que nous rencontrerons plus tard, comme [Clebsch 1866 ; D'Ocagne 1895 ; Hartshorne 1977]. Cette circulation (sur une période de temps plutôt longue) donne raison à Florian Cajori qui écrit, dans son livre sur l'histoire des notations mathématiques, que « la notation [des vingt-sept droites] la plus généralement adoptée est celle du "double-six", due à L. Schläfli », [Cajori 1929, p. 324].

Toutefois, une autre proposition de notation est encore mentionnée par Henderson dans son résumé historique. Il s'agit de celle de Henry Martyn Taylor, qui établit un système de notation indépendant de tout choix initial [60], [Taylor 1894]. L'article de Taylor débute en rappelant que l'existence des vingt-sept droites a initialement été prouvée dans une correspondance entre Cayley et Salmon de 1849 et que les résultats ont été publiés dans les articles de 1849. Il continue en écrivant :

> Dans l'article mentionné précédemment, [Cayley 1849], Cayley remarque : « Il est très difficile de concevoir la figure complète formée par les vingt-sept droites. Et je pense en effet que cela ne peut guère être accompli sans qu'une notation plus parfaite ne soit découverte ».
>
> Schläfli a découvert une notation de grand mérite qui donne une puissante méthode pour travailler avec les vingt-sept droites ; elle est basée sur la sélection de douze droites qui forment un « double-six ». L'auteur du présent article a tenté de trouver une notation des vingt-sept droites qui ne dépendait d'aucune sélection particulière parmi elles [61]. [Taylor 1894, p. 37]

---

employed in my original paper [...] starts from such an arrangement; but it is so complicated that it can hardly be considered as at all putting in evidence the relations of the lines and planes; that of Dr. Hart [...], depending on an arrangement of the 27 lines according to a cube of 3 each way, is a singularly elegant one [...]. But the most convenient one is Schläfli's, starting from a double-sixer ».

59. « Prof. Schläfli has made a new arrangement of the lines, which leads to a simpler notation, and gives a clearer conception how they lie. »

60. Comme le remarque Cayley dans sa citation donnée précédemment, la notation de Schläfli dépend du choix initial d'un double-six.

61. « In the above-mentionned paper, Cayley remarks, "there is of great difficulty in conceiving the complete figure formed by the twenty-seven lines: indeed this can hardly, I think, be accomplished until

Pour faire cela, Taylor commence par montrer que l'équation d'une surface cubique peut toujours se mettre sous la forme

$$xyzu = (x - aT)(y - bT)(z - cT)(u - dT),$$

où x, y, z, u sont les coordonnées de l'espace, T est une fonction linéaire de ces coordonnées et a, b, c, d sont des paramètres. Il en déduit les équations de chacune des vingt-sept droites : par exemple, une de ces droites, notée par le chiffre 1, a pour équations

$$x = aT \qquad \text{et} \qquad y = 0.$$

Les vingt-sept droites sont ainsi notées $1, 2, \ldots, 27$, au fur et à mesure de l'énumération de leurs équations. Il s'agit de la notation dont Taylor parle ; le reste de l'article consiste à établir toutes sortes de relations d'incidence entre les droites. Taylor fait ainsi la liste des droites se coupant deux à deux, de celles qui forment des triangles, de celles qui forment des quadrilatères, etc.

On ne trouve pas de commentaire sur la notation de Taylor dans les références bibliographiques de Henderson, et elle n'est pas non plus discutée dans le livre de Cajori. Seul Henderson lui-même écrit : « [la notation de Taylor] ne peut être vue comme une amélioration de celle élaborée par Schläfli [62] ».

Toujours dans le morceau du résumé historique concernant les notations et le double-six, Henderson renvoie au premier paragraphe du chapitre II de *The Twenty-seven Lines*, qui est intitulé « Histoire du théorème ». Le théorème évoqué dans le titre est énoncé dans l'article de Schläfli de 1858, déjà discuté plus haut :

> Les doubles-six donnent lieu à la remarque que l'on peut voir ici un théorème apparemment très élémentaire, pouvant être énoncé ainsi : « traçant à notre gré cinq droites a, b, c, d, e qui rencontrent une droite F, on suppose que les droites de tout groupe de quatre parmi ces cinq sont intersectées par une autre droite que F. Supposons que A, B, C, D, E sont les autres droites intersectant (b, c, d, e), (c, d, e, a), (d, e, a, b), (e, a, b, c) et (a, b, c, d) respectivement. Alors A, B, C, D sont intersectées par la droite e ; il doit y avoir une autre droite f intersectant ces quatre droites, et cette droite va elle-même intersecter la droite restante E ; autrement dit, il y aura une droite f intersectant les cinq droites A, B, C, D, E. » Y a-t-il, pour ce théorème élémentaire, une démonstration plus simple que celle dérivée de la théorie des formes cubiques [63] ? [Schläfli 1858, p. 117]

a more perfect notation is discovered." Schläfli has discovered a notation of great merit which affords a powerful method of dealing with the twenty-seven lines; it is based upon the selction of some twelfe of the lines which form a "double-six." The author of this paper endeavoured to find a notation for the twenty-seven lines, which did not depend on any special selection among them. »

62. « [Taylor's notation] cannot be regarded as an improvement upon the notation devised by Schläfli. »

63. « The double-sixes give rise to the remark that there is here exposed to view an apparently very elementary theorem which may be thus enuntiated: "Drawing at pleasure five lines a, b, c, d, e which meet

En d'autres termes, ce théorème indique que si onze droites de l'espace entretiennent entre elles les mêmes relations que onze droites issues d'un double-six, alors il existe une douzième droite complétant les onze premières en un double-six. Il s'agit alors de démontrer ce résultat sans faire appel à la théorie des surfaces cubiques, ce que Schläfli ne fait pas dans la suite de son article. Henderson indique une série d'articles ayant tenté de répondre à la question, de Sylvester (1861), Cayley (1868, 1870), Friedrich Schur (1881), Edward Kasner (1903) et Baker (1910) ; mais ces travaux ne concernant ni les surfaces cubiques ni *a fortiori* leurs vingt-sept droites, ils ne seront pas décrits ici.

1.3.5 Les travaux de Sturm et Cremona

Continuant à suivre le résumé historique de Henderson, nous arrivons aux « premiers articles significatifs sur les surfaces cubiques d'un point de vue synthétique, suivant le mémoire de Steiner mentionné précédemment, [dûs à] Cremona et Rudolf Sturm [64] », [Henderson 1915, p. 2]. Comme l'indique Henderson, les deux travaux en question avaient été soumis à l'Académie des sciences de Berlin pour concourir à un prix que Steiner avait voulu être créé après sa mort. Pour le premier cru de ce « Prix Steiner », en 1864, Ernst Eduard Kummer avait annoncé que l'enjeu était de compléter les démonstrations manquantes du mémoire de Steiner sur les surfaces cubiques et de développer les idées de ce dernier :

> Notre collègue décédé le 1^er^ avril de l'année dernière [1863] à légué à l'Académie un legs de 8 000 thalers avec la consigne d'utiliser les produits nets des intérêts pour des prix biennaux pour des exercices dans le domaine de la géométrie synthétique qu'il a donnés, avec surtout une considération des méthodes et principes qu'il a érigées. [...]
>
> Dans un des *Monatsberichte* de l'Académie de janvier 1856, de même que dans un mémoire publié dans le 53^e^ volume du journal de Crelle, Steiner a communiqué une série de propriétés fondamentales des surfaces du troisième degré, et posé avec cela les bases d'une théorie purement géométrique de celles-ci. L'Académie souhaite que ces travaux distingués du grand géomètre soient approfondis et complétés sur quelques points essentiels. Pour cela, il sera d'abord nécessaire de donner les preuves des théorèmes principaux, la plupart du temps seulement indiquées ou complètement manquantes [65].

---

a line F, then may any four of the five lines be intersected by another line besides F. Suppose that A, B, C, D, E are the other lines intersecting (b, c, d, e), (c, d, e, a), (d, e, a, b), (e, a, b, c), and (a, b, c, d) respectively. Then A, B, C, D are intersected by the line e; there must be another line f intersecting these four lines, and this line will of itself intersect the remaining line E; i.e. there will be a line f intersecting the five lines A, B, C, D, E." Is there, for this elementary theorem, a demonstration more simple than the one derived from the theory of cubic forms? »

64. « The first significant papers on cubic surfaces from the synthetic standpoint, following Steiner's memoir above mentioned, were by Cremona and Rudolf Sturm. »

65. « Unser am 1. April vorigen Jahre verstorbener College Steiner hat der Akademie ein Legat von 8000 Rthlrn. vermacht mit der Bedingung der Reinertrag der Zinsen alle zwei Jahre zu Preisen zu verwenden, für von ihr gestellte Aufgaben in dem Bereiche der synthetischen Geometrie, hauptsächlich mit Berücksichtigung der von ihm aufgestellten Methoden und Principien. [...] In einer in den Monatsberichten der Akademie vom Januar 1856, sowie in dem 53. Bande der Crelle'schen Journals veröffentlichten Abhandlung hat Steiner eine Reihe von Fundamentaleigenschaften der Flächen dritten Grades mitgetheilt, und dadurch den Grund zu einer rein geometrischen Theorie derselben gelegt. Die Akademie wünscht, dass diese aus-

En 1866, l'Académie décerna le prix conjointement à Luigi Cremona et à Rudolf Sturm. Les travaux de ces derniers furent publiés peu après : l'un sous forme d'un livre, [Sturm 1867], l'autre en tant que (long) article dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, [Cremona 1868].

Chacune de ces publications rappelle dans son introduction que le travail proposé consiste d'abord à compléter tout ce que Steiner avait annoncé dans son mémoire de 1856, et met en avant la restriction des méthodes à celles de la « géométrie pure [66] ». Par exemple pour Cremona :

> Obéissant aux prescriptions de l'Académie et heureux d'ailleurs de pouvoir suivre son propre penchant, l'auteur s'est servi exclusivement de la géométrie pure, dite (peut-être improprement) synthétique ; et il se flatte qu'on jugera que le procédé uniforme et facile, qu'il a suivi dans tout le cours de cet écrit, rentre dans l'esprit de ces méthodes puissantes et lumineuses qui ont valu à Steiner la découverte d'un si grand nombre de propriétés très-importantes, propriétés que ce célèbre sphinx géométrique a léguées à ses successeurs, comme autant d'énigmes à déchiffrer. [Cremona 1868, p. 2-3]

Les travaux de Sturm et de Cremona diffèrent au niveau de leur approche des surfaces cubiques et des points-clés qu'ils mettent en avant. Ainsi, le mémoire de Cremona se base sur des considérations portant sur le surfaces algébriques de degré quelconque qu'il applique dans un deuxième temps aux surfaces cubiques. Il propose également une construction de la représentation d'une telle surface sur un plan afin de traiter de façon détaillée l'étude des courbes algébriques qui y sont contenues.

Sturm met quant à lui plutôt en valeur les différentes manières d'engendrer les surfaces cubiques et la classification de ces dernières eu égard à la réalité de leurs droites. Comme Sturm l'écrit lui-même, son mémoire qui avait été déposé pour le prix de l'Académie était un développement de sa thèse de doctorat, faite sous la direction de Heinrich Schröter [67]. Ce dernier avait lui aussi travaillé sur les surfaces cubiques, comme l'atteste d'ailleurs la présence d'un de ses articles dans la bibliographie de Henderson, [Schröter 1863]. Dans cet article, Schröter avait pour but de démontrer l'existence des vingt-sept droites en se basant sur une certaine façon d'engendrer les surfaces cubiques. Cette génération était celle que Hermann Grassmann avait présentée sans la démontrer une dizaine d'année auparavant, [Grassmann 1855] : toute surface cubique est le lieu des points d'intersection de

---

gezeichnete Arbeit des grossen Geometers nach synthetischer Methode weiter ausgeführt und in einigen wesentlichen Punkten vervollständigt werde. Dazu würde es zunächst nothwendig sein, die grösstentheils nur angedeuteten oder ganz fehlenden Beweise der aufgestellten Hauptsätze zu geben », extrait de la séance du 7 juillet 1864 prononcé par Kummer et rapporté dans le *Monatsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 475-476.

66. La restriction des méthodes à celles de la « géométrie pure » ne s'accompagne pas d'un clivage extrêmement marqué entre cette géométrie et celle dite « analytique » — [Sturm 1867, p. x] parle quand même de cette dernière comme la rivale de la première. Des travaux récents ont commencé à revenir sur les récits du tournant du siècle, comme [Fano 1907], opposant deux camps, l'un du côté de la géométrie pure (ou synthétique), l'autre du côté de la géométrie analytique. Voir [Lorenat 2015b], et en particulier les références données p. 2.

67. Voir [Sturm 1867, p. vi] et [Ludwig 1926].

trois *gerbes projectives de plans*[68]. Sturm connaissait d'ailleurs tous ces travaux, cités et redémontrés dans son libre, [Sturm 1867].

1.3.6 Classifications de surfaces cubiques

Le résumé historique de Henderson se poursuit avec un paragraphe dans lequel il évoque deux types de classification des surfaces cubiques, l'une par le caractère réel de leurs droites, l'autre par leurs singularités.

En ce qui concerne la réalité des droites, Henderson, en précisant qu'il s'agit d'une « simple inspection du problème[69] », réfère d'abord à l'article de Schläfli déjà commenté en partie précédemment, [Schläfli 1858]. Il mentionne également la thèse de Friedrich August, [August 1862], puis un nouveau mémoire de Schläfli, [Schläfli 1863], dans lequel le sujet est traité en plus grand détail — tout ce qui concerne la question de réalité des droites et qui est abordé dans l'article de Schläfli de 1858 est en fait repris et réexpliqué dans son mémoire de 1863.

Dans ce mémoire, Schläfli définit ce que sont des *systèmes réels* : ce sont des objets géométriques qui peuvent être décris par des équations ayant tous leurs coefficients réels. Ainsi, lorsqu'une surface cubique est réelle, la question que pose Schläfli est de déterminer, parmi les vingt-sept droites et les quarante-cinq plans tangents triples, combien sont réels. Pour répondre à la question, il se base sur l'écriture $uvw - xyz = 0$ de l'équation d'une surface cubique (rappelons que $u, \dots, z$ sont des formes linéaires en les coordonnées de l'espace). Cette surface étant supposée réelle, les formes cubiques uvw et xyz sont réelles, mais certaines des formes linéaires $u, \dots, z$ peuvent elles être complexes.

Schläfli procède au comptage de droites et de plans réels en suivant une discussion des cas de réalité des formes linéaires $u \dots, z$ et des racines de l'équation du troisième degré en un paramètre[70] $ABC = DEF$. Par exemple, si toutes les formes linéaires et toutes les solutions de $ABC = DEF$ sont réelles, alors les vingt-sept droites et les quarante-cinq plans le sont aussi ; si les formes linéaires sont réelles, mais que l'équation $ABC = DEF$

68. Une *gerbe* de plans est l'ensemble de tous les plans passant par un point donné de l'espace. Si ce point est l'intersection de trois plans d'équations respectives $a = 0$, $b = 0$ et $c = 0$, où a, b, c sont des fonctions linéaires en les coordonnées de l'espace, alors les plans de la gerbe correspondante sont tous les plans ayant une équation de la forme $\chi a + \lambda b + \mu c = 0$. Trois gerbes de plans sont dites *projectives* si on associe (arbitrairement) les plans des gerbes entre eux. Ainsi, dire que la surface est le lieu d'intersection de trois gerbes projectives de plans revient à dire que tout point de la surface a pour coordonnées la solution (homogène) d'un système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \chi a & + & \lambda b & + & \mu c & = & 0 \\ \chi a' & + & \lambda b' & + & \mu c' & = & 0 \\ \chi a'' & + & \lambda b'' & + & \mu c'' & = & 0, \end{array}\right.$$

où chaque équation correspond à une des gerbes et les inconnues sont les coordonnées de l'espace.

69. « [Schläfli] contented himself with a mere survey of the problem. » [Henderson 1915, p. 3].

70. Rappelons que la surface contient neuf droites du type $\overline{uz}$, qui est l'intersection des plans $u = 0$ et $z = 0$, et dix-huit droites dont les équations dépendent d'un paramètre solution d'une équation $ABC = DEF$. Par exemple, une de ces droites a pour équations $au + dx = 0$ et $bv + ey = 0$. Voir le paragraphe 1.3.4.

possède une solution réelle (et deux complexes conjuguées), alors Schläfli montre qu'il y a quinze droites réelles et quinze plans réels. La classification obtenue par Schläfli est que pour une surface lisse, il n'y a que cinq possibilités pour les nombre de droites et de plans réels, à savoir $(27, 45)$, $(15, 15)$, $(7, 5)$, $(3, 13)$ et $(3, 7)$.

Toujours dans le même article, la recherche des nombres de droites et de plans réels dans le cas de surfaces singulières conduit Schläfli à lister toutes les possibilités de singularités pour les surfaces cubiques. C'est ce qu'indique Henderson, qui souligne également que la division de ces surfaces selon leurs singularités a ensuite été adoptée par Cayley dans un grand mémoire sur les surfaces cubiques, [Cayley 1869a].

Le début du mémoire de Schläfli de 1863 indique que l'influence des singularités sur le comptage même des droites d'une surface cubique avait déjà été traitée dans l'article de Salmon contenant une démonstration de l'existence des vingt-sept droites, [Salmon 1849]. Dans l'article conjoint, Cayley avait en effet fait la remarque que ses démonstrations de l'existence des vingt-sept droites n'était plus valable dans le cas d'une surface cubique non lisse [71]. Une surface singulière contenant *a priori* moins de vingt-sept droites, Salmon avait mis en place une multiplicité de comptage de celles-ci afin que le nombre 27 reste valable.

Par exemple, Salmon avait indiqué qu'une droite passant par un point conique simple [72] doit être comptée avec multiplicité 2. Cette convention permet effectivement de garder le nombre 27 : Salmon avait montré que si une surface cubique n'a pour seule singularité qu'un point conique simple, alors elle comporte 6 droites passant par ce point, et 15 droites qui n'y passent pas. Avec la multiplicité décrite précédemment, il dénombrait bien $6 \times 2 + 15 = 27$ droites. Le même travail avait alors été répété pour chacun des onze cas de surfaces singulières énumérés par Salmon.

Dans son mémoire de 1863, [Schläfli 1863], Schläfli met en évidence d'autres cas que les onze donnés par Salmon et aboutit ainsi à vingt-deux types de surfaces cubiques. Comme indiqué au début du mémoire, c'est Cayley qui l'avait communiqué à la *Royal Society of London* et il y avait ajouté, avec l'accord de Schläfli, des notes personnelles entre crochets. Une de ces notes indique que Schläfli avait oublié un cas de surface cubique singulière, portant ainsi le nombre de cas à vingt-trois.

Dès le début du mémoire [Cayley 1869a], Cayley écrit que tout ce qu'il y développe est basé sur, et est complémentaire à celui de Schläfli, [Schläfli 1863]. Le but de Cayley est de reprendre la classification en vingt-trois types de surfaces cubiques, et dans chaque cas, établir toute une série de résultats concernant la surface : forme simple de son équation,

71. « It should be remarked that the preceeding theory is very materially modified when the surface of the third order has one or more conical points; and in the case of a double line (for which the surface becomes a ruled surface) the theory ceases to be applicable. » [Cayley 1849, p. 132].

72. En termes modernes, si l'on choisit $(0 : 0 : 0 : 1)$ comme coordonnées projectives de la singularité, alors l'équation de la surface cubique à laquelle le point appartient est de la forme $wf(x, y, z)+g(x, y, z) = 0$, où f et g sont des formes quadratique et cubique respectivement. Le point singulier est appelé *point conique simple* lorsque la forme quadratique f est de rang 3. Voir [Bruce & Wall 1979] pour un point de vue récent sur la classification des surfaces cubiques par leurs singularités.

équations des droites et des plans tangents triples, relations d'incidence entre ces objets et équation de la surface réciproque, mais aussi l'ordre d'un cône circonscrit à la surface, le nombre d'arêtes doubles de ce cône, etc. — en tout, 42 nombres de cette sorte sont à chaque fois calculés : voir le tableau récapitulatif de Cayley en figure 1.4.

1.3.7 Modèles et formes des surfaces cubiques

Le résumé historique de Henderson continue avec deux paragraphes concernant tous deux les modèles concrets de surfaces cubiques et la forme de ces dernières [73]. D'après lui, le premier modèle d'une surface cubique a été proposé par Christian Wiener en 1869. Ce modèle sur lequel apparaissaient les vingt-sept droites (réelles) de la surface est rapidement décrit dans un article de 1873 :

> Le modèle est fait de plâtre, et est contenu dans un cube 18,2 pouces de côté : les droites a, b, c sont colorées en bleu, jaune et rouge respectivement ; les droites a_1, b_2, b_5 [sont] à angle droit l'une de l'autre [74]. [Cayley 1873, p. 366]

Cayley établit ensuite, à partir de mesures effectuées sur le modèle, les équations de certaines des vingt-sept droites et donne les équations théoriques correspondances sans pour autant commenter la comparaison. Comme le souligne Henderson, Sylvester avait grandement mis en valeur la construction du modèle de Wiener en la décrétant être l'un des événements scientifiques les plus importants de l'année 1869 [75]. En citant [Smith 1876], Henderson indique également qu'un modèle des vingt-sept droites, sans la surface cubique qui les contient, avait été proposé par Olaus Henrici, mais aucune date n'est donnée [76].

Henderson continue en écrivant qu'en 1872, Alfred Clebsch avait construit un modèle de la *surface diagonale* [77]. Aucune référence n'est donnée par Henderson, mais on peut lire dans les *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der*

73. Il s'agit ici du mot « forme » faisant référence à l'aspect d'un objet (*Gestalt* en allemand, *shape* en anglais). En français, le terme peut éventuellement porter à confusion en mathématiques à cause d'un autre sens faisant référence à des polynômes homogènes (*Form* en allemand et en anglais). Au sujet des modèles, voir [Polo-Blanco 2007 ; Rowe 2013].

74. « The model is formed of plaster, and is contained within a cube, the edge of which is = 18.2 inches: the lines a, b, c are coloured blue, yellow, and red respectively; the lines a_1, b_2, b_5 [are] at right angles at each other. » Cayley fait ici référence à la notation de Schläfli des vingt-sept droites : il y a les droites a_i, b_j et c_{ij}.

75. [Sylvester 1866-69, p. 155].

76. Le passage correspondant chez Smith ne contient pas non plus de date, voir [Smith 1876, p. 48].

77. La surface diagonale est la surface cubique d'équation $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x + y + z + w)^3 = 0$. Elle a la particularité d'avoir toutes ses droites réelles et d'être la seule, à équivalence projective près, à avoir cette propriété — c'est Clebsch qui l'avait baptisée « surface diagonale ». En effet, dans [Sylvester 1851], Sylvester avait indiqué (sans le démontrer) que toute forme cubique $F(x, y, z, w) = 0$ peut s'écrire sous la forme $F = a_1 z_1^3 + \cdots + a_5 z_5^3$, où les z_i sont des formes linéaires en x, y, z, w soumises à la condition $z_1 + \cdots + z_5 = 0$ et sont uniques à l'ordre près. Le *pentaèdre* de la surface cubique d'équation $F = 0$ est l'ensemble des cinq plans d'équations respectives $z_1 = 0, \ldots, z_5 = 0$. Le nom de « surface diagonale » avait été décidé dans [Clebsch 1871b] pour la raison suivante : parmi les plans de son pentaèdre, si l'on en prend un quelconque, les quatre autres l'intersectent selon un quadrilatère. Alors les diagonales de ce quadrilatère sont des droites contenues dans la surface.

	I $=12$.	II $=12-C_2$.	III $=12-B_3$.	IV $=12-2C_2$, V $=12-B_4$.	VI $=12-B_3-C_2$, VII $=12-B_5$.	VIII $=12-3C_2$, X $=12-B_4-C_2$, XI $=12-B_6$, XII $=12-U_6$.	IX $=12-2B_3$.	XIII $=12-B_3-2C_2$, XIV $=12-B_5-C_2$, XV $=12-U_7$.	XVI $=12-4C_2$, XVIII $=12-B_4-2C_2$, XIX $=12-B_6-C_2$.	XVII $=12-2B_3-C_2$, XX $=12-U_8$.	XXI $=12-3B_3$.	XXII $=S(1,1)$, XXIII $=S(\overline{1},1)$.	
n	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	n
a	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	4	a
δ	0	1	0	2	1	3	0	2	4	1	0	0	δ
κ	6	6	7	6	7	6	8	7	6	8	9	3	κ
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	b
k	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	k
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	t
q	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	q
ρ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	ρ
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	j
c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	c
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	h
r	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	r
σ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	σ
θ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	θ
χ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	χ
β	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	β
γ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	γ
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i
C	0	1	0	2	1	3	0	2	4	1	0	0	C
B	0	0	1	0	1	0	2	1	0	2	3	0	B
	I	II	III	IV V	VI VII	VIII X XI XII	IX	XIII XIV XV	XVI XVIII XIX	XVII XX	XXI	XXII XXIII	
n'	12	10	9	8	7	6	6	5	4	4	3	3	n'
a'	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	4	a'
δ'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	δ'
κ'	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	3	κ'
b'	27	15	9	7	3	3	0	1	3	0	0	1	b'
k'	216	60	18	12	3	0	0	0	0	0	0	0	k'
t'	45	15	6	3	0	1	0	0	1	0	0	0	t'
q'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	q'
ρ'	27	15	9	7	3	3	0	1	3	0	0	1	ρ'
j'	0	0	0	1	0	3	0	1	6	0	0	2	j'
c'	24	18	16	12	10	6	8	4	0	2	0	0	c'
h'	180	96	72	38	24	6	12	2	0	0	0	0	h'
r'	30	24	42	17	24	9	32	5	0	2	0	0	r'
σ'	12	12	12	10	9	6	8	4	0	2	0	0	σ'
θ'	0	0	16	0	8	0	16	0	0	0	0	0	θ'
χ'	0	0	0	0	1	0	0	2	0	2	0	0	χ'
β'	54	30	18	13	6	3	0	1	0	0	0	0	β'
γ'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	γ'
i'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	i'
C′	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C′
B′	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	3	0	B′

FIGURE 1.4 – Tableau des singularités donné dans [Cayley 1869a, p. 235]. Les colonnes représentent les vingt-trois types de surfaces cubiques, numérotées en chiffres romains. Les égalités tout en haut du tableau indiquent les singularités caractérisant chaque type (par exemple, la classe II est celle comportant un seul point conique simple C_2). Enfin, les lettres disposés à l'extérieur des colonnes désignent des nombres associés aux surfaces : n pour leur ordre, a pour l'ordre (générique) de leur cône circonscrit, δ pour le nombre d'arêtes doubles de ce cône, etc.

Georg-Augusts-Universität zu Göttingen de cette année-là (p. 402-404) que Clebsch avait exposé à l'Académie deux modèles construits par son élève Adolf Weiler. Le premier était un modèle des vingt-sept droites sans le support de leur surface, et le second un modèle en plâtre de la surface diagonale, décrit comme suit :

> Les droites de la surface se séparent en 15 et 12, dont les premières sont les diagonales, tandis que les autres forment un double-six. Le pentaèdre a été choisi de sorte que d'abord, un tétraèdre raide avec une base horizontale soit construit et se transforme en lui-même par rotation de 120° autour d'un axe vertical ; le cinquième plan a été posé parallèlement à la base, à égale distance de la base et du sommet. Par cette organisation [...], il a été facile d'obtenir un aperçu de la forme de la surface et de ses droites : les parties remarquables de celles-ci se trouvent dans un espace pas trop grand et ont été étendues sur une longueur telle que la partie en forme de selle, avec laquelle la surface s'étend à l'infini, ne présente pas d'autre difficulté [78].

On le voit dans cette citation, la question des modèles est liée de près à celle de la forme des surfaces cubiques.

Ce lien est encore évoqué dans la suite des *Nachrichten*, où est décrit un autre modèle de surface cubique, construit par Friedrich Neesen et présenté à l'Académie par Felix Klein. Cette fois, il s'agit de la *surface de Cayley*[79], présentant quatre points singuliers. Une description analogue à la précédente est donnée, et on y lit que toutes les formes possibles pour les surfaces cubiques peuvent être obtenues à partir de la forme de la surface de Cayley par déformation continue de ses points singuliers. D'après Henderson, ces travaux consistant à déterminer les formes des surfaces cubiques à partir de celle de la surface de Cayley sont ceux que Klein expose dans un article de 1873, [Klein 1873] (voir la figure 1.5).

Henderson mentionne deux séries de modèles en plâtre représentant toutes les formes possibles des surfaces cubiques. La première est une série que Klein avait montrée à l'exposition universelle de Chicago en 1893 [80]. La seconde est due à Carl Rodenberg, et Henderson fait référence à [Rodenberg 1879]. Dans cet article, Rodenberg étudie en fait les modifications que la présence de singularités sur une surface cubique implique sur son pentaèdre, ce qui l'entraîne à proposer une classification de ces surfaces en fonction de leur pentaèdre.

78. « Die Geraden der Fläche theilen sich in 15 und 12, von denen erstere die oben angegebenen Diagonalen sind, während die 12 andern eine durch sie bestimmte Doppelsechs bilden. Das Pentaeder war so gewählt, dass zunächst ein steiles Tetraeder mit horizontaler Basis gebildet war, welches durch eine Drehung von 120° um eine Verticalaxe in sich selbst überging; die fünfte Ebene war der Basis parallel gelegt, und gleichweit von der Spitze wie von der Basis entfernt. Bei dieser Einrichtung [...] war es leicht, eine Uebersicht der Gestalt der Fläche und ihrer Geraden zu gewinnen: die bemerkenswerthen Theile derselben liegen in einem nicht zu grossem Raume, und waren so weit fortgesetzt, dass die sattelförmigen Theile, mit welchen die Fläche sich ins Undendliche erstreckt, der Vorstellung keine weitern Schwierigkeiten boten. »

79. Il s'agit de la surface d'équation $xyz + yzw + zwx + wxy = 0$.

80. Henderson donne 1894 comme année de l'exposition universelle de Chicago et il cite [Klein 1894] (conférences de Klein à l'*Evanston Colloquium* de 1894). Au sujet de l'exposition universelle et d'Evanston, voir [Parshall & Rowe 1994, p. 295-361].

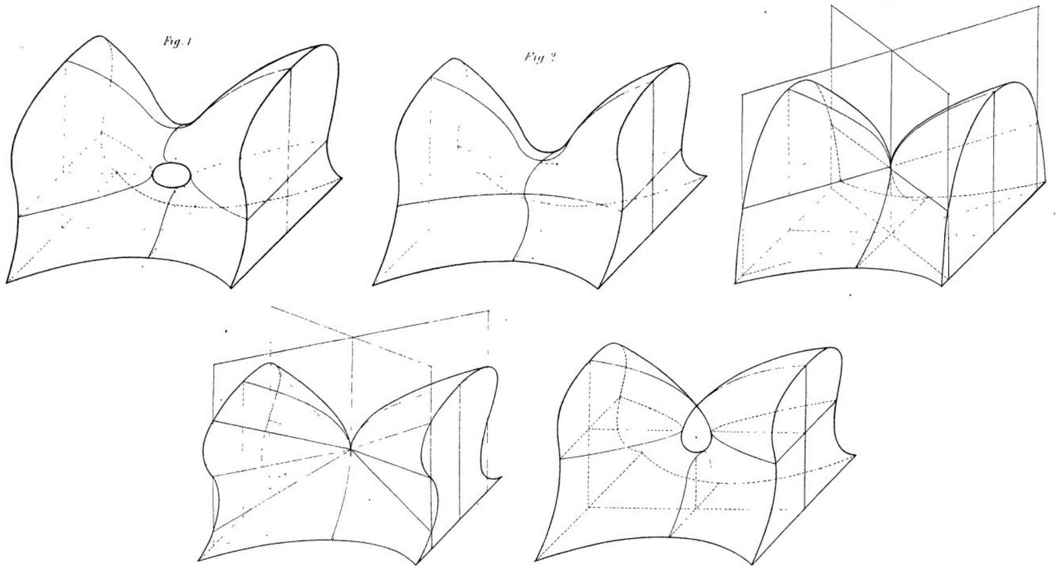
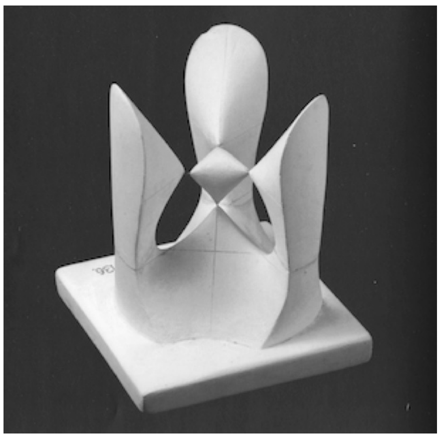


FIGURE 1.5 – Figures extraites de [Klein 1873] et montrant des déformations autour d'un point singulier d'une surface cubique.

D'après Gerd Fischer, la série de Rodenberg, composée de 26 surfaces cubiques en plâtre, date quant à elle de 1881, [Fischer 1986a ; Fischer 1986b]. Voir la figure 1.6.

(a) Surface diagonale, d'équation $x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = (x + y + z + w)^3$



(b) Surface de Cayley, d'équation $xyz + yzw + zwx + wxy = 0$

FIGURE 1.6 – Modèles en plâtre de surfaces cubiques particulières, issus de la collection Rodenberg. Source : [Fischer 1986b].

Les autres mathématiciens s'étant intéressés au problème des modèles de surfaces ou de leurs droites et cités par Henderson sont Sylvester, Cayley, Percival Frost, Hieronymus Zeuthen, J. de Vries, Henry Martyn Taylor et William Henry Blythe [81]. L'article de Syl-

81. [Sylvester 1861a ; Cayley 1870 ; Cayley 1873 ; Frost 1882 ; de Vries 1901 ; Blythe 1905]. Aucune référence précise n'est donnée pour les autres mathématiciens évoqués.

vester, [Sylvester 1861a], ne fait qu'évoquer l'idée de construire un modèle en fil de fer du système des vingt-sept droites,

> de sorte qu'on pourra éprouver le plaisir inattendu de voir avec les yeux du corps toutes les droites (le squelette pour ainsi dire) d'une surface du 3e degré avec leurs 135 points d'intersection, les 45 triangles, les hexagones situés sur le même hyperboloïde et d'autres non pas ainsi situés, et les autres merveilles de cette involution si compliquée, mais en même temps si symétrique. [Sylvester 1861a, p. 980]

Aucune méthode de construction concrète n'est pourtant décrite par Sylvester. Remarquons que la métaphore organique employée ici n'a pas été reprise dans les autres travaux sur le sujet cités par Henderson. Parmi ceux-ci, [Cayley 1870] propose des calculs numériques servant à la réalisation d'un modèle de double-six et [Cayley 1873] est l'article déjà cité contenant une description du modèle de Wiener.

L'article de Frost, [Frost 1882], traite de la construction d'un modèle des vingt-sept droites sans leur surface cubique. Plus précisément, il s'agit de trouver des équations pour ces droites et des valeurs numériques adéquates pour la construction du modèle — on remarquera également, dans la citation qui suit, l'aspect récréatif accordé à la fabrication de modèles :

> La méthode suivante pour obtenir les équations des 27 droites, réelles ou imaginaires, incluses dans une surface cubique, pourra, par sa simplicité, inviter certains des lecteurs du *Quarterly Journal* à passer quelques minutes sur le sujet, et éventuellement à s'amuser, comme je l'ai fait, à construire un modèle. J'ai fait une suggestion allant dans la direction d'un choix convenable des valeurs des constantes qui apparaissent dans les équations, de sorte à garder les droites distinctes tout en n'ayant pas à gérer des nombres trop grands pour déterminer tous les points d'intersection. Je dois avouer, n'ayant essayé qu'une fois d'en faire un, que deux ou trois des droites sont trop éloignées pour apparaître dans mon modèle, mais ceux qui me suivent pourront être plus chanceux ou avoir plus de place à disposition [82]. [Frost 1882, p. 89]

L'article de Frost ne présente pas d'illustration de son modèle. En revanche, une référence dans laquelle Taylor s'intéresse également à ce problème est [Taylor 1900] [83] ; des photographies d'un modèle des vingt-sept droites y est proposé (voir la figure 1.7) .

L'article [de Vries 1901] cité par Henderson ne se rapporte pas à la forme ou à la construction de modèles de surfaces cubiques ou de leurs droites. Il s'agit d'un article

82. « The following method of obtaining the equations of the 27 lines, real or imaginary, which lie on a cubic surface, may, from its simplicity, invite some of the readers of the *Quarterly Journal* to spend a few minutes on the subject, and possibly to amuse themselves, as I have done, by constructing a model. I have given a hint towards choosing values of the constants which appear in the equations, so as to keep the lines distinct, and yet not to have to deal with inconveniently large numbers in determining all the points of intersection. I must confess, having only tried once to make one, that two or three of the lines are too far off to appear in my model, but those who follow me may be more fortunate, or have more space at their disposal. »

83. Il s'agit ainsi peut-être de l'article auquel Henderson référait en mentionnant Taylor. Notons en outre que Taylor apparaît dans la bibliographie de Henderson avec [Taylor 1894], qui a été discuté au paragraphe concernant les notations et qui ne se rapporte pas à la question des modèles.

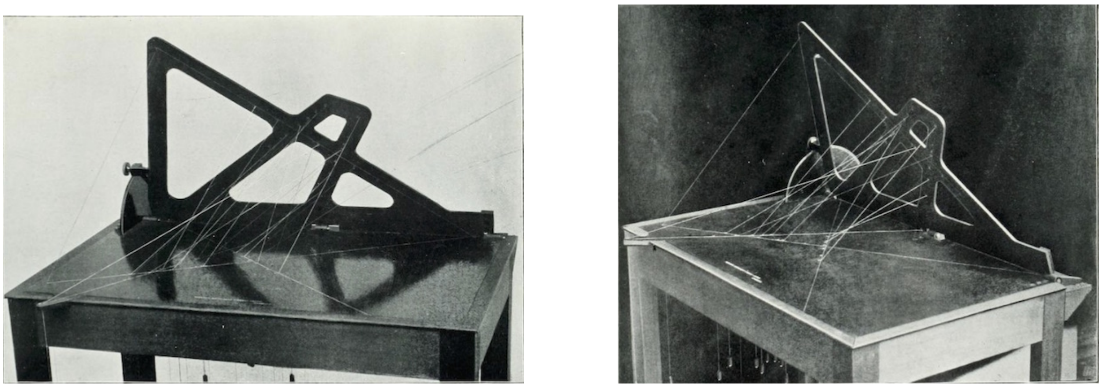


FIGURE 1.7 – Modèle en fil des vingt-sept droites proposé dans [Taylor 1900].

présentant les relations d'incidence entre les droites de surfaces cubiques particulières, possédant des singularités.

Enfin, un livre de Blythe, [Blythe 1905], réunit ses résultats sur les modèles de surfaces cubiques et publiés dans divers articles (voir les références bibliographiques de Henderson en annexe B). Dans son introduction, Blythe précise qu'il avait interrompu ses constructions de modèles après que Klein eut présenté sa collection à Chicago, mais que les descriptions faites dans son livre présentent l'intérêt de pouvoir donner au lecteur une idée des formes des surfaces cubiques [84].

1.3.8 Lien entre les vingt-sept droites et les vingt-huit tangentes doubles

Deux paragraphes du résumé historique de Henderson sont consacrés aux liens entre la configuration des vingt-sept droites et deux autres configurations. La première est celle des vingt-huit tangentes doubles que possède toute courbe quartique plane [85].

D'après Henderson, le premier article dans lequel ont été reliées les vingt-huit tangentes doubles et les vingt-sept droites est dû à Carl Friedrich Geiser, [Geiser 1869b]. Dans cet article, Geiser commence par considérer une surface cubique et un point lui appartenant. Le cône circonscrit à la surface en ce point se compose alors du plan tangent à la surface en ce point et d'un cône d'ordre [86] 4. L'intersection de ce dernier avec un plan quelconque est une courbe quartique ; Geiser montre que vingt-sept de ses tangentes doubles sont les projections des vingt-sept droites sur le plan de la quartique et que la vingt-huitième est l'intersection de ce plan avec le plan tangent à la surface cubique. Réciproquement, Geiser prouve que toute courbe quartique plane peut se réaliser de cette façon. Autrement dit, il prouve que toute courbe quartique est l'intersection de son plan avec le cône circonscrit à

84. [Blythe 1905, p. v].

85. Le fait que toute courbe quartique plane possède vingt-huit tangentes doubles était connu depuis [Plücker 1839]. Pour des explications mathématiques et historiques à ce sujet, voir le chapitre 5 de [Gray 2000].

86. L'utilisation d'un cône circonscrit à la surface rappelle la deuxième démonstration d'existence des vingt-sept droites, mais Geiser ne mentionne pas [Cayley 1849].

une certaine surface cubique.

Les démonstrations de ces résultats ne forment que le début de l'article de Geiser. Le but de celui-ci est en effet d'utiliser la construction précédente des courbes quartiques afin de déduire des propriétés sur leurs tangentes doubles grâce à celles, connues, des vingt-sept droites. En fait, et Geiser l'écrit lui-même, la plupart des résultats sur les tangentes doubles ainsi obtenus ne sont pas nouveaux :

> En conséquence de l'aperçu précis que l'on a sur les positions mutuelles des 27 droites d'une surface du troisième degré, les conclusions que l'on peut tirer de ce théorème [le lien entre les deux configurations *via* la projection] sont nombreuses. Celles-ci devront plus tard être exposées aux mathématiciens dans une présentation détaillée, et être mises en rapport avec les résultats de la théorie des tangentes doubles d'une courbe du quatrième degré que l'on doit à Aronhold, Clebsch, Hesse, Roch, Salmon et Steiner.
>
> Pour expliquer cela, nous ne donnerons ici que quelques exemples, qui conduisent pour la plupart à des résultats connus.[87]. [Geiser 1869b, p. 133]

Un exemple d'un tel résultat est le suivant. Geiser rappelle que les vingt-sept droites d'une surface cubique se regroupent six à six suivant qu'elles sont incluses dans un même hyperboloïde[88]. Il en déduit, par projection sur un plan coupant le cône circonscrit à la cubique, que les tangentes doubles d'une courbe quartique se regroupent six à six suivant qu'elles enveloppent une même conique. Ce résultat, d'après Geiser, avait déjà été vu par Siegfried Aronhold et par Otto Hesse (aucune référence précise n'est donnée).

Henderson explique ensuite que les résultats de Geiser ont été utilisés par Zeuthen en 1874 pour retrouver ceux de Schläfli concernant les possibilités pour les nombres de droites réelles parmi les vingt-sept d'une surface cubique. En effet, dans [Zeuthen 1874], il détermine les formes possibles de courbes quartiques planes en s'aidant de leurs tangentes doubles, déterminant pour cela le nombre de ces dernières qui peuvent être réelles[89] : ce nombre peut être 28, 16, 8 ou 4. Zeuthen trouve 36 formes possibles pour les courbes quartiques qu'il décrit par des expressions comme : « quartique quadrilatérale, composée d'un *trifolium*, d'un *unifolium* et d'un ovale », et dont il donne quelques dessins (voir la figure 1.8). Dans la suite de l'article, Zeuthen rappelle et utilise le résultat de Geiser pour appliquer aux surfaces cubiques ce qu'il a trouvé sur les courbes quartiques. Ainsi, à partir des nombres 28, 16, 8 ou 4 pour les tangentes doubles réelles, il déduit que parmi

87. « Im Folge der genauen Einsicht, welche man in die gegenseitige Lage der 27 Geraden einer Fläche dritten Grades hat, sind die Folgerungen, welche man aus diesem Satze ziehen kann, sehr zahlreich. Dieselben sollen späterhin in einer umfassenderen Darstellung den Mathematikern vorgelegt, und mit den Resultaten aus der Theorie der Doppeltangenten einer Curve vierten Grades in Zusammenhang gebracht werden, welche man den Herren Aronhold, Clebsch, Hesse, Roch, Salmon und Steiner verdankt. Hier mögen nur zur Erläuterung einige Beispiele angeführt werden, die zum grössten Theil auf bekannte Resultate führen. »

88. Ce résultat se trouve dans [Cayley 1849, p. 128] et [Steiner 1856b, p. 136]. Geiser lui-même ne donne toutefois pas de référence précise.

89. Comme le souligne [Zeuthen 1874, p. 415], « Plücker avait présumé [dans [Plücker 1839]] que le nombre de tangentes doubles réelles ne peut avoir d'autres valeurs que 28, 16, 8, 4, 0 ».

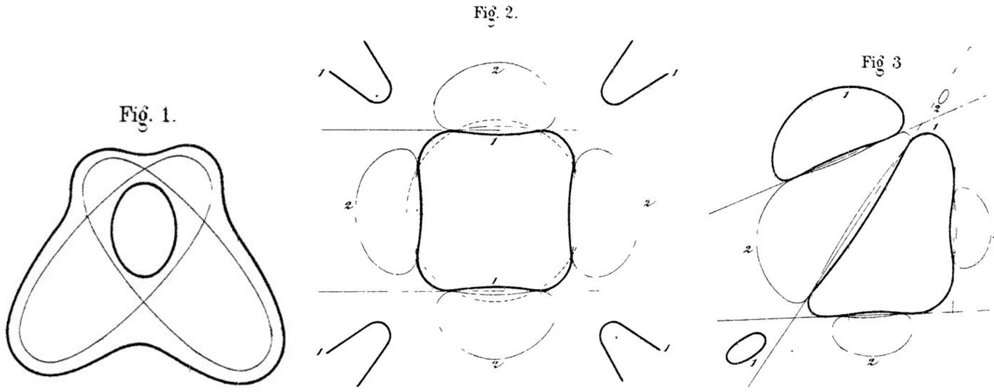


FIGURE 1.8 – Illustrations de [Zeuthen 1874] décrivant les formes possibles de courbes quartiques planes. La quartique composée d'un trifolium, d'un unifolium et d'un ovale est la courbe 1 de la figure 3.

les vingt-sept droites d'une surface cubique, il peut y en avoir 27, 15, 7 ou 3 de réelles, retrouvant ainsi le résultat de Schläfli. Enfin, Zeuthen utilise le même procédé pour compter les nombres possibles de triangles réels parmi les quarante-cinq.

Dans un autre article également cité par Henderson, [Zeuthen 1875], Zeuthen conjugue cette fois la méthode de Geiser avec ses propres résultats sur les formes des courbes quartiques pour en déduire quelles sont les formes possibles des surfaces cubiques [90]. Tout au long de son travail, il montre que sa façon de faire est tout à fait compatible avec celle utilisée dans [Klein 1873] : la dérivation par Klein des formes des cubiques à partir de la surface de Cayley correspond à la dérivation par Zeuthen des formes des quartiques à partir de celle composée de quatre ovales. Zeuthen s'appuie en outre sur les vingt-sept droites de la surface cubique qu'il cherche à décrire pour la décomposer en morceaux élémentaires qu'il appelle « triangles », « ouvertures » ou « parois » et qui lui servent à déterminer la forme de la surface.

Henderson mentionne ensuite un article de Heinrich Emil Timerding, [Timerding 1900]. Mais cet article concerne en fait très largement les courbes quartiques seules, c'est-à-dire sans leur lien avec les surfaces cubiques. Si Geiser est bien cité dans l'introduction, Timerding y écrit que l'utilisation de sa méthode aurait trop étendu son article [91].

1.3.9 Lien entre les vingt-sept droites et la configuration de Pascal

Henderson consacre le paragraphe suivant du résumé historique au lien entre les vingt-sept droites et la configuration de Pascal. Rappelons que cette dernière consiste en les six droites joignant les sommets opposés d'un hexagone inscrit dans une conique ; la propriété

90. [Zeuthen 1875] est ainsi certainement la référence à laquelle Henderson pensait lorsqu'il évoquait le nom de Zeuthen dans le paragraphe sur les formes des surfaces cubiques.

91. « Diese Herleitung [durch die Geisersche Weise] der einzelnen Sätze genauer zu verfolgen, wäre aber unmöglich gewesen, ohne den Umfang dieses Aufsatzes über Gebühr zu erweitern. ».

de ces droites est que leurs intersections mutuelles consistent en trois points qui sont alignés (voir la figure 1.9).

D'après Henderson, le lien entre cette configuration et les surfaces cubiques a été établi dans un publication de Cremona, [Cremona 1876-77][92]. Essentiellement, Cremona part d'une surface cubique ayant comme seul point singulier un point conique simple. La configuration de Pascal s'obtient en projetant sur un plan certaines des droites (parmi celles de la surface cubique), à partir du point singulier.

Plus précisément, Cremona part d'une surface cubique avec un point conique simple noté O. Il indique qu'il y a six droites incluses dans la surface[93] qui passent par O, et qui ont la propriété d'être situées sur un même cône quadratique de sommet O ; ces droites sont notées $1, 2, \ldots, 6$. Cremona rappelle aussi qu'à part ces six droites, il y en a quinze autre sur la surface cubique, notées 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56, de sorte que les droites 1, 2 et 12 sont situées dans un même plan, etc. En outre, ces quinze droites se répartissent trois à trois en neuf triangles :

$$\begin{array}{ccc} (12.34.56) & (12.35.46) & (12.36.45) \\ (13.34.56) & (13.25.46) & (13.26.45) \\ (14.23.56) & (14.25.36) & (14.26.35) \\ (15.23.46) & (15.24.36) & (15.26.34) \\ (16.23.45) & (16.24.35) & (16.25.34). \end{array}$$

Cremona met ensuite en évidence, parmi ces triangles, ceux qui forment des paires de trièdres de Steiner. Un exemple qu'il donne est le suivant :

$$\begin{array}{cc} (12.34.56) & (12.35.46) \\ (15.23.46) & (15.26.34) \\ (14.26.35) & (14.23.56). \end{array}$$

L'idée de Cremona est alors de projeter toutes ces droites sur un plan quelconque, à partir de O, et de montrer que les points et droites obtenus forment la configuration de Pascal.

Détaillons tout cela un peu plus que Cremona. Comme les droites $1, \ldots, 6$ passent par O, elles se projettent en six points, que je noterai $1', \ldots, 6'$ dans ces explications. Puisque les droites $1, \ldots, 6$ sont incluses dans un même cône quadratique, les points projetés $1', \ldots, 6'$ sont situés sur une même conique. Ensuite, la droite 14, qui ne passe pas

92. Le résumé historique de Henderson renvoie également au chapitre de [Henderson 1915] concernant la configuration de Pascal. La référence supplémentaire qui y est donnée, [Cayley 1868c], traite de la configuration de Pascal mais ne parle par des droites des surfaces cubiques.

93. Cela avait déjà été remarqué par Salmon dans son article de 1849 : il leur avait attribué la multiplicité de comptage égale à 3.

par O, se projette sur une droite du plan ; comme 14 rencontre la droite 1 et la droite 4, sa projection contient les points $1'$ et $4'$. La droite 14 se projette donc en la droite $1'4'$, et il en est de même pour toutes les autres droites de ce type-là. Voir la figure 1.9. Il reste

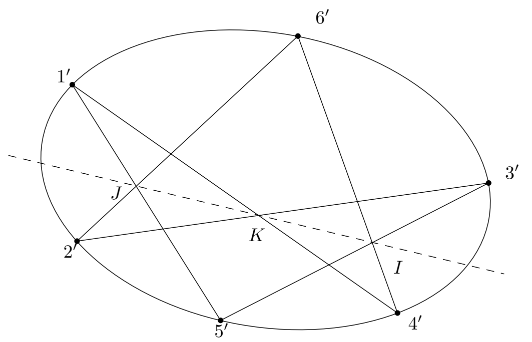


FIGURE 1.9 – Hexagramme de Pascal

à vérifier que la configuration obtenue est bien la configuration de Pascal. Par exemple, le point d'intersection I de $4'6'$ et $3'5'$ provient, dans la projection, du point d'intersection de 46 et 35, lequel appartient à la droite de rencontre des plans (15.23.46) et (14.26.35). De même, l'intersection J de $1'5'$ et $2'6'$, ainsi que celle K de $2'3'$ et $1'4'$, proviennent de cette même droite intersection des plans (15.23.46) et (14.26.35). Les trois points I, J et K sont donc alignés sur la projection de cette droite, et on obtient donc la configuration de Pascal.

1.3.10 Un paragraphe de références

Comme écrit plus haut, le paragraphe suivant du résumé historique de Henderson est composé uniquement de références, qui sont « parmi les récentes recherches sur la théorie des surfaces cubiques, les problèmes alliés des vingt-sept droites et des tangentes doubles des courbes quartiques, avec des généralisations à des dimensions supérieures [94] ». Les noms que donne Henderson sont ceux de Herbert William Richmond, Alfred Cardew Dixon, Marjorie Long, Henry Frederick Baker et Geoffrey Thomas Bennett.

Ces cinq mathématiciens ont le point commun d'avoir été formés ou d'avoir été professeurs de mathématiques à Cambridge au début du vingtième siècle. Il est donc probable que Henderson ait ajouté toutes les références correspondantes suite à son séjour à Cambridge en 1910-1911.

La majorité de ces références concernent les doubles-six. Ainsi, [Dixon 1908] et [Dixon 1910] sont des investigations sur des doubles-six considérés sans leur rapport avec les vingt-sept droites des cubiques ; [Richmond 1908] propose une généralisation de la notion de

94. « Among recent investigations on the theory of the cubic surface, the allied problems of the twenty-seven lines, and the bitangents to the plane quartic curve, with generalization to higher dimensions, are the papers [...] », [Henderson 1915, p. 5].

double-six dans un espace de dimension 5 ; [Burnside 1910], [G. T. Bennett 1911] et [Baker 1911a] développent une théorie de doubles-six associés non pas à des surfaces cubiques mais à des surfaces quadriques.

L'article [Long 1911] a pour but de prouver des propriétés des tangentes doubles d'une courbe quartique plane grâce à la méthode de projection de Geiser. Comme ce dernier, Long précise d'emblée que tous les résultats qu'elle obtient ainsi sont déjà connus et ont été prouvés [95].

Enfin, [Baker 1911b] est un mémoire concernant à la fois les tangentes doubles des courbes quartiques et les surfaces cubiques. Il récapitule en grande partie des résultats connus sur le sujet (projection de Geiser, doubles-six, propriétés des tangentes doubles, etc.) et en propose quelques nouveaux. Dans son introduction, Baker met en particulier un résultat nouveau en avant : on considère un double-six formé de douze des vingt-sept droites d'une surface cubique et un point quelconque de la surface. Dans le double-six, il y a six paires de droites qui ne se coupent pas ; chacune de ces paires définit, avec le point donné, une nouvelle droite (celle qui passe par le point et intersecte les deux droites de la paire). Alors ces six nouvelles droites sont situées sur un même cône d'ordre 2.

1.3.11 Variétés cubiques dans un espace de dimension 4

Henderson passe ensuite rapidement en revue les travaux de Corrado Segre publiés en 1887 et 1889, [C. Segre 1887 ; C. Segre 1889]. Il s'agit de recherches sur une (hyper)variété cubique d'une espace de dimension 4, c'est-à-dire un ensemble de points de coordonnées homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_5$ vérifiant une équation polynomiale de degré 3.

Cette variété est projetée sur des espaces de dimension 3 de façon adéquate, de sorte à retrouver un certain nombre de configurations géométriques et de résultats associés déjà connus, comme les surfaces cubiques et leurs vingt-sept droites, mais aussi les courbes quartiques planes et leurs vingt-huit tangentes doubles, la configuration de Pascal et la surface de Kummer et ses seize points singuliers [96].

On pourra remarquer que dans ces travaux, les vingt-sept droites n'occupent pas de place particulière. Il n'est d'ailleurs pas question de redémontrer ou même de justifier leur existence à partir de la variété cubique : elles sont évoquées en tant qu'objets naturellement associés à des surfaces cubiques.

95. « The properties of the bitangents in question have already been fully discussed by other points of view. » [Long 1911, p. 205].

96. La surface de Kummer est une surface quartique possédant exactement seize points singuliers, soit le maximum pour les quartiques.

1.3.12 Point de vue de la théorie des groupes

Enfin, Henderson clôt son résumé historique par un paragraphe concernant le point de vue du problème des vingt-sept droites depuis la théorie de groupes [97]. Pour lui, ce sujet commence en 1869, lorsque Camille Jordan démontre un lien entre les vingt-sept droites et les fonctions hyperelliptiques, [Jordan 1869a].

Plus précisément, ce lien concerne les équations algébriques associées respectivement aux vingt-sept droites et à la trisection des périodes des fonctions hyperelliptiques. La première est une équation algébrique de degré 27 en une inconnue, dont chaque racine correspond à une des vingt-sept droites, les relations algébriques entre ces racines reflétant les relations d'incidence existant entre les droites (voir la fin de l'introduction générale). La seconde est liée aux fonctions hyperelliptiques, qui sont des fonctions (généralement définies deux par deux) $\lambda_0(u,v)$ et $\lambda_1(u,v)$ de deux variables complexes et possédant quatre périodes par variable. Le problème de la *trisection* est de déterminer $\lambda_0(u/3,v/3)$ et $\lambda_1(u/3,v/3)$ en fonction de $\lambda_0(u,v)$ et $\lambda_1(u,v)$; il devient le problème de *trisection des périodes* lorsque u et v sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes de λ_0 et λ_1. Ce problème dépend de deux équations à deux inconnues (l'une pour $\lambda_0(u/3,v/3)$, l'autre pour $\lambda_1(u/3,v/3)$), et l'équation de trisection est celle résultant de l'élimination d'une des deux inconnues. Ce que démontre Jordan est que le groupe de l'équation de trisection (réduit par adjonction d'un radical carré) est identique à celui de l'équation aux vingt-sept droites.

Remarquons que Henderson fait également référence au *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Jordan, [Jordan 1870b]. Dans cet ouvrage, le résultat précédent est repris, mais l'équation aux vingt-sept droite est également étudiée sans son lien avec les fonctions hyperelliptiques : en se basant sur des résultats géométriques comme la coplanarité trois à trois des vingt-sept droites en les quarante-cinq triangles — le mémoire de Steiner que j'ai décrit plus haut est cité pour ce résultat, [Steiner 1856b] —, Jordan étudie le groupe de l'équation et en déduit des propriétés de résolubilité. D'autres équations particulières y sont également étudiées, associées à des configurations géométriques que nous avons déjà rencontrées comme les vingt-huit tangentes doubles ou les seize points singuliers de la surface de Kummer, et d'autres comme les neuf points d'inflexion des courbes cubiques planes ou les seize droites des surfaces quartiques contenant une conique double. Lors de son étude du groupe l'équation associée aux vingt-huit tangentes doubles, Jordan montre qu'un de ses sous-groupes est identique au groupe de l'équation aux vingt-sept droites. Il commente à ce propos : « Ainsi se retrouve entre le problème des vingt-sept droites et celui de doubles tangentes, le lien remarquable remarqué par M. Geiser », [Jordan 1870b, p. 330] — Jordan fait référence à l'article de Geiser décrit plus haut dans cette section, [Geiser 1869b]. Le *Traité* contient en outre un lien entre l'équation aux vingt-sept droites et celle

97. « The problem of the twenty-seven lines is full of interest from the group theoretic standpoint. » [Henderson 1915, p. 6].

aux seize droites des surfaces quartiques à conique double, situation géométrique qui n'est quant à elle pas mentionnée par Henderson.

Ce dernier indique ensuite qu'en 1887, Klein avait « ébauché la réduction effective d'un problème à l'autre [98] » (celui des vingt-sept droites et celui des fonctions hyperelliptiques). Dans la publication correspondante, [Klein 1888] (qui est un extrait d'une lettre écrite à Jordan), Klein commence par rappeler sa résolution de l'équation générale du cinquième degré par les fonctions elliptiques, au cœur de laquelle se trouve l'icosaèdre [99]. Il explique alors qu'il souhaite calquer cette méthode au cas de l'équation dont dépendent les vingt-sept droites, qu'il souhaite résoudre par les fonctions hyperelliptiques. Pour ce faire, il se base notamment sur des travaux de deux de ses élèves, Heinrich Maschke et Alexander Witting, dont les mémoires correspondants sont également donnés par Henderson [100]. Ce dernier écrit en outre que Heinrich Burkhardt a complètement mené à terme l'ébauche de Klein en 1893, [Burkhardt 1893].

Henderson donne encore une liste de travaux concernant le groupe de Galois de l'équation aux vingt-sept droites. Les mathématiciens cités sont Dickson, Friedrich Kühnen, Heinrich Weber, Ernesto Pascal et Edward Kasner [101]. Décrivons brièvement les travaux correspondants, dans l'ordre chronologique.

La publication de Weber citée, [Weber 1884], est un article qui a pour objet d'étude principal le groupe de Galois de l'équation associée aux vingt-huit tangentes doubles d'une courbe quartique. De façon différente que Jordan l'avait fait dans le *Traité des substitutions*, Weber étudie ce groupe en en cherchant le cardinal, les sous-groupes remarquables, les facteurs de composition, etc. En particulier, il met en évidence un sous-groupe particulier, isomorphe au groupe de l'équation aux vingt-sept droites, retrouvant ainsi un lien également vu par Jordan dans le *Traité*. La référence citée par Henderson de Kühnen est sa thèse, [Kühnen 1888] ; elle s'attache à étudier le groupe de Galois de l'équation aux vingt-sept droites, de façon tout à fait analogue à ce qu'avait fait Weber dans le texte cité précédemment [102]. Ce groupe de Galois est obtenu comme groupe de substitutions sur des racines laissant certaines relations entre ces racines inaltérées. Comme dans l'article de Weber décrit à l'instant, Kühnen cherche à déterminer les sous-groupes remarquables, les facteurs de compositions, etc., du groupe de Galois en question.

Les travaux de Dickson sur le groupe de l'équation aux vingt-sept droites et cités par Henderson peuvent se diviser en deux parties, au vu de la façon dont ce groupe est réalisé.

98. « In 1887, Klein sketched the effective reduction of the one problem to the other », [Henderson 1915, p. 6].

99. À propos des travaux de Klein sur l'icosaèdre, voir [Gray 2000].

100. [Maschke 1887 ; Maschke 1888 ; Maschke 1889 ; Maschke 1890 ; Witting 1887b].

101. [Dickson 1901a ; Dickson 1901b ; Dickson 1901c ; Dickson 1902 ; Kühnen 1888 ; Weber 1884 ; Pascal 1892 ; Pascal 1893 ; Kasner 1903]

102. Kühnen n'indique pas qui a dirigé sa thèse. La proximité avec la structure, les méthodes et les notations de [Weber 1884] laisse supposer que le directeur de thèse était Weber. En outre, la thèse a été effectuée à Marbourg, où se trouvait ce dernier entre 1884 et 1892.

Dans un des articles de 1901, [Dickson 1901a], Dickson fait l'étude du groupe qu'il note $SA(4, p^n)$ et qu'il appelle *abélien* [103]. Il en cherche notamment les classes de conjugaison, les sous-groupes cycliques et les générateurs. Le groupe associé aux vingt-sept droites apparaît tout à la fin, en tant que cas particulier : Jordan avait montré que pour $p^n = 3$, le groupe abélien correspond au groupe de l'équation aux vingt-sept droites. Dickson en déduit grâce au travail général fait en amont, diverses propriétés de ce groupe. Les autres travaux de Dickson, [Dickson 1901b ; Dickson 1901c ; Dickson 1902] réalisent le groupe associé aux vingt-sept droites comme groupe de substitutions laissant des relations invariantes. Là encore, il s'agit pour Dickson de trouver sous-groupes particuliers, classes de conjugaison, etc.

Les deux articles d'Ernesto Pascal, [Pascal 1892 ; Pascal 1893], relient quant à eux la théorie des fonctions abéliennes avec celle de monodromie sur les surfaces de Riemann. Pour une surface de Riemann particulière (de genre 3), Pascal parvient à réaliser le groupe de Galois de l'équation aux vingt-huit tangentes doubles comme un certain groupe de monodromie de la surface. Le groupe de l'équation aux vingt-sept droites est alors vu comme un sous-groupe de ce groupe de monodromie, puis est étudié sous cet angle — à ce sujet, Pascal cite à la fois les travaux de Jordan et ceux de Geiser sur le lien entre les vingt-sept droites et les vingt-huit tangentes doubles.

La publication de Kasner que cite Henderson, [Kasner 1903], a pour principal objet d'étude un double-six, qu'il précise être réalisé sans l'aide d'une surface cubique : il s'agit donc de droites de l'espace disposées de façon particulière, mais sans rapport *a priori* avec les vingt-sept droites. Il définit certains birapports associés aux double-six puis étudie des transformations de Cremona [104] définies à partir de ces birapports. L'article de Kasner ne traite donc pas des vingt-sept droites d'une surface cubique.

Pour finir, Henderson mentionne encore deux articles de Moore et de Herbert Ellsworth Slaught, [E. H. Moore 1900 ; Slaught 1900] qu'il dit être proches de [Kasner 1903]. Mais ces publications de Moore et de Slaught concernent des groupes de transformation de Cremona sans aucun rapport avec les vingt-sept droites ou même les surfaces cubiques. Avec cela, Henderson clôt son paragraphe sur la théorie des groupes et les vingt-sept droites, et termine ainsi son résumé historique.

On pourra remarquer que presque toutes les références donnée par Henderson au sujet de la théorie des groupes sont liées aux travaux de Jordan des années 1869-1870 sur l'équation aux vingt-sept droites.

103. En termes modernes, il s'agit du groupe symplectique $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_{p^n})$, formé des substitutions sur quatre variables laissant inchangée la forme bilinéaire alternée $x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3$.

104. Une *transformation de Cremona* est une transformation birationnelle de l'espace.

1.3.13 Bilan : thèmes et chronologie

Il est temps de revenir sur les questions qui avaient été posées *supra.* Il s'agissait d'abord de voir si la division thématique de Henderson pouvait résister à une analyse plus détaillée des articles mathématiques qu'il mentionnait. La réponse est que si cette division peut effectivement refléter une variété de sujets associés aux vingt-sept droites, on ne peut pas la penser comme un moyen de classifier les recherches sur les vingt-sept droites dans des rubriques distinctes et étanches.

En effet, beaucoup d'articles listés par Henderson pourraient relever de plusieurs de ses thèmes. Quelques exemples sont les suivants : les articles de Cayley et de Salmon de 1849 traitent de l'existence des vingt-sept droites, mais aussi des problèmes de notation et des singularités ; les travaux de Cremona et de Sturm, isolés par Henderson parce ce qu'ils constituent les « premiers articles significatifs du point de vue synthétique », contiennent des démonstrations des possibilités pour le nombre de droites réelles parmi les vingt-sept et pourraient donc être cités dans le paragraphe thématique correspondant ; enfin, Jordan, qui utilise effectivement la théorie des groupes pour étudier l'équation aux vingt-sept droites, mais qui retrouve aussi le lien de Geiser entre vingt-sept droites et vingt-huit tangentes doubles.

Il existe également des travaux qui appartiennent à un thème mais qui sont motivés par ou s'appuyant sur des recherches classifiées dans un autre thème. Par exemple, les mémoires de Cremona et de Sturm reprennent et démontrent tous les résultats du mémoire de Steiner ; l'article de Zeuthen sur les formes des surfaces cubiques utilise la projection employée par Geiser pour mettre lier ces surfaces aux courbes quartiques planes ; dans son article sur la configuration de Pascal, Cremona fait appel au fait (vu déjà chez Salmon) que par un point conique simple d'une surface cubique passe six droites, et utilise aussi les résultats de répartition des droites en paires de trièdres Steiner.

La pluralité des problèmes traités à l'intérieur de certains articles, la circulation de méthodes et de résultats témoigne ainsi d'une histoire plus riche que celle que la lecture seule du résumé historique de Henderson laisse imaginer.

En ce qui concerne maintenant la chronologie du sujet des vingt-sept droites, on peut voir à quel point le résumé historique de Henderson la mettait à mal, à cause de l'écriture en paragraphes thématiques mais aussi à cause de l'ordre de présentation de ces derniers. Si l'on reprend les travaux cités par Henderson en les remettant dans l'ordre chronologique, la succession obtenue est la suivante.

En 1841, Mossbrugger publie son article sur l'interprétation en termes de distances des coefficients des équations de surfaces quadriques et cubiques. En 1849, les articles de Cayley et de Salmon contenant les démonstrations d'existence des vingt-sept droites, mais aussi des considérations sur la notation des droites et sur la possible présence de singularités sur les surfaces cubiques.

Sept ans plus tard, en 1856, Steiner communique à l'Académie des sciences de Berlin ses travaux sur les surfaces cubiques, lesquels apparaissent ensuite dans le journal de Crelle. En 1858, Schläfli (sans connaissance précise des travaux de Cayley et Salmon) écrit un article où il définit les doubles-six, propose une notation basée sur ces objets et annonce les possibilités pour les nombres de droites réelles parmi les vingt-sept.

Schläfli reprend ce dernier problème dans un mémoire de 1863, dans lequel il complète la classification des surfaces cubiques selon leurs singularités ébauchée par Salmon. Le premier prix Steiner, annoncé en 1866, couronne les travaux de Sturm et de Cremona, qui sont publiés en 1867 et 1868 respectivement. L'année 1869 est riche : Cayley publie son grand mémoire sur les surfaces cubiques, dans lequel il reprend et complète notamment la classification de Schläfli des surfaces cubiques par leurs singularités. De plus, le modèle en plâtre de Wiener est construit et présenté, Geiser établit le lien entre les vingt-sept droites et les vingt-huit tangentes doubles et Jordan publie ses articles dans lesquels il étudie l'équation aux vingt-sept droites.

Ces travaux de Jordan paraissent également dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de 1870, dans lequel sont également étudiées les équations associés à d'autres configurations de points et de droites. En 1872, les modèles de la surface diagonale et de la surface de Cayley sont présentées par Clebsch et par Klein à l'Académie des sciences de Göttingen. Un an plus tard, Klein publie ses recherches sur les formes possibles des surfaces cubiques. Ensuite, en 1874, Zeuthen s'intéresse aux formes des courbes quartiques puis, en 1875, à celles de surfaces cubiques (il retrouve aussi à ce moment la classification de Schläfli de ces surfaces eu égard à la réalité de leurs droites). En 1876, Cremona montre comment déduire la configuration de Pascal à partir des vingt-sept droites. En 1879, Rodenberg aboutit à une classification des cubiques en fonction de leur pentaèdre et commence sa série de modèles en plâtre.

À partir de 1884, une série d'articles concernent à nouveau le groupe de l'équation aux vingt-sept droites. Ainsi, celui de Weber (nettement centré sur les vingt-huit tangentes doubles) de 1884, ceux de Witting (1887) et de Maschke (chaque année de 1887 à 1890) sur lesquels Klein s'appuie en 1888 pour revenir sur la résolution de l'équation aux vingt-sept droites par les fonctions hyperelliptiques, et enfin la thèse de Kühnen (1888) sur le groupe de Galois de cette même équation. Par ailleurs, en 1889, Corrado Segre développe ses résultats concernant les variétés cubiques d'un espace de dimension 4.

Le début des années 1890 est encore centré sur les groupes, avec les articles de Pascal (1892 et 1893) ainsi que celui de Burkhardt de 1893 qui reprend et complète l'ébauche de Klein de la résolution de l'équation aux vingt-sept droites. En 1894 a lieu le *Evanston Colloquium*, durant lequel Klein parle notamment des formes et des modèles des surfaces cubiques. La même année, Taylor propose sa notation des vingt-sept droites indépendante de toute choix initial.

En 1901 et 1902 est publiée la série de travaux de Dickson sur le groupe de l'équation aux vingt-sept droites. Ces mêmes années, Blythe travaille sur les modèles et les formes des cubiques ; tous les résultats sont publiés dans un livre en 1905. Enfin, toutes les publications postérieures sont celles de Long, Dixon, Baker et Bennett, qui reviennent ou généralisent la notion de double-six, sans nécessairement de lien avec les surfaces cubiques.

La chronologie ainsi rétablie montre notamment que si le sujet des vingt-sept droites s'ouvre à proprement parler en 1849, les travaux s'y rapportant sont rares avant le milieu des années 1860. En revanche, ils se multiplient à partir de ce moment et des articles paraissent à peu près régulièrement jusque dans la première décennie du XX^{e} siècle. Il convient toutefois de garder à l'esprit que cette chronologie se base sur les travaux cités par Henderson dans son résumé historique. Elle vise ici à mettre en exergue les effets des choix d'écriture de celui-ci, et ne se prétend absolument pas exhaustive sur le sujet — nous pourrions ainsi placer dans la chronologie toutes les publications trouvées à l'aide du *Jahrbuch*.

1.4 Sur l'écriture d'une histoire des vingt-sept droites

L'étude menée jusqu'à présent dans ce chapitre amène à quelques conclusions historiographiques relatives au sujet du théorème des vingt-sept droites.

1.4.1 L'histoire de Henderson

Comme nous l'avons vu jusqu'à présent dans ce chapitre, l'histoire des vingt-sept droites écrite par Henderson pose plusieurs problèmes : celui des références bibliographiques et celui du choix de plusieurs thèmes distincts sur lesquels l'histoire a été écrite, ayant pour conséquence une chronologie malmenée, et surtout, à cause de la description superficielle de chaque article cité, une perte de compréhension des cohérences de chacun d'eux.

Ces problèmes, que j'ai déjà discutés en détail un à un, ont des conséquences non négligeables sur l'histoire produite par Henderson, appauvrie par son morcellement en thèmes arbitraires et par la faible profondeur de ses explications mathématiques. Les quelques dynamiques qui ont été mises à jour dans les sections précédentes (reprises de problèmes, emprunts de résultats ou de méthodes) laissent imaginer une histoire des vingt-sept droites bien plus riche, d'autant plus que Henderson n'a pas considéré un bon nombre de travaux mathématiques sur le sujet (même entre 1849 et 1915).

Ces réserves sur une histoire devenue « officielle » ne signifient pas qu'elle est à rejeter d'un bloc, mais bien qu'il convient de la lire avec circonspection. Par ailleurs, même les complétions et les approfondissements notamment mathématiques (et encore superficiels) ne prétendent palier à ses biais : si détaillées que soient les descriptions que j'ai pu faire, elles restent inscrites dans un cadre d'une histoire à la Dickson et sont de ce fait peu satisfaisantes.

Le travail effectué va toutefois me servir à trouver une autre approche pour le sujet des vingt-sept droites, en utilisant les textes étudiés comme des sondes pour confirmer deux points que j'ai annoncé dans l'introduction générale. Le premier se rapporte aux méthodologies des travaux historiques récents sur « l'histoire d'un théorème », consistant à suivre pas à pas les différentes formulations d'un théorème.

1.4.2 Les formulations du théorème

Or, dans la description des articles faite *supra*, la formulation du théorème des vingt-sept droites est particulièrement stable : les surfaces cubiques restent des surfaces algébriques d'ordre 3, les vingt-sept droites restent des droites de l'espace au sens de lieux de points usuels, et le théorème consiste toujours en une inclusion de vingt-sept droites dans chaque surface cubique.

Les travaux qui se rapprochent le plus de telles reformulations sont ceux de Steiner, Schröter, R. Sturm et Cremona. En effet, il s'agit pour eux de se baser sur certaines façons « purement géométriques » d'engendrer des surfaces cubiques et de savoir prouver l'existence des vingt-sept droites à partir de là. Si le changement de cadre reflète ici la volonté de se restreindre à une certaine façon de faire de la géométrie, le théorème d'existence est quant à lui inchangé.

À part dans ces travaux, les vingt-sept droites sont mobilisées sans changement de point de vue sur leur nature (ou celle de leur cubique) ou leur existence. Deux exemples illustrent bien cela. Le premier est celui de C. Segre, qui définit des variétés cubiques dans un espace de dimension 4. Mais les surfaces cubiques ne sont définies qu'en se ramenant au préalable dans une espace de dimension 3. Dès lors, il ne s'agit pas pour lui de chercher d'où proviennent les vingt-sept droites dans l'espace de dimension 4 ou comment les y interpréter : ce sont plutôt des objets associés *de facto* à une surface cubique. Le second exemple est formé des travaux de Jordan ou de Dickson. Pour ces auteurs, il ne s'agit pas de réinterpréter des résultats connus sur les vingt-sept droites (comme par exemple leur existence) grâce à la théorie des groupes. Celles-ci fournissent plutôt un prétexte pour créer des équations et des groupes à étudier, lesquels ne sont donc pas perçus comme des substituts des vingt-sept droites.

Pour insister sur ces points, on peut comparer ces situations avec les points de vue de la fin du XX^e siècle qui ont été décrits dans l'introduction générale. Rappelons par exemple que pour Arnaud Beauville, [Beauville 1978], il s'agit de montrer que les surfaces dites de Del Pezzo contiennent toutes un nombre fini de droites (vues comme des images de diviseurs exceptionnels), que ce nombre est 27 pour celles de degré 3, et que les surfaces de Del Pezzo de degré 3 sont des surfaces cubiques.

Enfin, notons que la restriction aux textes qui ont été étudiés dans le chapitre laisse évidemment ouverte la possibilité de passer à côté de certaines reformulations importantes du théorème des vingt-sept droites. Mais la stabilité de la forme de l'énoncé, dans ces mêmes textes, met surtout en évidence que vouloir suivre uniquement des reformulations nous ferait passer à côté de toute une masse de textes dans lesquels les vingt-sept droites sont pourtant présentes et travaillées.

1.4.3 Le cas du thème « théorie des groupes »

Toujours en utilisant les références de Henderson comme sonde, je propose à présent de tester le potentiel d'une autre approche, basée sur des rapprochements disciplinaires mis en jeu autour du sujet des vingt-sept droites. La mise en évidence par Henderson d'un thème axé sur l'approche du problème des vingt-sept droites par la théorie des groupes constitue un premier indice de tels rapprochements.

Dans la section 1.3, nous avons vu que des travaux cités par Henderson dans ce thème faisaient intervenir les vingt-sept droites, les fonctions hyperelliptiques ainsi que des équations (et leurs groupes) associées à ces objets. Il semble donc qu'un rapprochement entre géométrie, analyse et algèbre ait lieu autour de l'équation aux vingt-sept droites. Une question est toutefois de savoir si la pluralité des catégories disciplinaires que j'ai utilisées ici spontanément reflète une pluralité également vue à l'époque, et, le cas échéant, s'il s'agit d'une spécificité des textes étiquetés « théorie des groupes » par Henderson.

Pour répondre à cela, j'ai utilisé les classifications offertes par l'index du *Catalogue of Scientific Papers* (pour les articles publiés entre 1800 et 1900) et par le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (pour les publications postérieures à 1868). J'ai déjà décrit la classification du *Catalogue* plus haut dans ce chapitre [105]. J'ai donc également relevé, pour l'ensemble des références bibliographiques du livre de Henderson, les sections du *Jahrbuch* dans lesquelles elles sont classifiées. Le détail de ces relevés est donné dans l'annexe B.

Un résultat frappant est que la plupart des références apparaissant chez Henderson dans le bloc de théorie des groupes possèdent une double (voire une triple) classification, que ce soit dans le *Catalogue* ou dans le *Jahrbuch*, ou ont sinon la particularité d'être citées au sein de séries d'articles éparpillés entre différentes sections disciplinaires. Précisons en commençant par le *Catalogue*.

Comme écrit précédemment, la grande majorité des références bibliographiques de Henderson sont classifiées uniquement dans la section de géométrie du *Catalogue*, et quelques-unes parmi celles-ci apparaissent également dans d'autres sections [106]. Il y a ainsi des articles que l'on trouve en géométrie et dans la section générale : ces articles se rapportent tous aux modèles des surfaces cubiques et sont effectivement situés dans la partie « Modèles » de la section générale. Les autres articles de la section de géométrie jouissant d'une double classification se trouvent dans la section d'arithmétique et d'algèbre ou dans celle

105. L'usage de ces journaux de recension n'est pas dépourvu de biais en ce qui concerne les classifications disciplinaires. Voir [Goldstein 1999, p. 198] pour le cas de la théorie des nombres dans le *Jahrbuch*.

106. Noter que quelques articles apparaissent à deux endroits de la section de géométrie, comme [Geiser 1869b] qui se trouve dans la partie sur les courbes algébriques d'ordre 4 et dans celle sur les configurations remarquables.

d'analyse, et à l'exception d'un seul [107], tous ces articles sont donnés par Henderson dans son paragraphe sur l'approche des vingt-sept droites par la théorie des groupes. Enfin, on remarquera que tous les articles situés uniquement dans la section d'analyse ou dans celle d'arithmétique et d'algèbre proviennent également de ce paragraphe.

En ce qui concerne le *Jahrbuch*, le constat est très ressemblant. Les seules publications qui y sont dotées de doubles classifications [108] sont issues du bloc « théorie des groupes » de Henderson. Ces doubles classifications partagent les textes concernés soit entre géométrie et algèbre, soit entre géométrie et analyse — en outre, l'article [Jordan 1869a], par lequel Henderson ouvre son paragraphe sur la théorie des groupes, est situé à la fois en algèbre, en analyse et en géométrie. De plus, les publications recensées par le *Jahrbuch* qui sont uniquement dans la section d'analyse ou dans celle d'algèbre sont encore une fois celles du bloc de théorie des groupes de Henderson [109]. Ces publications-là font d'ailleurs la plupart du temps partie de séries d'articles d'un ou de plusieurs auteurs sur un même sujet et relevant chacun de classifications différentes [110].

Ainsi, les références que Henderson cite pour l'approche du problème des vingt-sept droites par la théorie des groupes possèdent bien une spécificité en regard des classifications du *Catalogue* et du *Jahrbuch*, étant situés à des carrefours disciplinaires. Il est d'ailleurs intéressant de noter que les doubles classifications décrites précédemment ne relèvent pas uniquement d'un contact de la géométrie et de l'algèbre, comme pourrait le laisser entendre la seule étiquette « approche des vingt-sept droites par la théorie des groupes », mais mettent également en jeu l'analyse en raison de l'intervention des fonctions hyperelliptiques. Tout cela indique donc bien que certaines dynamiques de rapprochements disciplinaires sont à l'œuvre dans les travaux que Henderson situe dans son bloc « théorie des groupes », et qu'il s'agit d'une spécificité de ce bloc.

La suite de la thèse va s'attacher à étudier ces rapprochements disciplinaires opérés autour des vingt-sept droites. Comme annoncé dans l'introduction générale, l'accent sera mis sur les dynamiques existant entre théorie des groupes et géométrie ; ce qui précède montre cependant qu'une composante analytique sera nécessairement à prendre en compte pour comprendre ces dynamiques. Le point de départ de l'investigation est formé des

107. [Kohn 1891a].

108. Comme précédemment, je m'intéresse ici aux doubles classifications entre l'une des deux sections de géométrie (analytique ou pure) d'une part, et les sections d'analyse et d'algèbre d'autre part. Noter que ces sections sont relativement stables sur la période considérée. Voir l'annexe B pour les détails. Remarquer enfin que la question de délimitations disciplinaires n'est pas exempte des choix des auteurs du *Jahrbuch*. À ce sujet, voir [Goldstein 1999, p. 198] pour le cas de la théorie des nombres.

109. À l'exception d'une seule, [Brioschi 1876], qui est dans le chapitre de théorie des formes de la section d'algèbre. Toutes les autres références classifiées en algèbre le sont soit dans le chapitre sur les équations, soit dans celui sur la théorie des substitutions.

110. Par exemple, parmi les quatre articles de Maschke cités d'un bloc par Henderson, trois sont classifiés en algèbre et un en géométrie. Outre ces quatre articles, Henderson cite un article de Witting et un article de Burkhardt (tous deux en analyse) pour leur lien avec [Klein 1888], lui-même situé en analyse et en géométrie.

travaux de Jordan sur l'équation algébrique associée aux vingt-sept droites qui se trouvent essentiellement dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques*, [Jordan 1870b].

Chapitre 2

Les vingt-sept droites et le *Traité des substitutions et des équations algébriques*

Dans le chapitre précédent, des travaux de Camille Jordan publiés autour de 1870 ont été identifiés comme point de départ pour l'étude des rapprochements disciplinaires entre théorie des substitutions et géométrie opérés autour du sujet des vingt-sept droites. Il s'agit plus précisément de travaux orbitant autour du *Traité des substitutions et des équations algébriques*, [Jordan 1870b] : en plus de ce *Traité*, le livre de Henderson citait deux articles qui en avaient tout juste précédé la parution et qui en sont plus ou moins des extraits, [Jordan 1869a ; Jordan 1869b]. La bibliographie de Henderson contenait également une courte note, [Jordan 1870a], dont l'objet est le prolongement d'un résultat sur les vingt-sept droites démontré dans le *Traité*.

En examinant les publications de Jordan dans les deux premiers tomes de ses *Œuvres*, consacrés d'après leurs éditeurs à ce qui relève de la théorie des groupes, il s'avère qu'à part celles qui viennent d'être listées, une seule autre mentionne les vingt-sept droites [1], [Jordan 1869c]. Cette note est encore une fois de celles qui avaient précédé le *Traité*, ce qui justifie notre focalisation principale sur cet ouvrage afin d'étudier les travaux de Jordan relatifs aux vingt-sept droites.

Comme écrit au chapitre 1, ces travaux concernent une certaine équation algébrique, appelée *équation aux vingt-sept droites* par Jordan, au sujet de laquelle les recherches se divisent en trois séries de résultats mathématiques. Dans leur ordre d'apparition dans le

1. J'ai également vérifié qu'aucun des titres des publications groupées dans les deux autres tomes des *Œuvres* de Jordan (consacrés l'un à l'algèbre linéaire et multilinéaire ainsi qu'à la théorie des nombres, l'autre à l'analyse et la mécanique) ne faisait mention des vingt-sept droites. Par ailleurs, le relevé effectué avec le *Jahrbuch* et présenté au chapitre précédent suggère bien que Jordan ne publie rien sur les vingt-sept droites après 1870. Toutefois, ce relevé ne fait pas non plus apparaître [Jordan 1869c] dont ni le titre, ni le texte du rapport ne contiennent « vingt-sept droites ». On voit ici à nouveau les difficultés de repérage du sujet.

Traité, on trouve ainsi d'abord une étude des propriétés de résolubilité de l'équation elle-même, puis des liens entre cette équation et celles associées respectivement aux vingt-huit tangentes doubles des courbes quartiques planes et aux seize droites des surfaces quartiques à conique double, et enfin un lien avec l'équation de trisection des périodes des fonctions hyperelliptiques.

C'est sur ces trois points que porte le présent chapitre [2]. Avant de les analyser tour à tour pour mettre en lumière les rapprochements disciplinaires qui s'y manifestent, je commencerai par deux points permettant de préciser cette analyse. Il s'agira d'abord de présenter plus en détail la place des vingt-sept droites dans le *Traité*, puis de montrer comment identifier ce que Jordan place du côté de la théorie des substitutions ou du côté de la géométrie dans ses travaux.

2.1 Les vingt-sept droites et le *Traité* : l'influence de Clebsch

2.1.1 Le *Traité* et son Livre III

Publié en 1870, le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Jordan représente l'aboutissement et la synthèse de la dizaine d'années de recherches sur les substitutions et les équations qu'il a menées depuis sa thèse de 1861 [3]. Plaçant résolument les groupes de substitutions au cœur des questions de résolubilité d'équations algébriques, cet ouvrage constitue [4]

> un tournant majeur dans le développement de la notion de groupe et de la théorie de Galois, marquant l'achèvement du processus de clarification des idées de Galois sur la résolubilité des équations. [Ehrhardt 2012, p. 144]

Les quatre Livres constituant le *Traité* sont de proportions inégales. Le Livre premier (18 pages), intitulé « Des congruences », est consacré aux congruences de nombres et de polynômes. Viennent ensuite les Livres II (231 pages) et III (131 pages), « Des substitutions » et « Des irrationnelles », portant respectivement sur les groupes de substitutions et sur l'étude d'équations algébriques au moyen de leur groupe. Enfin, le quatrième livre (279 pages), « De la résolution par radicaux », aborde de front la question de la classification complète des équations résolubles par radicaux [5].

C'est dans le Livre III, divisé en quatre chapitres, que se trouvent les recherches de Jordan relatives aux vingt-sept droites. Le chapitre I est celui des « Généralités » ; c'est

2. Une grande partie des éléments de ce chapitre a fait l'objet de l'article [Lê 2013].

3. Pour les informations de ce paragraphe, voir [Ehrhardt 2012], où Caroline Ehrhardt a étudié les conditions de relectures et d'assimilation du mémoire de Galois sur la résolution algébrique des équations au cours du XIXᵉ siècle. Le cas de Jordan et du milieu mathématique français est discuté au chapitre VI.

4. Au sujet du rôle du *Traité* dans le développement de la théorie des groupes, voir [Wussing 1969 ; Corry 2004].

5. Voir [Brechenmacher 2011, p. 275-277] pour une description plus détaillée des quatre livres du *Traité*. Voir également [Brechenmacher 2011, p. 333-347], où Frédéric Brechenmacher restitue des réseaux de textes faisant référence à Galois à travers les travaux de Jordan du livre III.

là que sont exposées les « méthodes de Galois », quelques premières applications de ces méthodes, ainsi que la définition et certaines propriétés des *groupes de monodromie* d'une équation [6]. Les trois autres chapitres consistent en des « applications algébriques », des « applications géométriques » et des « applications à la théorie des transcendantes » de ces méthodes. Par l'existence de ces différentes applications suivant l'exposition de méthodes générales, le Livre III respecte bien l'objectif annoncé par Jordan dans la préface du *Traité* :

> Le but de cet Ouvrage est de développer les méthodes de Galois et de les constituer en corps de doctrine, en montrant avec quelle facilité elles permettent de résoudre tous les principaux problèmes de la théorie des équations. [Jordan 1870b, p. VII]

Comme l'ont souligné F. Brechenmacher et C. Ehrhardt [7], ces applications étaient importantes en ce qu'elles donnaient une légitimité au *Traité* : par son usage de propriétés préliminaires démontrées par ses contemporains, ou par ses nouvelles preuves de résultats connus, comme ceux de Charles Hermite sur les équations modulaires ou la monodromie [8], Jordan inscrivait son ouvrage dans des cadres collectifs de l'époque.

Le chapitre II du Livre III, consacré aux applications algébriques, s'intéresse à ce que Jordan nomme « équations abéliennes » et « équations de Galois » — les premières sont celles dont le groupe de Galois est commutatif [9], alors que les secondes sont celles de degré premier, dont les racines s'expriment toutes rationnellement en fonction de deux d'entre elles. Les vingt-sept droites d'une surface cubique n'y apparaissant pas, je ne m'attarderai pas davantage sur ce chapitre-là.

En revanche, les vingt-sept droites font l'objet d'un des paragraphes du chapitre des applications géométriques. Ces paragraphes sont au nombre de six, chacun étant associé à une situation géométrique particulière :

§I Équation de M. Hesse.

§II Équations de M. Clebsch.

§III Droites situées sur les surfaces du quatrième degré à conique double.

---

6. Lorsque les coefficients d'une équation algébrique dépendent d'un paramètre complexe, le mouvement de ce paramètre le long d'un chemin fermé est susceptible d'induire une permutation des racines de l'équation. Le *groupe de monodromie* de l'équation (par rapport au paramètre) est le groupe formé des substitutions obtenues par tous ces mouvements. Des explications plus détaillées sont données en annexe C.

7. [Brechenmacher 2011, p. 334 ; Ehrhardt 2012, p. 178].

8. Au sujet des travaux de Hermite à ce propos, voir [Goldstein 2011a].

9. On prendra toutefois garde au fait que ce que l'appellation « groupe abélien » de Jordan ne coïncide pas avec la terminologie actuelle. Le *groupe abélien* (de taille $2n$, modulo p) est défini dans [Jordan 1870b, p. 171] : il s'agit de l'ensemble des substitutions (inversibles) qui transforment la fonction $\varphi = x_1\eta_1 - y_1\xi_1 + \cdots + x_n\eta_n - y_n\xi_n$ en un multiple d'elle-même (modulo p) en agissant sur les variables $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ et $(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n)$. En termes et notations modernes — Jordan n'a pas de notation standard pour ce groupe —, le groupe abélien est le produit semi-direct $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{F}_p) \rtimes \mathbf{F}_p^*$. À noter que dans la littérature secondaire, il est souvent écrit que la définition de Jordan du groupe abélien coïncide avec la définition actuelle de groupe symplectique $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{F}_p)$, qui ne correspond en fait qu'aux substitutions laissant φ inchangée.

§IV Points singuliers de la surface de M. Kummer.

§V Droites situées sur les surfaces du troisième degré.

§VI Problèmes de contact.

Dans l'ordre, les situations géométriques correspondantes sont les neuf points d'inflexion d'une courbe cubique plane, les courbes cubiques ayant un contact d'ordre 4 avec une courbe quartique donnée, les seize droites des surfaces quartiques à conique double, les seize points singuliers des surfaces de Kummer et les courbes de degré $n-3$ qui sont tangentes en $n(n-3)/2$ points à une courbe de degré n donnée — cette dernière situation recouvre celle des vingt-huit tangentes doubles à une courbe quartique, correspondant au cas $n=4$. Ces situations géométriques donnent chacune lieu à une équation algébrique particulière (comme l'équation aux vingt-sept droites) dont les propriétés sont étudiées au moyen de l'étude de son groupe.

Enfin, le chapitre IV, « Applications à la théorie des transcendantes », est divisé en quatre paragraphes :

§I Fonctions circulaires.

§II Fonctions elliptiques.

§III Fonctions hyperelliptiques.

§IV Résolution des équations par les transcendantes.

Dans les trois premiers paragraphes, Jordan étudie des équations particulières issues de fonctions spéciales, comme par exemple l'équation de degré n liant $\cos x/n$ à $\cos x$ pour un x donné, ou encore les équations modulaires associées aux fonctions elliptiques. Un autre exemple que nous avons déjà évoqué est celui dit de la trisection des périodes des fonctions hyperelliptiques, traité dans le §III ; les vingt-sept droites apparaissent à cet endroit, justement pour leur lien avec ce problème de trisection. Enfin, le §IV consiste à voir dans quelle mesure les équations issues de la théorie des transcendantes peuvent être utilisées pour résoudre d'autres équations [10].

Les endroits du *Traité* où apparaissent explicitement les vingt-sept droites sont donc les chapitres des applications géométriques et des applications à la théorie des transcendantes. Or, il est remarquable que ce sont précisément les passages pour lesquels Jordan évoque explicitement le nom d'Alfred Clebsch dans la préface du *Traité* :

10. Par exemple, l'équation $z^3 - 3/4z + A = 0$ peut être résolue à l'aide des fonctions circulaires grâce à sa ressemblance avec l'équation donnant $\cos x/3$ en fonction de $\cos x$. Hermite et Kronecker avaient montré comment résoudre l'équation générale de degré 5 grâce aux fonctions elliptiques — Hermite explicite d'ailleurs l'analogie du cas des équations cubiques avec le cas de la fonction sinus. Voir [Goldstein 2011a ; Gray 2000, ch. IV]. Dans le §IV du *Traité*, Jordan démontre quant à lui que les équations de degré supérieur à 5 peuvent toutes être résolues à l'aide de l'équation de bissection de fonctions hyperelliptiques.

> Nous tenons également à remercier MM. Clebsch et Kronecker des précieuses indications qu'ils nous ont fournies. C'est grâce aux libérales communications de M. Clebsch que nous avons pu aborder les problèmes géométriques du Livre III, Chapitre III, l'étude des groupes de Steiner et la trisection des fonctions hyperelliptiques. Nous devons à M. Kronecker la notion du groupe des équations de la division de ces dernières fonctions. Nous aurions désiré tirer un plus grand parti que nous l'avons fait des travaux de cet illustre auteur sur les équations. Diverses causes nous en ont empêché [...]. [Jordan 1870b, p. VIII]

Si les remerciements à Leopold Kronecker sont, dans cet extrait, immédiatement nuancés par l'incapacité avouée de Jordan à s'adapter à ses méthodes [11], rien de tel ne se lit au sujet de Clebsch. Ce dernier semble donc avoir réellement joué un rôle dans l'intégration des vingt-sept droites dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques*.

2.1.2 Quelques mots sur Alfred Clebsch

Rudolf Friedrich Alfred Clebsch est né en 1833 à Königsberg [12]. Son parcours académique commence en 1850 à l'université de cette ville, où il suit notamment des cours de Otto Hesse, Friedrich Richelot et Franz Neumann (le père de son ami d'enfance Carl Neumann). En 1854, il achève sa thèse de physique mathématique, préparée sous la direction de F. Neumann.

À partir de 1854, Clebsch enseigne les mathématiques dans plusieurs lycées de Berlin, tout en commençant à faire publier des travaux de physique mathématique et de calcul des variations [13]. Ses recherches restent principalement focalisées sur ces sujets entre 1858 et 1863, lors de son passage en tant que professeur à l'École polytechnique de Karlsruhe. À cette époque, il commence également à s'intéresser à la géométrie des courbes et des surfaces, en particulier avec les travaux de Cayley, Salmon et Sylvester.

En 1863, Clebsch rejoint l'université de Giessen en tant que professeur de mathématiques [14]. Il y rencontre Paul Gordan, qui l'introduit à la théorie des fonctions abéliennes et aux travaux de Riemann. Ces recherches communes se concrétisent notamment avec l'écriture du livre *Theorie der Abelschen Functionen*, [Clebsch & Gordan 1866]. Entouré de

11. Cela préfigure la querelle de 1874 entre Jordan et Kronecker autour de la théorie des formes bilinéaires. Voir [Brechenmacher 2007a].

12. Les éléments biographiques de ce paragraphe sont tirés de deux notices nécrologiques de Clebsch [C. Neumann 1872 ; Brill, Gordan et al. 1873].

13. Les auteurs de la notice nécrologique [Brill, Gordan et al. 1873] divisent les travaux de Clebsch en six groupes : la physique mathématique ; le calcul des variations et la théorie des équations différentielles partielles du premier ordre ; la théorie des courbes et des surfaces ; l'étude des fonctions abéliennes et leur application à la géométrie ; les représentations de surfaces ; la théorie des invariants. Toujours selon ces auteurs, l'ordre de cette liste reflète *grosso modo* la chronologie des intérêts de Clebsch. Voir [Brill, Gordan et al. 1873, p. 2]. Des descriptions mathématiques détaillées de chacun de ces groupes de travaux sont faites dans la suite de cette notice nécrologique.

14. Clebsch était en concurrence notamment avec Richard Dedekind. Les circonstances de ce recrutement sont décrites dans [Dugac 1976, p. 132]. Au sujet du passage de Clebsch à Giessen, voir [Lorey 1937, p. 71-77].

Alexander Brill, Ferdinand von Lindemann, Jacob Lüroth et Max Noether, Clebsch investit le domaine des fonctions abéliennes en y introduisant des points de vue géométriques et en montrant réciproquement comment appliquer ces fonctions transcendantes à la géométrie. Ces travaux sont publiés notamment dans le mémoire [Clebsch 1864a] intitulé *Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie* [15]. Il en dégage notamment la notion de genre d'une courbe algébrique, et ses recherches sur ce sujet l'amènent alors à s'intéresser de près aux transformations birationnelles de courbes. Il en vient à un thème de recherche dans lequel il restera engagé jusqu'à la fin de sa vie : les représentations de surfaces, dont le premier exemple est celui de la représentation des surfaces cubiques sur le plan, [Clebsch 1866]. À peu près en même temps, il se lance dans un autre domaine de recherche qui deviendra majeur pour lui : la théorie des invariants [16].

Succédant à Bernhard Riemann, Clebsch est nommé professeur en 1868 à Göttingen, où il est suivi par certains de ses élèves puis momentanément rejoint par Felix Klein [17]. L'année suivante paraît le premier volume des *Mathematische Annalen*, journal dont il est, avec C. Neumann, un des deux fondateurs. Ses recherches sont alors presque toutes entières tournées vers les représentations de surfaces et la théorie des invariants. Le 7 novembre 1872, Clebsch meurt brutalement, foudroyé par une attaque de diphtérie.

À l'âge de 39 ans, Clebsch laisse derrière lui plus de 100 publications [18] et une grande renommée mathématique à travers de nombreux pays européens : considéré « comme un des premiers mathématiciens allemands » de l'époque, possédant « les dons, les talents multiples et la puissance de travail [19] », il était correspondant des académies de Berlin, Munich, Milan, Bologne et Cambridge, membre de la *London Mathematical Society* et en contact régulier avec notamment Cremona, Jordan et Cayley [20].

Revenons au sujet du *Traité des substitutions et des équations algébriques*. L'influence de Clebsch sur l'écriture du chapitre des applications géométriques peut à nouveau se lire dans une de ses notices nécrologiques :

15. Ces travaux sont en partie décrits dans [Gray 1989, p. 367-369] et dans [Houzel 2002, p. 184-186]. Voir aussi [Rowe 1989a, p. 188], où David Rowe parle de la fondation par Clebsch d'une « fledgling school at Giessen that specialized in algebraic geometry and invariant theory ». D. Rowe ne précise pas s'il fait référence à la notion d'école de recherche telle que définie par Karen Hunger Parshall dans [Parshall 2004].

16. Au sujet de la théorie des invariants, voir [Fisher 1966 ; Parshall 1989].

17. Clebsch était à nouveau en concurrence avec Dedekind pour ce poste à Göttingen, [Dugac 1976, p. 133-134]. Pour quelques informations sur les premiers contacts entre Klein et Clebsch, voir [Rowe 1989a, p. 188].

18. Une liste des publications de Clebsch est donnée dans [Brill, Gordan et al. 1873, p. 51-55]. Elle compte 107 items, dont quatre livres dont il a été (un des) auteur(s) et deux livres qu'il a édités sur la base de travaux de Jacobi et de Plücker. Le reste se répartit majoritairement entre des articles dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (de 1856 à 1869) et les *Mathematische Annalen* (à partir de 1869).

19. Citation de Hesse datant de 1862, rapportée dans [Dugac 1976, p. 133]. Des commentaires du même type et provenant d'autres mathématiciens sont retranscrits dans cette référence et dans celles qui ont été citées précédemment. D'autres commentaires soulignent les grandes qualités pédagogiques de Clebsch.

20. [C. Neumann 1872, p. 202]. Remarquer que Cremona, Jordan et Cayley sont déjà tous apparus autour du sujet des vingt-sept droites.

> La théorie générale des équations algébriques, comme fondée par Lagrange puis développée par Gauss et Abel, et élevée par Galois dans sa généralité présente, a intéressé Clebsch au plus haut point. Il n'a cependant pas mené de recherche propre dans cette direction ; mais il a touché indirectement ces questions en ne laissant aucune occasion passer, lorsqu'un problème algébrique ou géométrique conduisait à des équations de caractère particulier, d'attirer l'attention sur ces équations remarquables en soi. C'était vraiment les recherches de Hesse puis de Abel qui avaient vivement attiré l'attention de Clebsch sur ce côté algébrique des problèmes géométriques ; plus tard, les relations multiples qu'il avait nouées avec Camille Jordan ramenèrent son attention vers tout ce qui se rattache aux groupements remarquables des racines d'une équation. Réciproquement, c'est principalement à lui qu'on est redevable d'avoir mis Camille Jordan en état de consacrer aux « équations de la géométrie » un chapitre spécial dans son grand ouvrage [21]. [Brill, Gordan et al. 1873, p. 47]

L'importance du rôle de Clebsch dans l'élaboration du chapitre des applications géométriques du *Traité* se confirme avec un relevé des mentions de son nom ou de ses articles dans ce chapitre. En effet, on y relève sept noms de mathématiciens : dans l'ordre d'apparition, il s'agit de ceux de Hesse, Mathieu, Clebsch, Kummer, Steiner, Schläfli et Geiser. En comptant avec multiplicité, Clebsch arrive largement en tête car son nom revient sept fois, contre deux fois pour Kummer et une fois pour tous les autres. Au niveau des citations, il y a six articles (et aucun livre) cités par Jordan, dont trois sont de Clebsch, [Clebsch 1864a ; Clebsch 1865 ; Clebsch 1868], les autres étant de trois auteurs différents — il s'agit de [Kummer 1864 ; Steiner 1856b ; Geiser 1869b]. À nouveau, en prenant en compte le nombre effectif de citations, le ratio augmente en faveur de Clebsch, puisque [Clebsch 1864a] est cité six fois, alors que tous les autres articles ne sont cités qu'une seule fois [22].

Toutefois, et de façon un peu paradoxale au constat fait plus haut, aucune de ces mentions explicites ne concernent les vingt-sept droites. C'est donc en explorant en détail les mathématiques que l'on pourra mettre à jour les influences que Clebsch a pu avoir sur Jordan à ce sujet [23].

21. « Die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen, wie sie durch Lagrange begründet, durch Gauss und Abel weiter entwickelt, durch Galois zu ihrer jetzigen Allgemeinheit erhoben worden ist, hat Clebsch in hohem Masse interessirt. Er hat freilich in dieser Richtung nicht eigentlich eigene Untersuchungen angestellt, aber er hat indirect diesen Fragen genützt, indem er keine Gelegenheit vorübergehen liess, wenn ein geometrisches oder algebraisches Problem zu Gleichungen besonderen Charakters hinleitete, auf eben diese Gleichungen als an und für sich beachtenswerth hinzuweisen. Es waren wohl die Untersuchungen von Hesse und weitherin von Abel gewesen, die Clebsch's Interesse für diese algebraische Seite der geometrischen Probleme rege gemacht hatten; später wurde seine Aufmerksamkeit durch die vielfachen Beziehungen, in die er mit Camille Jordan getreten war, immer wieder auf Alles, was mit merkwürdigen Gruppirungen von Wurzeln einer Gleichung im Zusammenhange steht, hingelenkt. Umgekehrt hat man es ihm hauptsächlich zu verdanken, wenn Camille Jordan im Stande war, in seinem grossen Werke (Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris, Gauthier-Villars 1870) ein besonderes Capitel den „Gleichungen der Geometrie“ zu widmen. » J'ai repris dans [Jordan 1881, p. 33] la traduction de la partie de cette citation commençant à « später... ».

22. Ce relevé n'aura ici qu'une valeur indicielle. Une utilisation plus poussée pourrait être imaginée sur le modèle de [Goldstein 2012], où C. Goldstein s'est (entre autres) basée sur les noms de personnes mentionnées dans les *Œuvres* de Hermite pour en capter certains aspects collectifs.

23. Les lettres écrites par Clebsch à Jordan et conservées aux archives de l'École polytechnique ne

2.2 Identifier théorie des substitutions et géométrie dans le *Traité*

Avant d'entrer dans les textes de Jordan et d'y étudier les articulations entre théorie des substitutions et géométrie, je commencerai ici par exposer un moyen de distinguer ce qui relève (pour Jordan) de l'une ou de l'autre — cela aura pour but d'éviter au maximum d'appliquer *a priori* mes propres vues disciplinaires lors de l'étude de l'approche de Jordan sur l'équation aux vingt-sept droites. Pour cela, je propose de repérer les objets et techniques mathématiques que Jordan associe clairement à la théorie des substitutions ou à la géométrie dans ses travaux sur les vingt-sept droites [24].

Cette utilisation des objets et techniques comme critères distinctifs entre théorie des substitutions et géométrie rapproche ainsi ma démarche d'une reconnaissance de disciplines dans le sens que Ralf Haubrich a dégagé à partir des travaux de Martin Guntau et Hubert Laitko. Il s'agit ainsi « de caractériser une discipline mathématique par une liste d'éléments *internes* comme son sujet d'étude, ses concepts et théorèmes clés, sa systématisation, son système de preuves, les valeurs mathématiques préconisées pour l'évaluation de ses résultats, etc. [25] ». Toutefois, je souligne bien que l'ambition n'est pas ici de voir si la théorie des substitutions ou la géométrie forment des disciplines en ce sens ; il s'agit plutôt d'utiliser les objets mathématiques en tant que moyens de repérer, dans les textes de Jordan, ce qui relève de l'une ou de l'autre.

2.2.1 Utilisation de la note *Sur les équations de la géométrie*

La note « Sur les équations de la géométrie », [Jordan 1869c], résume les objectifs et certains des résultats du chapitre des applications géométriques du *Traité*. Au contraire de ce chapitre, elle ne contient pas de démonstration et ne permet donc qu'un accès limité aux techniques mathématiques. En revanche, sa structure textuelle et son utilisation explicite des termes « géométrique » et « théorie des substitutions » sont suffisants pour identifier un certain nombre d'objets associés à l'un ou l'autre de ces termes.

En effet, le paragraphe introductif de cette note est le suivant :

---

renseignent pas sur l'élaboration du chapitre des applications géométriques.

24. Durant la même période, Jordan est également engagé dans des recherches portant sur les groupes de mouvements de l'espace qui sont situés du côté de la géométrie. Je me cantonnerai aux textes portant sur les vingt-sept droites, sans ainsi prétendre à exhiber tout ce qui pourrait relever de la géométrie pour Jordan.

25. « Ralf Haubrich [...] suggested characterizing a mathematical discipline by a list of *internal* elements such as its subject matter, its core concepts and theorems, its systematization, its proof system, the mathematical values advocated in evaluating its results, etc. », [Goldstein & Schappacher 2007, p. 54]. Dans cette référence, C. Goldstein et N. Schappacher ont montré que les activités de recherches de la première moitié du XIXe siècle liées aux *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss ne forment pas une discipline en ce sens de « gegenstandsorientiertes System wissenschaftlicher Tätigkeiten » provenant de [Guntau & Laitko 1987]. Voir aussi [Gauthier 2007] pour le cas de la géométrie des nombres, avec une discussion portant sur d'autres définitions possibles de discipline mathématique.

> Les problèmes géométriques fournissent un grand nombre d'équations remarquables, dont les diverses solutions sont généralement liées entre elles par des relations géométriques très-intéressantes. Ces relations permettent de construire, dans chaque cas particulier, une fonction des racines, dont la forme algébrique reste inaltérée par toute substitution du groupe de l'équation proposée. Cette remarque sert à déterminer ce groupe, dont la connaissance permet réciproquement de rechercher les propriétés plus cachées que présente l'équation, et notamment celles qui concernent sa résolution. [Jordan 1869c, p. 656]

Les trois phrases de ce paragraphe présentent trois étapes concernant d'abord des « problèmes géométriques » donnant lieu à certaines équations ; ensuite, pour chaque problème, une « fonction des racines » en lien avec le groupe de l'équation considérée ; enfin les « propriétés [de] l'équation » dévoilées par l'étude de son groupe. Or, ces trois étapes se retrouvent dans les paragraphes suivants de la même note [Jordan 1869c], et c'est cette similarité de structure qui permet d'identifier les problèmes et les relations que Jordan qualifie de « géométriques [26] ».

Commençons avec le paragraphe portant sur les vingt-sept droites :

> Les vingt-sept droites $a, b, c, d, \ldots$ situées sur une surface du troisième degré forment par leurs intersections mutuelles quarante-cinq triangles, $abc, ade, \ldots$ [Steiner, *Mémoire sur les surfaces du troisième ordre (Journal de Crelle).*] Les substitutions du groupe de l'équation aux vingt-sept droites laissent invariable la somme $abc+ade+\ldots$. L'ordre P de cette équation est égal à $27 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4$, et ses facteurs de composition sont 2 et $\frac{1}{2}P$. [Jordan 1869c, p. 658]

La structure de ce paragraphe est effectivement identique à celle du paragraphe introductif. Ainsi, le « problème géométrique » consiste ici en les « vingt-sept droites [...] situées sur une surface du troisième degré » et les « relations géométriques » sont que ces dernières « forment par leurs intersections mutuelles quarante-cinq triangles ». La « fonction des racines » est « la somme $abc + ade + \ldots$ ». Enfin, les « propriétés de l'équation » sont ici son ordre et ses facteurs de composition.

Le même parallèle peut être fait avec un autre paragraphe de [Jordan 1869c] :

> M. Kummer a signalé l'existence d'une surface du quatrième degré à seize points singuliers. Ces seize points, $a, b, c, \ldots$, sont situés six à six sur seize plans tangents singuliers $abcdef, abghik, \ldots$, qui se coupent six à six en ces points singuliers. La fonction $\varphi = abcdef + abghik + \ldots$ reste invariable par les substitutions du groupe de l'équation aux seize points singuliers.

26. Pour ce qui est de « algébrique », il est question dans le texte de Jordan de la « forme algébrique » d'une certaine fonction des racines. Ici, « forme » désigne la manière dont cette fonction des racines est présentée et l'épithète « algébrique » la qualifie au sens où les racines sont vues comme des symboles indéterminés — ce n'est donc pas d'une « forme algébrique » au sens d'un polynôme en plusieurs variables. Il s'agit donc ici d'une expression qui ne renvoie qu'à un aspect technique particulier et qui n'a pas de connotation disciplinaire. En tant que telle, je ne l'utiliserai pas pour le repérage entre théorie des substitutions et géométrie.

> Cette équation a pour ordre $16 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 2$, et son groupe est formé des substitutions (1) (où $p = 2$, $n = 2$) jointes aux substitutions
>
> $$|x_1, y_1, x_2, y_2 \qquad x_1 + \alpha_1, y_1 + \beta_1, x_2 + \alpha_2, y_2 + \beta_2|.$$
>
> En résolvant une équation auxiliaire du sixième degré appartenant au type le plus général, on réduira le groupe de la proposée à ces dernières substitutions, et quatre racines carrées achèveront sa résolution. [Jordan 1869c, p. 659]

La structure du paragraphe est encore une fois la même. Ici, le « problème géométrique » consiste en les seize points singuliers de la surface de Kummer, liés par les « relations géométriques » que sont leur appartenance six à six à seize plans tangents à la surface ; la « fonction des racines » est la fonction φ qui y est décrite ; les « propriétés de l'équation » sont son ordre et sa résolution à l'aide d'« une équation auxiliaire du sixième degré [et de] quatre racines carrées ».

Remarquer que jusqu'à présent, nous n'avons pas assigné d'objets à la théorie des substitutions. Pour cela, regardons un autre passage de la note [Jordan 1869c] :

> [L'équation aux vingt-sept droites] se rattache très-directement aux précédentes. Car si l'on suppose connue une des racines de l'équation aux vingt-huit tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre, on a pour déterminer les autres une équation du vingt-septième degré, ayant même groupe que l'équation aux vingt-sept droites. En se donnant une seconde racine on a une équation du vingt-sixième degré, se décomposant en deux facteurs du seizième et du dixième degré. Ces deux facteurs sont équivalents entre eux ; le premier a le même groupe que l'équation aux seize droites des surfaces du quatrième degré à conique double ; l'autre a le même groupe que l'équation du dixième degré à laquelle se réduit celle-là.
>
> La théorie des substitutions aurait donc permis de prévoir l'existence des liaisons géométriques qui existent entre les problèmes des vingt-huit doubles tangentes, des vingt-sept droites et des seize droites (voir un Mémoire de M. GEISER (*Mathematische Annalen*, t. I)). [Jordan 1869c, p. 659]

On voit dans cet extrait ce qui se situe pour Jordan du côté de la théorie des substitutions : ce sont des considérations sur des équations et leurs racines, des procédés d'adjonction de racines (c'est-à-dire de « suppose[r] connue[s] » des racines) et des identités de groupes (de substitutions). De plus, cela permet rétrospectivement, dans les citations précédentes, de placer du côté de la théorie des substitutions ce qui avait rapport à ces mêmes objets. Pour ce qui est enfin des « liaisons géométriques » évoquées par Jordan, j'ai examiné le mémoire qu'il cite pour voir quel sont les objets et techniques mathématiques clés dont il y est question. Ce mémoire a déjà été présenté au chapitre précédent : il s'agit de construire, par projection, une courbe quartique à partir d'une surface cubique et de voir que dans cette projection, les vingt-sept droites de la cubique sont envoyées sur vingt-sept des vingt-huit des tangentes doubles de la quartique[27].

27. Une description bien plus détaillée est faite plus loin dans le présent chapitre.

Le tableau 2.1 résume les objets et techniques qui relèvent de la théorie des substitutions ou de la géométrie. Je vais à présent discuter davantage chacun des deux côtés, en me concentrant sur le cas des vingt-sept droites et en me reportant à présent sur le *Traité des substitutions et des équations algébriques* lui-même.

Théorie des substitutions	Géométrie
– Équations algébriques – Racines – Fonctions de racines – Substitutions – Groupes (de substitutions) – Ordre – Facteurs de composition – Invariabilité de fonctions – Adjonction – Résolution – Décomposition en facteurs – Identité de groupes	– Points (singuliers, doubles, de rebroussement, d'inflexion) – Droites – Courbes – Plans – Surfaces – Triangles – Cônes – Faisceaux de courbes ou de surfaces – Relations d'incidence (tangence, coplanarité, alignement, intersections particulières) – Projections

TABLE 2.1 – Théorie des substitutions et géométrie chez Jordan

2.2.2 Du côté géométrique

Dans la section du *Traité* consacrée aux vingt-sept droites, c'est le même mémoire de Steiner que dans la note « Sur les équations de la géométrie » qui est cité pour les propriétés de ces droites, [Steiner 1856b]. Mais alors que dans cette note, Jordan ne mentionnait que l'existence des vingt-sept droites et des quarante-cinq triangles, il évoque également celle des trièdres de Steiner dans le *Traité* :

> Si deux triangles abc, $a'b'c'$ n'ont aucun côté commun, on peut leur en associer un troisième $a''b''c''$ tel, que les côtés correspondants de ces trois triangles se coupent, et forment trois nouveaux triangles $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$. [Jordan 1870b, p. 316]

Au sens dégagé précédent, il s'agit bien d'une propriété géométrique, les objets qui y interviennent étant des triangles et les relations qui les lient étant des relations d'incidence entre leurs côtés.

En utilisant de même ce tableau, il est possible de repérer d'autres propriétés géométriques (que Jordan n'étiquette pas explicitement comme telles) dans la section sur les vingt-sept droites. On y lit ainsi :

> On peut déterminer de $(45 \cdot 32)/2$ manières différentes un système de deux triangles qui n'aient aucune droite commune ; à chaque semblable système correspond un triangle

> associé (441). Réciproquement, chaque système de trois triangles associés (*trièdre* de Steiner) correspond aux trois combinaisons deux à deux des triangles qui les forment. Le nombre total des trièdres sera donc $(45 \cdot 32)/(2 \cdot 3)$. On peut d'ailleurs grouper ces trièdres par paires (*doubles trièdres*) en réunissant ensemble ceux qui contiennent les mêmes droites. Enfin les doubles trièdres peuvent être associés trois à trois, en réunissant ensemble ceux qui n'ont aucune droite commune. [...]
>
> On peut déterminer de $(27 \cdot 16)/2$ manières différentes une paire de droites qui ne se coupent pas. On peut d'ailleurs grouper ces paires six à six (*doubles-six* de Schläfli), de sorte que les droites d'une paire rencontrent chacune une droite de chaque autre paire du double-six. [Jordan 1870b, p. 319]

Les doubles trièdres de Steiner et les doubles-six de Schläfli relèvent bien de la géométrie : ce sont des objets formés de droites ou de triangles liés par des relations d'incidence particulières.

Tout ce qui relève de la géométrie dans la section sur les vingt-sept droites a ainsi été présenté. On remarquera qu'il s'agit d'objets et de propriétés que Jordan attribue à des travaux antérieurs d'autres mathématiciens [28]. Ces travaux ont déjà été décrits au chapitre précédent, et je n'y reviendrai donc pas ici. Avant de voir comment Jordan les mobilise dans ses démonstrations, passons au côté de la théorie des substitutions.

2.2.3 Les « méthodes de Galois »

En comparaison avec le côté géométrique, le pendant de théorie des substitutions de la section du *Traité* sur les vingt-sept droites est plus riche, au sens où le nombre d'objets pouvant relever de la théorie des substitutions qui y apparaissent est bien plus important. Les techniques qui les impliquent sont exposées en amont du *Traité*, dans le chapitre premier du Livre III, présentant les « méthodes de Galois ».

La plupart des définitions et de la terminologie que l'on trouve dans ce chapitre (adjonction, quantité rationnelles, groupe d'une équation, irréductibilité, adjonction, réduites) sont celles utilisées par Galois dans son « Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux » (1831), resté inédit jusqu'en 1846, année où Joseph Liouville fait publier les *Œuvres mathématiques d'Évariste Galois*, [Galois 1846]. Dans ce paragraphe, je suivrai toutefois l'exposé de Jordan en ajoutant au fur et à mesure des interprétations en termes mathématiques actuels afin d'en faciliter la compréhension [29].

Comme Jordan, donnons-nous une équation algébrique $F(x) = 0$ de degré m et de racines $x_1, x_2, \ldots, x_m$. La nature des coefficients de F n'est pas précisée par Jordan ; nous noterons k un corps de définition [30] de F. Des quantités $y, z, \ldots$ sont alors dites *adjointes* à

28. Je rappelle que dans une note située à la fin du *Traité*, Jordan précise que les vingt-sept droites avaient été découvertes par Cayley et Salmon, avant Steiner.

29. Voir [Ehrhardt 2012, p. 170-182] pour l'étude des reformulations par Jordan du mémoire de Galois (dont celles précédant le *Traité*).

30. Il est parfois possible pour nous de lire Jordan en interprétant les coefficients de F comme des

l'équation si elles sont décrétées être admissibles pour pouvoir exprimer ses racines. Jordan appelle alors *rationnelle* toute quantité exprimable de façon rationnelle (c'est-à-dire avec les quatre opérations usuelles) en fonction des coefficients de l'équation et des quantités adjointes. Autrement dit, les quantités rationnelles sont les éléments de $k(y, z, \ldots)$.

Le théorème fondamental donné par Jordan est celui concernant l'existence du groupe d'une équation :

> THÉORÈME FONDAMENTAL : THÉORÈME I. — Soit $F(x) = 0$ une équation dont les racines $x_1, \ldots, x_m$ sont toutes inégales, et à laquelle on peut supposer qu'on ait adjoint certaines quantités auxiliaires $y, z, \ldots$. Il existera toujours entre les racines $x_1, \ldots, x_m$ un groupe de substitutions tel, que toute fonction des racines, dont les substitutions de ce groupe n'altèrent pas la valeur numérique, soit rationnellement exprimable, et réciproquement. [Jordan 1870b, p. 257]

Le groupe donné par le théorème est nommé par Jordan *groupe de l'équation relatif aux quantités adjointes*, ou *groupe réduit par l'adjonction de* $y, z, \ldots$, ou encore plus simplement, dans le cas où aucune quantité n'est adjointe, *groupe de l'équation*. En termes actuels, le théorème fondamental dit qu'il existe un sous-groupe, disons G, du groupe de permutations $\mathfrak{S}(x_1, \ldots, x_m)$ tel que le sous-corps $(k(y, z, \ldots))(x_1, \ldots, x_m)$ fixé par G est précisément $k(y, z, \ldots)$. Il s'agit donc du groupe de Galois [31] de F sur $k(y, z, \ldots)$.

D'après Jordan lui-même [32], le théorème qu'il énonce et démontre ensuite lui revient proprement (au contraire du premier). Il s'agit d'un théorème concernant l'irréductibilité d'une équation [33] :

> THÉORÈME II. — Toute équation irréductible $F(x) = 0$ a son groupe transitif, et réciproquement. [Jordan 1870b, p. 259]

La *transitivité* du groupe signifie que, si l'on choisit deux racines quelconques de l'équation, il existe toujours une substitution du groupe qui envoie l'une sur l'autre — cela correspond avec la définition actuelle d'action transitive. Profitons du moment pour reproduire la définition que donne Jordan de *groupe k fois transitif*, dans le cadre des groupes d'équations. Cette définition se lie à la définition actuelle d'action au moins k fois transitive : pour

indéterminées et donc de prendre $k = \mathbf{Q}(X_1, \ldots, X_m)$. Mais soulignons bien que la notion d'indéterminée n'existe pas dans le *Traité des substitutions*, ni d'ailleurs celle de corps.

31. Dans la théorie de Galois telle qu'elle est enseignée de nos jours, on définit d'abord le groupe de Galois d'une extension (galoisienne) de corps k'/k comme étant le groupe des automorphismes de k' induisant l'identité sur k. Si $F \in k[X]$ est un polynôme séparable, le groupe de Galois de l'équation $F(x) = 0$ est par définition de le groupe de Galois d'une extension de décomposition de F sur k. On montre alors que tout élément de ce groupe induit une permutation des racines de F. Plus précisément, le groupe de Galois de F s'identifie au sous-groupe du groupe des permutations des racines qui respectent toutes les relations algébriques existant entre ces dernières.

32. [Jordan 1881, p. 29].

33. La notion d'irréductibilité coïncide avec celle que nous apprenons aujourd'hui : pour Jordan, une équation est *irréductible* « lorsqu'elle n'a aucune racine commune avec aucune équation de degré moindre et à coefficients rationnels » [Jordan 1870b, p. 254]. Sur l'importance de cette notion dans le développement de la théorie des équations, notamment à partir des *Disquisitiones Arithmeticae* de Carl Friedrich Gauss, voir [O. Neumann 2007].

tous k-uplets de racines $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ et $(\xi'_1, \ldots, \xi'_k)$, il existe une substitution du groupe de l'équation envoyant ξ_i sur ξ'_i pour chaque indice i.

Une autre notion est la *primitivité* d'un groupe, que Jordan définit à l'envers : un groupe G est dit *non primitif* s'il est possible de regrouper les lettres sur lesquelles il agit en paquets contenant tous le même nombre de lettres, et tels que toute substitution de G envoie les éléments d'un paquet sur les éléments d'un même paquet. Une équation est dite *primitive* lorsque son groupe est primitif, [Jordan 1870b, p. 34].

Jordan indique d'ailleurs dans la préface du *Traité* que les trois notions fondamentales de la théorie des substitutions sont la transitivité, la primitivité et surtout la distinction entre groupes simples et composés [34], et en attribue les paternités respectives à Augustin-Louis Cauchy, à Carl Friedrich Gauss et Niels Henrik Abel, et à Galois. Jordan pose ainsi les jalons d'une certaine histoire de la théorie des substitutions, mais cette histoire est à lire avec circonspection. En effet, il existe d'une part d'autres récits historiques écrits par des mathématiciens au XIXe siècle, comme celui de Otto Hölder dans l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, qui indique que les notions de transitivité et de primitivité viennent de Paolo Ruffini, [Hölder 1899, p. 487]. D'autre part, les attributions de Jordan posent aussi problème à l'historiographie actuelle, qui juge anachronique la reconnaissance de la notion de groupe chez Gauss et Abel par exemple.

Passons maintenant à quelques théorèmes décrivant le comportement du groupe d'une équation lorsqu'on lui adjoint certaines quantités particulières. Jordan considère d'abord le cas où est adjointe une fonction des racines de l'équation elle-même :

> Théorème V. — Soient G le groupe d'une équation $F(x) = 0$, φ_1 une fonction rationnelle quelconque de ses racines : 1° celles des substitutions de G qui n'altèrent pas la valeur numérique de φ_1 forment un groupe H_1 ; 2° l'adjonction de la valeur φ_1 réduira le groupe de l'équation précisément à H_1. [Jordan 1870b, p. 261]

Traduit dans des termes actuels, ce théorème dit que si $\varphi_1 \in k(x_1, \ldots, x_m)$, alors l'ensemble des permutations de G qui fixent φ_1 est un sous-groupe H_1 de G tel que

$$\mathrm{Gal}(k(x_1, \ldots, x_m)/k(\varphi_1)) = H_1.$$

En outre, Jordan énonce en corollaire que l'adjonction de plusieurs fonctions des racines φ_1, φ'_1, etc., réduit le groupe de l'équation à son sous-groupe formé des substitutions qui fixent φ_1, φ'_1, etc. Anticipons un peu sur la suite : dans les applications à la géométrie et aux transcendantes, Jordan va surtout adjoindre à ces équations une ou plusieurs de leurs racines. Dans le cas de l'adjonction d'une racine x_1, le groupe H_1 est donc, en termes d'actions de groupes, le stabilisateur de x_1 sous G.

34. La définition de groupe *simple* est la même que l'actuelle : c'est un groupe n'ayant pas de sous-groupe distingué non trivial.

Jordan étudie ensuite l'effet de l'adjonction à une équation des racines d'une autre équation $f(z) = 0$. Il montre que si l'on adjoint à l'équation $F(x) = 0$ (dont le groupe est G) toutes les racines de $f(z) = 0$, le groupe réduit, également appelé *groupe réduit par la résolution de* $f(z) = 0$, est permutable aux substitutions de G, c'est-à-dire en est un sous-groupe distingué. Un corollaire est le suivant :

> Corollaire. — Si le groupe G est simple, il ne peut être réduit par la résolution d'une équation auxiliaire sans se réduire à la seule substitution I (le groupe formé de cette substitution étant, par définition, le seul qui soit contenu dans G et permutable à ses substitutions) : auquel cas l'équation $F(x) = 0$ sera complètement résolue. [Jordan 1870b, p. 269]

Dire que l'équation $F(x) = 0$ est *résolue* par l'adjonction des racines $z_1, \ldots, z_n$ de $f(z) = 0$ signifie ainsi que toutes les racines de F s'expriment rationnellement en fonction des racines $z_1, \ldots, z_n$. Cela se traduit donc par l'inclusion $k(x_1, \ldots, x_m) \subset k(z_1, \ldots, z_n)$. Le théorème suivant indique comment deux équations se résolvent l'une l'autre.

> Théorème XIII. — Soient $F(x) = 0$ et $f(z) = 0$ deux équations dont les groupes G et G' contiennent respectivement N et N' substitutions. Si la résolution de la seconde équation réduit le groupe de la première à un groupe H_1 ne contenant plus que N/ν substitutions, réciproquement la résolution de la première réduira le groupe de la seconde à un groupe H_1' ne contenant plus que N'/ν substitutions. De plus, les deux équations sont composées avec une même équation auxiliaire $\mathscr{F}(u) = 0$ de degré ν et dont le groupe contient ν substitutions. [Jordan 1870b, p. 269]

En guise de traduction moderne, résumons avec un diagramme ce théorème concernant ce que nous appelons les extensions composées :

$$\begin{tikzcd}
 & & k(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n) \arrow[dll, dash, "N'/\nu"'] \arrow[drr, dash, "N/\nu"] & & \\
k(x_1, \ldots, x_m) \arrow[dr, dash, "N/\nu"] \arrow[ddrr, dash, "N"'] & & & & k(z_1, \ldots, z_n) \arrow[dl, dash, "N'/\nu"'] \arrow[ddll, dash, "N'"] \\
 & & k(u_1, \ldots, u_\nu) \arrow[d, dash, "\nu"] & & \\
 & & k & &
\end{tikzcd}$$

Un corollaire donné par Jordan —il s'agit du Corollaire I, [Jordan 1870b, p. 270] — est que si le groupe G d'une équation $F(x) = 0$ est simple, celle-ci ne peut être résolue qu'au moyen d'équations dont le groupe ait pour ordre un multiple de l'ordre de G.

La notion de résolution d'une équation par une autre mène à celle d'équations *équivalentes* : les équations $F(x) = 0$ et $f(z) = 0$ sont dites équivalentes si la résolution de l'une entraîne la résolution de l'autre, et réciproquement. Vu ce que nous avons écrit précédemment, cela revient à dire que $k(x_1, \ldots, x_m) = k(z_1, \ldots, z_n)$.

Contrairement aux autres notions données par Jordan, celle d'équations équivalentes n'apparaît pas dans les écrits de Galois. Au moins depuis les *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss, une autre notion d'équivalence existait déjà pour les formes algébriques, et notamment pour les formes quadratiques : deux formes quadratiques q_1 et q_2 étaient dites *équivalentes* si elles vérifiaient pour tous x, y l'identité $q_1(x, y) = q_2(ax + by, cx + dy)$ quels que soient les entiers a, b, c, d tels que $ad - bc = 1$. Dans ce cadre-là, un problème consistait à trouver les différentes classes d'équivalence et à y distinguer une forme particulière représentant cette classe [35]. L'idée classificatoire se retrouve chez Jordan qui propose de « déterminer toutes les équations irréductibles équivalentes à une équation donnée », et définit de cette façon des *classes* d'équations équivalentes, [Jordan 1870b, p. 271-272].

Enfin, la notion de *réduite* d'une équation est très souvent utilisée par Jordan, mais n'est pas définie dans le *Traité* [36]. Si une équation $F(x) = 0$ est donnée, une réduite de cette équation est une équation irréductible sur le corps k telle que l'adjonction d'une de ses racines a pour effet d'abaisser le groupe G de $F(x) = 0$. Ainsi, si le groupe G est réduit à un groupe H, le degré de la réduite est égal [37] à l'indice de H dans G, et comme l'écrit Jean Dieudonné,

> [le] problème classique de la recherche des « réduites » d'une équation [38] [...] revient évidemment à la recherche des sous-groupes de [son] groupe, et les réduites de plus petit degré, objet principal de ces recherches, correspondent aux sous-groupes *maximaux*. [Jordan *Œuvres 1*, p. XXIII]

Cette remarque s'applique bien à l'étude par Jordan de l'équation aux vingt-sept droites, puisque, comme nous allons le voir à présent, une grande partie de cette étude consiste en la recherche de réduites de cette équation.

---

35. Voir [Goldstein & Schappacher 2007, p. 8-13] pour les formes quadratiques dans les *Disquisitiones Arithemticae*, et [Goldstein 2007] pour les travaux de Charles Hermite dans la lignée de ceux de Gauss.

36. Dans son *Cours d'algèbre supérieure*, Joseph-Alfred Serret indique à plusieurs reprises, en mentionnant Joseph-Louis Lagrange, que les termes « réduite » et « résolvante » sont synonymes : voir par exemple [Serret 1854, p. 202, 235]. En revanche, dans le *Traité des substitutions*, Jordan n'emploie jamais le terme « résolvante ». Cela traduit peut-être la volonté de ce dernier de se détacher des méthodes de Lagrange, dont il évoque les limites dès le deuxième paragraphe de la préface du *Traité*.

37. Si $f(x) = 0$ est la réduite en question et si k' en est un corps de rupture (ce qui correspond à l'adjonction d'une des racines de f), le degré de f est égal au degré de l'extension k'/k, donc à l'indice de H dans G, puisque $G = \mathrm{Gal}(F/k)$ et $H = \mathrm{Gal}(F/k')$.

38. La recherche de formations de réduites, ou résolvantes, d'une équation avait été initiée autour de 1770 par Lagrange, Alexandre-Théophile Vandermonde et Edward Waring. Le but était d'étudier la résolubilité des équations algébriques en introduisant ces équations auxiliaires particulières. Voir par exemple [O. Neumann 2007].

2.3 L'étude par Jordan de l'équation aux vingt-sept droites : emprunts géométriques

Ayant éclairci ce qui relève de la géométrie ou de la théorie des substitutions pour Jordan, nous en venons maintenant à l'analyse de son étude de l'équation aux vingt-sept droites. Le chapitre des applications géométriques du *Traité* commence par la description d'un procédé général des équations associées aux situations issues de la géométrie :

> L'un des problèmes les plus fréquents de la géométrie analytique est de déterminer quels sont les points, ou bien les lignes ou surfaces d'une espèce donnée, qui satisfont à certaines conditions. Lorsque le nombre des solutions est limité, les coordonnées du points cherché (ou les paramètres que renferme l'équation des lignes ou surfaces cherchées) sont déterminées par un système d'équations algébriques $A, B, \ldots$ en nombre égal à celui des inconnues $x, y, \ldots$. Éliminons toutes les inconnues, sauf une seule, x : on sait que le degré de l'équation finale X indiquera le nombre des solutions du problème : et si les racines de cette équation sont inégales, soit x_0 l'une d'elles : on aura les valeurs correspondantes de $y, \ldots$ exprimées en fonction rationnelle de x_0, en substituant x_0 à la place de x dans les équations $A, B, \ldots$, et en cherchant le système des solutions communes à ces équations. [Jordan 1870b, p. 301]

Ce procédé n'est explicitement mis en œuvre dans aucune des six situations géométriques du *Traité*, ni dans les publications qui reprennent ces travaux. Il est tout au plus adapté au cas des vingt-sept droites dans [Jordan 1869b], mais toujours sans application effective :

> Étant donnés [...] l'équation d'une surface du troisième degré et les équations d'une droite arbitraire, exprimons que la droite est contenue toute entière dans la surface. Nous obtiendrons des équations de condition qui permettront d'exprimer rationnellement trois des paramètres de la droite en fonction du quatrième, qui sera déterminé par une équation du vingt-septième degré, dont chaque racine correspondra à l'une des droites. [Jordan 1869b, p. 147]

Pour fixer les idées, voyons comment appliquer plus précisément ce qui est ici décrit par Jordan.

On considère une surface cubique d'équation $F(x, y, z, w) = 0$, où F est un polynôme homogène du troisième degré. Une droite quelconque de l'espace étant donnée, on peut toujours choisir des coordonnées x, y, z, w de l'espace telles que les équations de cette droite soient

$$\begin{cases} x = \alpha z + \beta w \\ y = \gamma z + \delta w, \end{cases}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont donc les paramètres de la droite [39]. Cette droite est donc incluse dans la surface cubique si et seulement si $F(\alpha z + \beta w, \gamma z + \delta w, z, w) = 0$ pour tous z, w. Or,

39. Pour voir qu'une droite de l'espace dépend de quatre paramètres indépendants, on peut aussi raisonner comme suit. Si $x = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ et $y = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$ sont deux points de l'espace, notons $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ pour les six couples (i, j) tels que $0 \leqslant i < j \leqslant 3$. On vérifie alors que si x', y'

puisque F est un polynôme homogène de degré 3, cette dernière équation peut se mettre sous la forme

$$f_3(\alpha,\beta,\gamma,\delta)z^3 + f_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta)z^2w + f_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta)zw^2 + f_0(\alpha,\beta,\gamma,\delta)w^3 = 0,$$

où chaque f_i est un polynôme de degré 3 en $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. L'inclusion de la droite équivaut donc au système

$$\begin{cases} f_3(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = 0 \\ f_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = 0 \\ f_1(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = 0 \\ f_0(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = 0. \end{cases}$$

L'*équation aux vingt-sept droites* est l'équation en α (par exemple) obtenue en éliminant (β,γ,δ) parmi ces quatre dernières [40]. À chaque solution α correspond rationnellement un triplet (β,γ,δ), et donc une des vingt-sept droites de la surface. L'équation aux vingt-sept droites est donc une équation algébrique en une inconnue, de degré 27, et donc chaque racine correspond à une des vingt-sept droites.

2.3.1 D'un problème et de relations géométriques à une fonction de racines et son groupe

Comme vu précédemment, le premier point de la méthode de Jordan consiste à utiliser des « relations géométriques » entre les vingt-sept droites. Il cite ainsi le mémoire de Steiner sur les surfaces cubiques, [Steiner 1856b], pour rappeler que :

> Toute surface du troisième degré contient vingt-sept droites ;
>
> L'une quelconque d'entre elles, a, en rencontre dix autres, se coupant elles-mêmes deux à deux, et formant ainsi avec a cinq triangles. Le nombre total des triangles ainsi formés sur la surface par les vingt-sept droites est de quarante-cinq ;
>
> Si deux triangles abc, $a'b'c'$ n'ont aucun côté commun, on peut leur en associer un troisième $a''b''c''$ tel, que les côtés correspondants de ces trois triangles se coupent, et forment trois nouveaux triangles $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$. [Jordan 1870b, p. 316]

Jordan note les vingt-sept droites a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, p, q, r, s, t, u, m', n', p', q', r', s', t', u' et écrit la liste des quarante-cinq triangles contenant les droites trois à

---

sont deux points quelconques de la droite (xy), alors il existe un scalaire λ tel que pour tout (i,j), on a $x'_iy'_j - x'_jy'_i = \lambda p_{ij}$. Ainsi, $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{12} : p_{13} : p_{23})$ caractérise la droite (xy) ; ce sont les *coordonnées plückériennes* de cette droite. On vérifie en outre qu'on a toujours la relation $p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$. Compte tenu de l'homogénéité des p_{ij} et de cette relation, il y a ainsi bien 4 paramètres indépendants pour une droite de l'espace.

40. Dans les citations précédentes, Jordan ne fait pas référence à un procédé d'élimination en particulier et laisse entendre que l'équation finale est la même quelles que soient les inconnues que l'on décide d'éliminer. Pourtant, des choix différents pourraient *a priori* donner des équations résultantes différentes. Je remercie Michel Serfati de m'avoir fait remarquer ce point.

trois :

$$abc, \quad ade, \quad afg, \quad ahi, \quad akl, \quad bmn, \quad bpq, \quad brs, \quad btu, \quad cm'n', \quad cp'q', \quad cr's',$$
$$ct'u', \quad dmm', \quad dpp', \quad drr', \quad dtt', \quad enn', \quad eqq', \quad ess', \quad euu', \quad fmq', \quad fpn', \quad fst',$$
$$fur', \quad gnp', \quad gqm', \quad gru', \quad gts', \quad hms', \quad hrn', \quad hqt', \quad hup', \quad inr', \quad ism', \quad itq',$$
$$ipu', \quad kmu', \quad ktn', \quad kqr', \quad ksp', \quad lnt', \quad lum', \quad lrq', \quad lps'.$$

Le point suivant pour Jordan est de créer, grâce à ces relations, une « fonction des racines » de l'équation aux vingt-sept droites. Pour cela, Jordan « convien[t] de désigner par $a, b, c, \ldots$ celles des racines de cette équation qui correspondent respectivement aux droites $a, b, c, \ldots$ », [Jordan 1869b, p. 148]. Cet abus de notation n'est pas d'ailleurs spécifique au cas des vingt-sept droites. Ainsi, dans sa description générale de la méthode des « Applications géométriques », Jordan écrit :

> Nous conviendrons de désigner par $x_0, x_1, \ldots$ ceux des points, lignes ou surfaces cherchés qui correspondent respectivement aux racines $x_0, x_1, \ldots$. Cette locution sera commode, et n'offre aucun danger de confusion, les deux choses ainsi désignées par le même nom étant de nature absolument différente. [Jordan 1870b, p. 301]

Le double emploi de notation est ici intéressant en ce qu'il indique qu'un transfert de la géométrie vers la théorie des substitutions est effectué. Mais le fait que les objets racines et droites soient « de nature absolument différente » montre bien qu'il ne s'agit pas pour autant d'un amalgame pour Jordan. En particulier, il s'agira dans la suite tout le temps de substitutions de racines, et pas de substitutions de droites.

La fonction des racines créée est la suivante :

$$\varphi = abc + ade + \cdots + lps',$$

où chacun des termes qui apparaît est le produit de trois racines de l'équation aux vingt-sept droites qui correspondent aux quarante-cinq triangles que forment les vingt-sept droites.

C'est ensuite le groupe de l'équation aux vingt-sept droites et le groupe de φ qui sont mis en relation — par définition, le groupe de φ est le groupe formé des substitutions des racines $a, b, c, \ldots$ qui laissent φ invariante. Jordan commence par montrer que le groupe G de la fonction φ contient le groupe de l'équation aux vingt-sept droites.

En effet, le fait que les droites a, b, c forment un triangle s'exprime, selon Jordan, par un système de « relations analytiques [...] entre les racines [41] » :

$$\psi(a, b, c) = 0, \quad \chi(a, b, c) = 0, \ldots$$

41. [Jordan 1869b, p. 148]. Les relations en question doivent exprimer que les droites a, b et c sont coplanaires. Par exemple, si a (resp. b) est donnée comme intersection de deux plans A et B (resp. C et D)

Si maintenant S est une substitution du groupe de l'équation aux vingt-sept droites et si a', b' et c' sont les racines qu'elle fait succéder à a, b, c, alors, puisque $\psi, \chi, \ldots$ sont rationnelles en a, b, c, on a

$$\psi(a', b', c') = 0, \quad \chi(a', b', c') = 0, \ldots$$

Cela prouve que a', b' et c' forment un triangle, et donc que le terme $a'b'c'$ apparaît dans φ. Ainsi, la substitution S échange entre eux les quarante-cinq termes de φ, et appartient dont au groupe G.

L'inclusion réciproque est plus problématique :

> Réciproquement, si l'on admet que toutes les relations géométriques existant entre les vingt-sept droites peuvent se déduire de celles qui précèdent, ce qui est au moins fort probable, [le groupe de l'équation aux vingt-sept droites] contiendra toutes les substitutions qui n'altèrent pas φ. [Jordan 1869b, p. 148]

Ici non plus, le problème n'est pas spécifique aux vingt-sept droites, puisque Jordan écrit de façon générale :

> Réciproquement, si l'on était certain de connaître *toutes* les relations géométriques que présente la question proposée (ou du moins celles dont les autres dérivent), le groupe de l'équation X contiendrait toutes les substitutions du groupe de φ. Mais une semblable certitude est difficile à obtenir, malgré le soin apporté par d'habiles géomètres à l'étude de ces problèmes. Il ne serait donc pas impossible que les équations auxquelles ces problèmes donnent naissance eussent parfois une forme plus particulière encore que celle que nous allons trouver, en nous appuyant sur les résultats obtenus par nos prédécesseurs. [Jordan 1870b, p. 301]

Ces précautions étant dites, Jordan admet les inclusions réciproques, et ne revient pas sur le sujet.

Dans toutes les sources primaires que j'ai pu consulter, je n'ai trouvé aucun commentaire sur ces inclusions réciproques problématiques. Dans son livre sur l'histoire de l'algèbre, Bartel Leendert van der Waerden mentionne cette lacune dans le cas des vingt-sept droites et propose une démonstration pour y remédier, [Van der Waerden 1985, p. 128]. Cette démonstration se base sur un certain nombre de propriétés prouvées par Jordan et

d'équations $Ax + A'y + A''z + A'''w = 0$, etc., alors la coplanarité de a et b se traduit par l'équation

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' & A''' \\ B & B' & B'' & B''' \\ C & C' & C'' & C''' \\ D & D' & D'' & D''' \end{vmatrix} = 0.$$

Or, les coordonnées de la droite a sont justement des quotients de A, A',..., B''' (voir par exemple [Salmon 1882, p. 24]). La coplanarité de deux droites se traduit donc par une équation rationnelle en les coordonnées de ces droites. Enfin, pour chaque droite, trois de ses coordonnées s'expriment rationnellement en fonction de la quatrième, qui est solution de l'équation X.

par Geiser, que nous verrons apparaître plus loin dans ce chapitre. Ainsi, van der Waerden commence par déterminer l'ordre du groupe de l'équation aux vingt-huit tangentes doubles d'une courbe quartique. Il en déduit ensuite, grâce aux travaux de Geiser, que l'ordre du groupe de l'équation aux vingt-sept droites est 51 840. Jordan ayant montré que l'ordre du groupe de φ est égal à ce nombre, il y a bien égalité entre le groupe de φ et le groupe de l'équation aux vingt-sept droites. Dans la suite du chapitre, nous verrons que Jordan connaissait effectivement les travaux de Geiser et qu'il les mobilise dans le *Traité* pour un autre point. Du point de vue de van der Waerden, les mathématiques de Jordan deviennent ainsi ici davantage dépendantes de celles de Geiser.

On voit en tout cas dans ce problème d'égalité de groupes l'importance des relations géométriques pour l'étude de l'équation aux vingt-sept droites (et même des autres équations du chapitre des applications géométriques). Par le biais de la double notation entre droites et racines, ces relations sont encodées dans la fonction φ, dont le groupe devient alors le centre d'attention. C'est par l'intermédiaire de cette fonction φ que se fait donc la traduction de l'information géométrique en termes de théorie des substitutions et qui va permettre à Jordan de déterminer les caractéristiques principales du groupe de l'équation aux vingt-sept droites, supposé être égal à celui de φ.

2.3.2 Groupe, ordre et facteurs de composition de l'équation aux vingt-sept droites

Jordan commence par déterminer l'ordre du groupe G de l'équation aux vingt-sept droites — qui est donc supposé être égal au groupe de la fonction φ. Il constate d'abord qu'il y a au plus 27 possibilités pour l'image de a par une substitution quelconque[42] de G. Ensuite, comme les substitutions de G laissent φ invariante, celles qui ne déplacent pas a doivent nécessairement permuter entre eux les cinq termes de φ qui contiennent a, à savoir abc, ade, afg, ahi, akl. Elles sont donc susceptibles d'envoyer b sur b, c, d, e, f, g, h ou i, ce qui donne au plus 10 choix. Jordan continue ainsi : les substitutions de G qui fixent a et b fixent nécessairement c et sont susceptibles d'envoyer d sur d, e, f, g, h ou i, ce qui donne au plus 8 choix. Par le même type d'argument, il montre que les substitutions qui fixent a, b et d fixent nécessairement e et permutent entre elles les racines m, p, r, t ; il y a donc au plus 24 choix pour ces substitutions. Enfin, Jordan remarque que les substitutions qui fixent a, b, d, m, p, r et t fixent en fait toutes les racines. Il déduit de tout cela que l'ordre de G est au plus $27 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 24$.

Réciproquement, Jordan montre que l'ordre de G est au moins égal à ce nombre en exhibant six substitutions particulières qui permettent de réaliser chacune des substitutions

42. L'irréductibilité de l'équation aux vingt-sept droites n'étant à ce stade pas démontrée, on ne peut ici que majorer le nombre des racines qui peuvent succéder à a.

décrites précédemment :

$$\begin{aligned}
A &= (amu)(cnt)(gq'r')(is'p')(u'ld)(m'ek)\\
B &= (bhk)(cil)(pt'r')(ns'u')(p'tr)(n'su)\\
C &= (dhk)(eil)(m's'u')(pus)(n'r't')(qtr)\\
D &= (ghk)(fil)(n'u's')(mtr)(m't'r')(nus)\\
E &= (fhk)(gil)(p'r't')(ptr)(q's'u')(qsu)\\
F &= (hk)(il)(r't')(s'u')(rt)(su).
\end{aligned}$$

Il précise sans le prouver que ces substitutions appartiennent bien à G. Regardons[43] par exemple le cas de A : notant $1, 2, \ldots, 45$ les termes de φ dans l'ordre où ils apparaissent, A induit la permutation sur $\{1, \ldots, 45\}$ définie par

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23\\
6 & 38 & 22 & 30 & 14 & 9 & 7 & 8 & 1 & 18 & 34 & 26 & 42 & 21 & 37 & 28 & 13 & 39 & 40 & 41 & 5 & 25 & 23
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cccccccccccccccccccccc}
24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45\\
24 & 3 & 36 & 19 & 44 & 11 & 33 & 31 & 32 & 4 & 29 & 20 & 12 & 45 & 43 & 10 & 27 & 35 & 17 & 2 & 16 & 15
\end{array}\right).$$

En effet, A envoie la racine a sur m, la racine b sur elle-même et la racine c sur n, de sorte que le produit abc est envoyé sur bmn ; les autres vérifications se font de même. Les termes de φ étant donc permutés entre eux, la substitution A est bien un élément de G.

Toujours sans en donner les preuves, Jordan affirme que, combinées entre elles, les substitutions A, B, C, D et E permettent d'envoyer a sur n'importe quelle autre racine ; que B, C, D et E fixent a et peuvent envoyer b sur n'importe quelle des racines b, c, d, e, f, g, h ou i ; que C, D et E fixent a et b, et permettent d'envoyer d sur n'importe quelle des racines d, e, f, g, h, i, k, l ; que D et E fixent a, b et d, et permettent d'envoyer m et p sur deux quelconques racines parmi m, p, r, t ; enfin, que F permute r et t tout en fixant a, b, d, m, p — j'ai vérifié ces points un à un : par exemple, a peut être envoyé sur b par la substitution $BA^2D^2BE^2DA$; b peut être envoyé sur c par BD^2EB^2 ; d peut être envoyé sur e par C^2ED^2C ; (m, p) peut être envoyé sur (p, t) par D^2ED.

Ces différents points montrent que G contient au moins $27 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 2$ substitutions. Finalement, le groupe G est de cardinal $27 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 2$, et bien que Jordan ne le souligne pas, sa démonstration montre bien entendu que G est dérivé (c'est-à-dire, en termes actuels, engendré par) des substitutions A, B, C, D, E et F. Jordan poursuit en notant H le groupe dérivé de A, B, C, D et E. La démonstration précédente lui prouve que H est d'ordre au moins $27 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 12$; il montre ensuite que H est d'ordre exactement ce nombre, qu'il est

43. Cette vérification, et celles que j'effectue dans la suite de cette section, ne sont pas données dans le *Traité*.

permutable à toutes les substitutions de G et que c'est un groupe simple. Voici comment il procède.

En ce qui concerne l'ordre de H, Jordan commence par remarquer que chaque substitution de G « équivaut à un certain déplacement opéré entre les termes de φ », [Jordan 1870b, p. 318]. Les déplacements, ou substitutions, ainsi obtenus forment un groupe G_1 dont les éléments correspondent un à un à ceux de G. Il y a dans G_1 un groupe partiel $\mathscr{S}_1$ formé des substitutions résultant d'un nombre pair de transpositions entre les termes de φ. Ce groupe partiel $\mathscr{S}_1$ est permutable aux substitutions de G_1 et il lui correspond un groupe partiel $\mathscr{S}$ dans G, permutable à toutes les substitutions de celui-ci. Jordan affirme ensuite que les substitutions A, B, C, D et E équivalent toutes à un nombre pair de transpositions. En effet, on peut vérifier par exemple, à partir de l'écriture de A donnée plus haut, que A se décompose de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A \;=\;& (1\ 6\ 9)(2\ 38\ 43)(3\ 22\ 25)(4\ 30\ 33)(5\ 14\ 21)(10\ 18\ 39)(11\ 34\ 29)(12\ 26\ 36) \\ & (13\ 42\ 17)(15\ 37\ 45)(16\ 28\ 44)(19\ 40\ 27)(20\ 41\ 35), \end{aligned}$$

ce qui montre que A est effectivement une permutation paire. Jordan en déduit que H est contenu dans $\mathscr{S}$. Mais F n'est pas dans $\mathscr{S}$ car elle équivaut à un nombre impair de transpositions, ce qui donne la conclusion : $\mathscr{S}$ contient au plus la moitié des substitutions de G et contient H qui en contient exactement la moitié ; par conséquent $H = \mathscr{S}$ et en particulier leurs ordres sont égaux à la moitié de l'ordre de G.

Résumons ces derniers arguments avec un point de vue actuel. L'action de G sur les quarante-cinq termes de φ donne un isomorphisme

$$\Phi : G \subset \mathfrak{S}_{27} \xrightarrow{\sim} G_1 \subset \mathfrak{S}_{45}.$$

Le sous-groupe $\mathscr{S}_1 = G_1 \cap \mathfrak{A}_{45}$ est distingué dans G_1 car $\mathfrak{A}_{45}$ l'est dans $\mathfrak{S}_{45}$. Le sous-groupe $\mathscr{S} = \Phi^{-1}(\mathscr{S}_1)$ est donc distingué dans G. On vérifie que $\Phi(A), \Phi(B), \ldots, \Phi(E)$ appartiennent à $\mathscr{S}_1$, ce qui implique que H, engendré par $A, \ldots, E$, est inclus dans $\mathscr{S}$. De plus, comme $\Phi(F) \notin \mathscr{S}_1$, on a $F \notin \mathscr{S}$ et donc $(G : \mathscr{S}) \geqslant 2$, ce qui donne par conséquent $\operatorname{Card} \mathscr{S} \leqslant (\operatorname{Card} G)/2$. Mais puisque

$$\operatorname{Card} \mathscr{S} \geqslant \operatorname{Card} H \geqslant 28 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 12 = \frac{\operatorname{Card} G}{2},$$

il vient enfin $\operatorname{Card} \mathscr{S} = \operatorname{Card} H = (\operatorname{Card} G)/2$ et donc $\mathscr{S} = H$.

Jordan détermine ensuite les facteurs de composition de G. Par construction de H, ceux-ci sont 2 ainsi que les facteurs de composition de H. Jordan montre alors que le groupe H est simple. En ce qui concerne ce point, seules les idées de la démonstration de Jordan seront indiquées ici. Dans le *Traité*, Jordan renvoie en fait à des paragraphes antérieurs où une situation analogue est traitée ; dans l'article [Jordan 1869b], la preuve est donnée intégralement. L'idée est la suivante : si I est un groupe (différent de $\{1\}$) contenu dans H et permutable à toutes ses substitutions, Jordan montre successivement que I contient

1° une substitution qui fixe a,

2° une substitution qui fixe a et b,

3° une substitution qui fixe a, b et d,

4° la substitution E,

5° les substitutions A, B, C, D et E.

Donnons en termes modernes les grandes lignes de la preuve du point 1° , celles des autres points étant du même type. Soit $S \in I \setminus \{1\}$ qui envoie a sur, par exemple, b. Si parmi les substitutions C, D, E, il y en a une, disons T, qui ne commute pas avec S, alors I contient $S^{-1} \cdot T^{-1}ST \neq 1$ qui envoie a sur lui-même : c'est ce qui est demandé. Sinon, S permute entre elles les racines a, b, c d'une part et les racines m, n d'autre part. Donc, si S ne fixe aucune racine, elle permute circulairement a, b, c d'une part et m, n d'autre part. En particulier, $S^2 \neq 1$ et S^2 fixe m et n. Or, il existe $\Sigma \in H$ telle que $Sm = a$. Alors I contient $\Sigma^{-1}S^2\Sigma$ qui fixe a.

Comme H est dérivé de cinq substitutions A, B, C, D, E, le point 5° implique que I est égal à H et donc que H est simple. À l'issue des indications de cette preuve, Jordan précise [44] :

> Nous nous bornons à indiquer ce procédé direct de démonstration, la proposition à établir devant se retrouver plus loin (504). [Jordan 1870b, p. 319]

Le numéro 504 du *Traité* est celui qui conclut son travail sur les équations liées aux fonctions hyperelliptiques. Jordan y montre d'une part que le groupe de l'équation de la trisection des périodes de ces fonctions est égal au groupe abélien, et d'autre part qu'il est identique, après adjonction d'une racine carrée, à celui de l'équation aux vingt-sept droites. Écrit avec des notations actuelles, le groupe de l'équation de la trisection est le groupe $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_3) \rtimes \mathbf{F}_3^*$; après adjonction d'une racine carrée, il se réduit à $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_3)$, qui est donc le groupe de l'équation aux vingt-sept droites. Or, Jordan a également montré lors de son étude générale du groupe abélien que le groupe $\mathrm{PSp}_4(\mathbf{F}_3) = \mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_3)/\{\pm I_4\}$ est simple [45], et ce dernier est justement le groupe H dont il est question ici.

Résumons : pour le moment, Jordan a montré que le groupe G de la fonction φ est d'ordre $27 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 24$ ($= 51\,840$), qu'il possède un sous-groupe H d'indice 2 qui est simple,

44. Coquille dans le *Traité*, où le numéro auquel Jordan renvoie est 502.
45. [Jordan 1870b, p. 176].

et donc que les facteurs de composition de G sont 2 et $(\mathrm{Card}\, G)/2$. Il a aussi exhibé des substitutions particulières qui engendrent G. Tout ce travail s'est basé exclusivement sur l'étude du groupe de la fonction φ. En particulier, il n'y a eu aucune intervention d'objets ou de relations géométriques : la fonction φ a donc ici réalisé son rôle de traduction et a permis à Jordan de déployer ses techniques de théorie des substitutions.

2.3.3 Réduites géométriques

Presque tout reste du paragraphe sur l'équation aux vingt-sept droites est consacré à la recherche de réduites de cette équation, ce qui correspond aux numéros 445 à 452 du *Traité*. Citons intégralement le 445 :

> L'équation aux vingt-sept droites a plusieurs réduites remarquables, signalées par divers géomètres.
>
> 1° Prenons, par exemple, pour inconnue de la question le plan du triangle formé par trois droites qui se coupent ; ces triangles étant au nombre de quarante-cinq, on aura une équation du quarante-cinquième degré, équivalente à la proposée.
>
> 2° On peut déterminer de $(45 \cdot 32)/2$ manières différentes un système de deux triangles qui n'aient aucune droite commune ; à chaque semblable système correspond un triangle associé (441). Réciproquement, chaque système de trois triangles associés (*trièdre* de Steiner) correspond aux trois combinaisons deux à deux des triangles qui les forment. Le nombre total des trièdres sera donc $(45 \cdot 32)/(2 \cdot 3)$. On peut d'ailleurs grouper ces trièdres par paires (*doubles trièdres*) en réunissant ensemble ceux qui contiennent les mêmes droites. Enfin les doubles trièdres peuvent être associés trois à trois, en réunissant ensemble ceux qui n'ont aucune droite commune. Prenant pour inconnue ce système de trois doubles trièdres, on aura une équation de degré $(45 \cdot 32)/(2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3) = 40$, et équivalente à la proposée.
>
> 3° On peut déterminer de $(27 \cdot 16)/2$ manières différentes une paire de droites qui ne se coupent pas. On peut d'ailleurs grouper ces paires six à six (*doubles-six* de Schläfli), de sorte que les droites d'une paire rencontrent chacune une droite de chaque autre paire du double-six. Les doubles-six dépendent donc d'une équation du degré $(27 \cdot 16)/(2 \cdot 6) = 36$, qui sera encore équivalente à la proposée.
>
> Aucune réduite d'un degré inférieur au vingt-septième n'ayant été rencontrée jusqu'ici, on était fondé à penser qu'il est impossible de ramener la résolution de l'équation aux vingt-sept droites à celles d'une équation d'un degré inférieur. Nous allons en effet prouver cette proposition. [Jordan 1870b, p. 319]

Les 1° , 2° et 3° de cet extrait consistent chacun en la présentation par Jordan d'une équation équivalente à celle aux vingt-sept droites. À chaque fois, le schéma de raisonnement est le même : Jordan considère des groupements particuliers des vingt-sept droites, les dénombre et en déduit immédiatement à la fois l'existence d'une équation associée et son équivalence avec l'équation aux vingt-sept droites. Dans la suite du *Traité*, Jordan ne revient à aucun moment sur ces trois points 1° , 2° , 3° , que ce soit pour des explications, des compléments de démonstration ou d'autres commentaires ; c'est aussi le seul endroit du *Traité* où l'on trouve ce genre de raisonnement.

Comme écrit précédemment, les groupements particuliers des vingt-sept droites — à savoir : les triangles, les systèmes de trois doubles trièdres et les doubles-six — relèvent bien de la géométrie, au sens mis en avant à la section 2.2. Le schéma de preuve de Jordan consiste donc à déduire certaines propriétés de l'équation aux vingt-sept droites *directement* à partir de l'existence de certains objets géométriques : il n'y a pas d'intervention d'objets comme des fonctions de racines, des substitutions et leurs groupes, des procédés d'adjonction, etc.

En leur attribuant une paternité (Steiner ou Schläfli), Jordan souligne que les objets géométriques qu'il utilise avaient été présentés dans des travaux antérieurs (que nous avons décrits au chapitre 1) : les systèmes de trois doubles trièdres ont été vus dans [Steiner 1856b] et les doubles-six dans [Schläfli 1858]. Par ailleurs, Jordan écrit ici que les réduites correspondantes ont été « signalées par divers géomètres ». Or, ni Steiner ni Schläfli ne faisaient mention d'une quelconque équation qui pourrait avoir rapport avec l'équation aux vingt-sept droites. Il semble donc que c'est Jordan lui-même qui traduit l'existence des différents groupements obtenus à partir des vingt-sept droites en réduites de degré correspondant au nombre d'objets de ces groupements.

Ce transfert de la connaissance géométrique vers la théorie des substitutions est différent de celui rencontré autour des fonctions φ. Si cette connaissance géométrique consiste ici aussi en des relations d'incidence particulières, ces dernières sont directement incarnées en équations que j'appellerai ainsi « réduites géométriques » ; il n'y a intervention ni de fonction de racines ni de groupe de substitutions.

L'idée d'incarnation directe d'objets géométriques en équations équivalentes se lit encore dans la dernière parie de la citation de Jordan : « Aucune réduite d'une degré inférieur au vingt-septième n'ayant été rencontrée jusqu'ici [...] ». Encore une fois, Jordan semble se baser sur le fait qu'aucune configuration formée à partir des vingt-sept droites et comportant moins de vingt-sept objets n'a été trouvée au moment où il écrit. Mais il propose alors (à partir du numéro 446) une démonstration dans laquelle, comme nous allons le voir à présent, il n'y a plus de trace de géométrie.

2.3.4 Il n'existe pas de réduite de degré inférieur à 27

Pour montrer que l'équation aux vingt-sept droites ne possède pas de réduite de degré strictement inférieur à 27, Jordan commence par faire remarquer que si un tel abaissement avait lieu, il aurait également lieu après avoir adjoint la racine carrée réduisant [46]

46. Rappelons en effet que l'indice de H dans G est 2. Donc, si K désigne un corps de décomposition de l'équation aux vingt-sept droites, et si k' désigne la sous-extension de K/k telle que $\mathrm{Gal}(K/k') = H$, on a $[k' : k] = 2$. C'est justement dire qu'il existe un élément δ de degré 2 sur k (la « racine carrée ») tel que $k' = k(\delta)$.

le groupe G à H. Il suppose que cette adjonction est faite et cherche alors quels sont les degrés possibles pour l'équation réduite.

Jordan note E_{27} l'équation aux vingt-sept droites et E_d une équation équivalente à E_{27}, de degré d minimal parmi celles-ci. Il montre par l'absurde que E_d est irréductible et primitive : si E_d n'était pas irréductible, la résolution d'un de ses facteurs (de degré inférieur à d) abaisserait le groupe de E_{27}. Mais comme H, groupe de E_{27}, est simple, la résolution d'un tel facteur entraînerait la résolution complète de E_{27} d'après le COROLLAIRE qui a été rappelé à la section 2.2.3. Comme réciproquement, toutes les racines de E_d, donc celles de ses facteurs irréductibles, sont des fonctions rationnelles de celles de E_{27}, cela implique que E_{27} est équivalente à un facteur de E_d, ce qui contredit la minimalité de d. Si d'autre part l'équation E_d n'était pas primitive, ses racines se regrouperaient en systèmes « dépendant d'une équation dont le degré divise d », [Jordan 1870b, p. 320]. La résolution de cette équation abaisserait [47] le groupe de E_{27} et donc entraînerait comme *supra* la résolution de E_{27}, contredisant à nouveau la minimalité de d.

Jordan note ensuite G_d l'ordre de E_d, c'est-à-dire l'ordre de son groupe. Puisque cette dernière et E_{27} sont équivalentes, G_d est égal à l'ordre de E_{27}, qui est $\Omega = 27 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 2$. En outre, G_d est divisible par d et divise [48] $1 \cdot 2 \dots d$. Jordan en conclut que si $d < 27$, alors d est l'un des nombres 24, 20, 18, 16, 15, 12, 10 et 9. Il écarte ensuite ces différentes possibilités au fur et à mesure, au cours de longs développements. À titre d'exemple, je ne retranscrirai ici que la preuve de l'impossibilité du cas $d = 24$. Cette preuve s'adapte en effet aux cas $d = 18$ et $d = 12$, et est représentative des méthodes déployées dans les autres cas. La démonstration de Jordan devenant ici très elliptique, je choisis d'intervenir ligne par ligne pour donner des compléments et des explications en termes modernes. J'introduis également une numérotation afin d'en rendre la lecture plus aisée.

1. Jordan suppose l'existence d'une réduite E_{24} de degré 24. « Adjoignons à l'équation E_{24} une de ses racines, x : l'équation E_{23} qui détermine les vingt-trois racines restantes a son groupe G_{23} formé des substitutions qui laissent x immobile, et son ordre est égal à $\Omega/24$, nombre divisible par les nombres premiers [49] 2, 3, [5]. »

   Par correspondance de Galois, le groupe G_{23} de E_{23} est effectivement le stabilisateur $\mathrm{Stab}_{G_{24}}(x)$ de x sous G_{24}. De plus, comme E_{24} est irréductible, son groupe G_{24} est transitif d'après le THÉORÈME II rappelé en section 2.2.3. Par conséquent, l'orbite $G_{24} \cdot x$

47. Il s'agit d'un théorème général sur la résolution des équations non primitives. Voir par exemple [Jordan 1881, p. 31].
48. Le fait que G_d divise $d!$ vient de ce que $\mathrm{Gal}(E_d/k)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_d$. Le fait que G_d soit divisible par d s'explique de la façon suivante : si on note $x_1, \dots, x_d$ les racines de E_d, alors G_d est égal au degré $[k(x_1, \dots, x_d) : k]$. Mais $[k(x_1, \dots, x_d) : k] = [k(x_1, \dots, x_d) : k(x_1)][k(x_1) : k]$, et comme E_d est irréductible, $k(x_1) \simeq k[X]/(E_d)$ est de degré d sur k.
49. Coquille dans le *Traité*, où il est écrit « 2, 3, 4 ».

est de cardinal maximal, c'est-à-dire 24. Ainsi,

$$\#G_{23} = \#\operatorname{Stab}_{G_{24}}(x) = \frac{\#G_{24}}{\#G_{24} \cdot x} = \frac{\Omega}{24}.$$

Le nombre $\Omega/24$ est bien divisible par 2, 3 et 5 ; ce sont d'ailleurs ses seuls facteurs premiers.

2. « Les équations irréductibles dont $[E_{23}]$ est le produit ont donc leur ordre divisible par ces trois nombres premiers, à l'exclusion de tous les autres (397). »

   Le théorème donné au numéro 397 du *Traité* dit en effet que si $\mathscr{E}$ est une équation irréductible et primitive de degré n et E une équation de degré $n-1$ obtenue en adjoignant à $\mathscr{E}$ une de ses racines, tout nombre premier qui divise l'ordre de E divise l'ordre de chacune de ses équations partielles (c'est-à-dire de ses facteurs). Appliqué ici, cela entraîne que l'ordre de chacun des facteurs irréductibles de E_{23} est divisible par $2, 3$ et 5. Réciproquement, tout diviseur de l'ordre d'une équation partielle divise l'ordre de l'équation car le groupe de la première est un sous-groupe de celui de la seconde. Ici, $2, 3$ et 5 sont les seuls diviseurs premiers de $\Omega/24$, ce qui permet à Jordan d'exclure les nombres premiers autres que 2, 3 et 5 des diviseurs des ordres des équations partielles.

3. « Donc chacune de ces équations est du degré 5 au moins ; en outre, aucune d'elles n'a pour degré 7, 8 ou 9, car son ordre ne pourrait être divisible par 5 sans l'être par 7 (398) ».

   Le théorème du numéro 398 du *Traité* énonce que si une équation irréductible E de degré n a son ordre divisible par un nombre premier p supérieur à $n/2$, son groupe sera $n-p+1$ fois transitif. Dans la situation présente, supposons par exemple qu'un facteur irréductible soit de degré 8 et notons-en $x_1, \dots, x_8$ les racines. Par le théorème 398 appliqué avec $n = 8$ et $p = 5$, son groupe Γ est 3 fois transitif. Notons $\operatorname{Stab}_\Gamma(x_1, x_2)$ le sous-groupe de Γ définit par $\{g \in \Gamma, gx_1 = x_1 \text{ et } gx_2 = x_2\}$. Ce groupe s'interprète comme le stabilisateur de x_2 sous $\operatorname{Stab}_\Gamma(x_1)$, donc

$$\#\operatorname{Stab}_\Gamma(x_1, x_2) = \frac{\#\operatorname{Stab}_\Gamma(x_1)}{\#\operatorname{Stab}_\Gamma(x_1) \cdot x_2}.$$

   Mais $\operatorname{Stab}_\Gamma(x_1) \cdot x_2$ est de cardinal 7 car, comme G est 3 fois donc 2 fois transitif, on peut envoyer (x_1, x_2) sur n'importe quel couple (x_1, ξ) avec $\xi \in \{x_2, \dots, x_8\}$. Donc

$$\#\operatorname{Stab}_\Gamma(x_1, x_2) = \frac{1}{7}\#\operatorname{Stab}_\Gamma(x_1) = \frac{1}{7} \cdot \frac{\#\Gamma}{8},$$

   la dernière égalité provenant comme au point 1 de la transitivité de Γ. De cela suit que $\#\Gamma$ est divisible par 7.

4. « Enfin, aucune d'elles n'a son degré divisible par un nombre premier autre que 2, 3, 5, car ce nombre premier diviserait son ordre. »

   En effet, comme le degré d'une équation irréductible divise son ordre (voir la note 48), tout diviseur premier du degré divise également l'ordre de l'équation.

5. « D'après cela, les seules hypothèses admissibles pour les degrés de ces facteurs irréductibles sont les suivantes : 18 et 5 ; 12, 6 et 5 ; 6, 6, 6, et 5. »

   On énumère les possibilités : on cherche des degrés sous la forme $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$, leur somme doit être égale à 23. Parmi les nombres de la forme annoncée, ceux qui sont inférieurs à 23 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18 et 20. On exclut déjà 1, 2, 3, 4, 8 et 9 vu le point 3. Faire la liste des partitions de 23 avec les nombres de la liste restants donne ce qui est énoncé par Jordan.

6. Jordan montre que la première des hypothèses précédentes est impossible, les mêmes raisonnements impliquant alors que les autres le sont tout autant : « Supposons que E_{23} soit le produit de deux facteurs E_{18} et E_5 ayant respectivement pour racines $y_1, \ldots, y_{18}$ et $x_1, \ldots, x_5$. L'ordre du groupe partiel $\Gamma^{(\mu)}$ formé par les substitutions de G_{24} qui laissent immobiles x et x_μ sera $\Omega/(24 \cdot 5)$ et celui du groupe partiel $\Delta^{(\nu)}$ formé par celles des substitutions qui laissent immobiles x et y_ν sera $\Omega/(24 \cdot 18)$. »

   Il est bon de commencer par rappeler que si F est un facteur (rationnel) d'une équation E, alors tout élément du groupe de Galois de E induit une permutation des racines de F — cette propriété apparaît de façon un peu cachée au numéro 357 du *Traité*. Ici, les racines $x_1, \ldots, x_5$ sont donc permutées entre elles, de même que les racines $y_1, \ldots, y_{18}$. Comme E_5 est irréductible, l'action induite est transitive et on en déduit comme au point 3 que

$$\#\Gamma^{(\mu)} = \frac{\#\,\mathrm{Stab}_{G_{24}}(x)}{\#\,\mathrm{Stab}_{G_{24}}(x) \cdot x_\mu} = \frac{\Omega/24}{5}.$$

   De même pour $\#\Delta^{(\nu)}$.

7. « Soit maintenant S une substitution de G_{24}, qui remplace x par x_μ, et soient z une autre racine quelconque de E_{24}, u la racine que S lui fait succéder. Le groupe formé par les substitutions qui laissent x_μ et u immobiles est le transformé par S de celui dont les substitutions laissent x et z immobiles ; il contiendra donc $\Omega/(24 \cdot 5)$ ou $\Omega/(24 \cdot 18)$ substitutions, suivant que z sera l'une des racines $x_1, \ldots, x_5$ ou l'une des racines $y_1, \ldots, y_{18}$. »

   Par définition, le *transformé* de $\mathrm{Stab}(x, z)$ par S est le groupe $S \cdot \mathrm{Stab}(x, z) \cdot S^{-1}$, voir [Jordan 1870b, p. 24] ; remarquer que Jordan note la composition de deux substitutions dans l'ordre inverse de celui qui est habituel de nos jours. Les assertions de Jordan dont il est question ici ne posent pas de difficulté.

8. « Or l'équation E_5 ayant son ordre divisible par 3, son groupe est trois fois transitif (398) ; donc le groupe formé par celles des substitutions de G_{23} qui laissent immobiles deux quelconques de ses racines x_μ et $x_{\mu'}$, a pour ordre $\Omega/(24 \cdot 5 \cdot 4)$. »

   La démonstration est la même qu'au point 3, où a d'ailleurs été rappelé le théorème du n° 398.

9. « Le groupe formé par celles des substitutions de G_{24} qui jouissent de cette propriété, contenant celui-là, a pour ordre un multiple de ce nombre ; donc il ne peut avoir pour ordre $\Omega/(24 \cdot 18)$; donc les cinq racines telles, que le groupe partiel formé par celles des substitutions de G_{24} qui laissent immobiles l'une d'elles en même temps que x_μ ait pour ordre $\Omega/(24 \cdot 5)$, sont $x, x_1, \ldots, x_{\mu-1}, x_{\mu+1}, \ldots$ Mais S les fait succéder aux cinq racines $x_1, \ldots, x_5$, qui jouissent de la même propriété par rapport à x. Donc S permute exclusivement entre elles les six racines $x, x_1, \ldots, x_5$ ».

   D'après le point 6, on a $\#\,\mathrm{Stab}(x_\mu, x) = \Omega/(24 \cdot 5)$. Ensuite, d'après le point 7,

$$\#\,\mathrm{Stab}(x_\mu, x_{\mu'}) = \begin{cases} \Omega/(24 \cdot 5) & \text{si} \quad S^{-1}x_{\mu'} \in \{x_1, \ldots, x_5\} \\ \Omega/(24 \cdot 18) & \text{si} \quad S^{-1}x_{\mu'} \in \{y_1, \ldots, y_{18}\}. \end{cases}$$

   Vu le début de ce point 9, le second cas est exclu, ce qui implique simultanément que l'on a $\#\,\mathrm{Stab}(x_\mu, x_{\mu'}) = \Omega/(24 \cdot 5)$ et $S^{-1}x_{\mu'} \in \{x_1, \ldots, x_5\}$. Ce dernier fait, joint à l'égalité $Sx = x_\mu$, montre alors que S permute entre elles $x, x_1, \ldots, x_\mu$. Par conséquent, on a nécessairement $S^{-1}y_\nu \in \{y_1, \ldots, y_{18}\}$ pour tout ν et donc $\#\,\mathrm{Stab}(x_\mu, y_\nu) = \Omega/(24 \cdot 18)$, ce qui finit de prouver le point 9.

10. « D'où l'on [déduit] comme au n° 396, que E_{24} n'est pas primitive, ce qui est contraire au numéro précédent. »

    Donnons les grandes lignes de la preuve du n° 396, qui s'adapte telle quelle à la situation présente. Si une substitution de G_{24} envoie une des racines $x, x_1, \ldots, x_5$ sur une autre de cet ensemble, alors elle permute ces six racines exclusivement entre elles. Soit $y \in \{y_1, \ldots, y_{18}\}$ et soit $U \in G_{24}$ telle que $Ux = y$. Nécessairement, les six racines $y = Ux, \eta_1 = Ux_1, \ldots, \eta_5 = Ux_5$ sont toutes différentes de $x, x_1, \ldots, x_5$ et toute substitution envoyant une des racines du premier ensemble sur une racine du second ensemble envoie *toutes* les racines du premier ensemble sur celles du second. On obtient de même un troisième ensemble de six racines $\eta', \eta'_1, \ldots, \eta'_5$. Cette partition des racines de E_{24} en trois ensembles montre que E_{24} n'est pas primitive.

Jordan a ainsi prouvé que l'équation aux vingt-sept droites ne possède pas de réduite de degré $d = 24$. Avec le même genre de techniques, il montre que les autres possibilités pour d mènent toutes à des contradictions.

2.3.5 Conclusion partielle

Les travaux de Jordan sur l'équation aux vingt-sept droites portent donc les traces de transferts opérés depuis ce que Jordan perçoit comme de la géométrie vers ce qui relève de la théorie des substitutions. Si ces transferts concernent toutes les relations d'incidence particulières entre les vingt-sept droites, ils sont exprimés de différentes manières dans les travaux de Jordan.

La traduction de telles relations consistant en la création de la fonction φ peut se voir comme un encodage de l'information géométrique en termes de racines [50]. Ce procédé, commun à toutes les situations du chapitre des applications géométriques du *Traité*, permet à Jordan d'étudier le groupe de l'équation aux vingt-sept droites *via* le groupe de φ, et d'en trouver l'ordre, les facteurs de compositions, des générateurs, etc. Ce sont ensuite ces éléments qui sont utilisés pour montrer qu'il n'existe pas de réduite de degré inférieur à 27.

La déduction immédiate de réduites à partir des triangles, systèmes de trois doubles trièdres et doubles-six montre un transfert de la connaissance géométrique effectué d'une manière différente. Au contraire des fonctions φ, la présence de ces réduites dans le *Traité* est tout à fait spécifique au paragraphe sur les vingt-sept droites, et le schéma de raisonnement sous-jacent (qui n'est d'ailleurs pas justifié) s'écarte du type de démonstrations que l'on trouve ailleurs dans le *Traité*. Autrement dit, ces réduites géométriques ne s'accordent pas avec le reste de l'ouvrage de Jordan, et la question de comprendre leur présence dans le *Traité* reste ouverte. Cela étant dit, je vais pour le moment continuer à suivre le fil de la description des travaux de Jordan sur les vingt-sept droites.

On remarquera encore ici un trait commun aux transferts géométriques réalisés avec les fonctions φ ou les réduites géométriques : l'impossibilité d'épuiser, par des méthodes géométriques, la connaissance des relations géométriques d'une configuration donnée. Cette impossibilité s'exprimait dans le cas de φ par le problème de l'inclusion réciproque entre son groupe et celui de l'équation aux vingt-sept droites. Dans le cas des réduites, elle donnait à Jordan le pressentiment qu'il n'existait pas de réduite de degré inférieur à 27, ce qui a alors été montré par la théorie des substitutions.

Cela met ainsi en avant des limites de la géométrie pour répondre à des questions « purement négatives », comme l'écrit Jules Hoüel dans sa revue bibliographique du *Traité* :

> Plusieurs des résultats que nous venons d'énumérer ont attiré l'attention de divers géomètres, qui les ont démontrés par d'autres méthodes. [...] Nous ferons pourtant remarquer qu'aucune des propositions purement négatives, telles que l'impossibilité d'abaisser l'équation aux 27 droites [...], n'a été retrouvée jusqu'à présent. Cela ne doit pas surprendre ; car on ne voit guère comment on pourrait arriver à des résultats de cette nature sans recourir à la théorie des substitutions. [Hoüel 1871, p. 165]

50. Dans la section VII de ses *Disquisitiones Arithmeticae*, Gauss opère également une sorte d'encodage consistant à indexer de façon *ad hoc* les racines de l'unité de façon à construire des résolvantes de l'équation cyclotomique (voir [O. Neumann 2007]). Ce type d'encodage semble différer de celui de Jordan, qui ne cherche pas à créer de résolvantes à partir de φ, mais à mettre la focale sur le groupe de cette dernière.

Pour poursuivre cette discussion sur les rapports entre théorie des substitutions et géométrie, je vais à présent reprendre la description des recherches de Jordan sur l'équation aux vingt-sept droites.

2.4 « Conjectures algébriques » et « vérifications géométriques », ou Jordan vs. Geiser

Dans le dernier numéro du paragraphe sur l'équation aux vingt-sept droites, Jordan énonce un lien entre cette équation et celle associée aux seize droites des surfaces quartiques à conique double. Comme nous l'avons vu plus haut, ce lien avait déjà été annoncé dans [Jordan 1869c], en même temps qu'un autre lien, entre l'équation aux vingt-sept droites et l'équation aux vingt-huit tangentes doubles : il s'agissait de réduire les uns aux autres les groupes de ces équations par adjonctions successives de racines.

Plus précisément, Jordan avait énoncé que si l'on adjoint à l'équation aux vingt-huit tangentes doubles une de ses racines, on obtient une équation de degré 27 ayant le même groupe que l'équation aux vingt-sept droites ; puis que si l'on adjoint à cette dernière une de ses racines, l'équation de degré 26 obtenue se décompose en une équation de degré 10 et une autre de degré 16, ayant même groupe que l'équation aux seize droites. À la suite de l'énoncé de ce résultat, Jordan avait ajouté :

> La théorie des substitutions aurait donc permis de prévoir l'existence des liaisons géométriques qui existent entre les problèmes des vingt-huit tangentes doubles, des vingt-sept droites et des seize droites (voir un Mémoire de M. Geiser (*Mathematische Annalen*, t. I)). [Jordan 1869c, p. 659]

Le mémoire cité est [Geiser 1869b], que j'ai déjà rapidement présenté au chapitre précédent. Consacré aux vingt-huit tangentes doubles et aux vingt-sept droites, les seize droites n'y sont évoquées à aucun moment : Jordan semble donc le citer pour celle des « liaisons géométriques » relatives aux tangentes doubles et aux droites des cubiques.

La même référence est en effet donnée dans le *Traité*, au cours du §VI des « Applications géométriques » :

> Ainsi se retrouve entre le problème des vingt-sept droites et celui des doubles tangentes, le lien remarquable signalé par M. Geiser (*Mathematische Annalen*, t. I$^{\text{er}}$). [Jordan 1870b, p. 330]

Jordan n'évoque Geiser à aucun autre endroit du *Traité*, et en particulier pas dans le §III sur les seize droites des surfaces quartiques. Il l'associe en revanche à ces droites dans la notice sur ses travaux qu'il rédige quelques années plus tard, destinée à sa candidature à l'Académie des Sciences :

> [L'équation aux vingt-sept droites] est intimement liée à l'équation des seize droites. Ce dernier résultat, que la théorie m'avait fait prévoir, a été vérifié par M. Geiser. [Jordan 1881, p. 32]

Ces propos indiquent donc l'existence de recherches de Geiser sur le sujet des vingt-sept droites et des seize droites. Or, un examen des travaux publiés de ce dernier [51] révèle une article de 1869, intitulé *Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben*, et débutant comme suit :

> La relation vue dans le mémoire « Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades » [Geiser 1869b] entre les droites des surfaces du troisième degré et les tangentes doubles des courbes planes du quatrième degré a incité Monsieur *Camille Jordan* à effectuer des recherches algébriques (ces recherches ont depuis été publiées dans les « Comptes rendus » du 15 mars 1869, [Jordan 1869c]), lesquelles, comme ce dernier l'a brièvement partagé avec l'auteur, font voir un rapport entre les droites d'une surface générale du troisième degré et les droites d'une surface du quatrième degré avec courbe plane double du second degré. En effet, les considérations géométriques suivantes confirment la conjecture annoncée par Monsieur *Jordan*[52]. [Geiser 1869c, p. 249]

Tous ces commentaires témoignent donc d'un va-et-vient entre Jordan et Geiser, dont la chronologie serait la suivante : les travaux de Geiser sur le lien entre les vingt-huit tangentes et les vingt-sept droites ont inspiré ceux de Jordan sur ce sujet ; ensuite, les recherches de ce dernier sur le lien entre les vingt-sept droites et les seize droites ont été communiquées à Geiser, qui a alors produit ses recherches sur ce lien-là.

Les citations précédentes manifestent aussi une distinction disciplinaire accompagnant ce va-et-vient, distinction faite par les acteurs eux-mêmes : d'un côté, les travaux « algébriques » de Jordan, relevant de la théorie des substitutions, et de l'autre les « considérations géométriques » de Geiser. En outre, un vocabulaire assez particulier accentue cette séparation, puisqu'il est question de « prévoir [par la théorie des substitutions] l'existence de liaisons géométriques » qui sont ensuite « vérifiées » par la géométrie, ou même de « conjectures [issues des] recherches algébriques » de Jordan, qui sont « confirmées » par des « considérations géométriques » de Geiser [53].

Afin de pouvoir discuter cette séparation disciplinaire ainsi que l'emploi des termes particuliers qui y sont reliés, nous allons à présent entrer dans les mathématiques elles-mêmes de Jordan et de Geiser, relatives aux liens entre vingt-sept droites, vingt-huit tangentes et

51. Une liste de ces travaux se trouve dans [Kollross 1934, p. 526-528].

52. « Die in dem Aufsatze: „Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades“ (Mathematische Annalen Bd. 1, pag. 128 etc.) nachgewiesene Beziehung zwischen den Geraden der Fläche dritten Grades und die Doppeltangenten der Curve vierten Grades haben Herrn *Camille Jordan* zu algebraischen Untersuchungen veranlasst ([d]ie erwähnten Untersuchungen sind unterdessen in den „Comptes rendus“ vom 15. März 1869 bekannt gemacht worden), die, wie er dem Verfasser brieflich mittheilte, einen Zusammenhang erkennen lassen zwischen den Geraden einer allgemeiner Fläche dritten Grades und den Geraden einer Fläche vierten Grades, welche eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades hat. In der That bestätigen die nachfolgenden geometrischen Betrachtungen die von Hernn *Jordan* ausgesprochene Vermuthung. »

53. À la fin de [Geiser 1869c], Geiser emploie d'ailleurs à nouveau le même vocabulaire : « [... dieser Aufsatz], dessen Grundgedanke in der Bestätigung der von Herrn *Jordan* ausgesprochene Vermuthung liegt. » [Geiser 1869c, p. 257].

seize droites [54]. Je suivrai à cette fin la chronologie décrite *supra*.

2.4.1 Le lien de Geiser entre les vingt-sept droites et les vingt-huit tangentes doubles

À l'époque où l'article sur les vingt-huit tangentes doubles et les vingt-sept droites a été publié, [Geiser 1869b], Geiser était privat-docent au *Polytechnicum* de Zurich, sur le point d'y être nommé professeur extraordinaire [55].

Né en Suisse, Carl Friedrich Geiser (1843-1934) était le petit-neveu de Jacob Steiner. Il avait été formé à l'université de Berlin entre 1861 et 1863, où il avait été grandement influencé par son grand-oncle, par Karl Weierstrass et par Leopold Kronecker. Il était alors revenu en Suisse et avait passé son habilitation en 1863, avant de devenir privat-docent au *Polytechnicum*. C'est auprès de Schläfli que Geiser prépara ensuite sa thèse de 1866, intitulée *Beiträge zur synthetische Geometrie*. Il fut nommé professeur extraordinaire en 1869 et obtint la chaire de géométrie en 1873, toujours au *Polytechninum* de Zurich. Geiser resta toute sa carrière dans cet établissement, dont il fut par ailleurs le recteur de 1881 à 1887 et de 1891 à 1895. D'après la nécrologie écrite par Louis Kollross, l'investissement de Geiser en tant que professeur et directeur « contribua à ériger [l'ETH] en un établissement international de premier rang », [Kollross 1934, p. 526]. Il prit sa retraite en 1913, après une cinquantaine d'années passées dans cette institution.

La liste des travaux de Geiser donnée dans cette même nécrologie comporte 25 publications dans des périodiques (entre 1866 et 1907) dont la plupart traitent de courbes ou de surfaces algébriques, à l'image de ceux en jeu dans le présent chapitre, [Geiser 1869b ; Geiser 1869c]. La liste comprend en outre trois éditions de cours de manuscrits de Steiner, dont les *Vorlesungen über die synthetische Geometrie*, éditées avec Schröter ; trois cours dont Geiser lui-même est l'auteur, portant d'après leur titre sur la « géométrie synthétique », la « géométrie analytique » et la « mécanique analytique » ; enfin, dix nécrologies et autres discours — l'un d'eux est le discours d'ouverture du premier Congrès international de mathématiques (1897), qui s'était tenu à Zurich et que Geiser avait présidé.

Si l'article sur les tangentes doubles et les vingt-sept droites est donc à compter plutôt parmi les premières publications de Geiser, il représente selon son nécrologue Arnold Emch une de ses « contributions les plus remarquables » [Emch 1938, p. 288]. Cet article est divisé en huit sections numérotées en chiffres romains. Les trois premières sections établissent le lien entre les vingt-huit tangentes doubles des courbes quartiques et les vingt-sept droites

54. Je précise ici que je n'ai trouvé aucune lettre entre Jordan et Geiser. Le dossier épistolaire de Jordan aux archives de l'École polytechnique ne contient rien de Geiser, et les archives de l'ETH (institution dans laquelle Geiser a passé la majorité de sa carrière, cf. *infra*) m'ont indiqué qu'il n'y avait pas de lettre de Jordan dans le dossier de Geiser.

55. Le *Polytechnicum* changea de nom en 1911 pour devenir l'*Eidgenössische Technische Hochschule*, ou ETH. Les quelques informations biographiques sur Geiser de ce paragraphe sont tirées de plusieurs de ses notices nécrologiques, [Fehr 1933 ; Kollross 1934 ; Emch 1938].

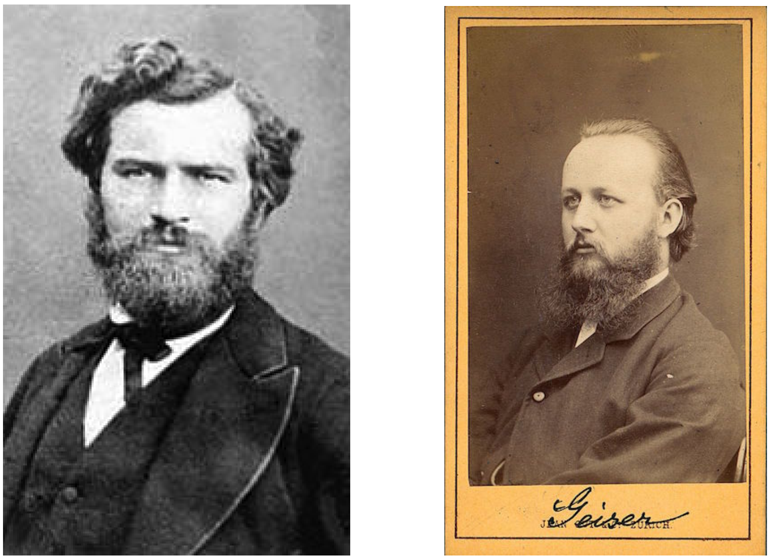


FIGURE 2.1 – Camille Jordan (1838-1922) et Carl Friedrich Geiser (1843-1934). L'image de Geiser m'a été fournie par la *Mathematische Gesellschaft* de Hamburg.

des surfaces cubiques. Dans les cinq dernières sections, Geiser déduit à l'aide de ce lien des propriétés des vingt-huit tangentes doubles à partir de propriétés des vingt-sept droites.

Avant d'en commencer la description, j'insère encore ici quelques résultats de géométrie qui seront utiles pour comprendre la suite, car ils sont couramment utilisés de façon implicite par Geiser [56] :

1. L'intersection d'une surface algébrique de degré n avec un plan est une courbe (algébrique plane) de degré n, au moins lorsque la surface et le plan sont définis sur $\mathbf{C}$. Ce sera toujours supposé être le cas dans la suite de ces rappels, et cela est implicitement supposé chez Geiser.

2. Deux courbes algébriques planes de degrés m et n et sans composante commune se coupent en mn points : c'est un des théorèmes de Bezout [57].

3. Étant donnés les n^2 points d'intersection de deux courbes planes de degré n, il existe une infinité de courbes de degré n passant par ces points d'intersection. La famille formée de toutes ces courbes est appelée un *faisceau de courbes*, et les points d'intersection communs sont appelés les *points-base* du faisceau.

4. Une équation d'une courbe de degré n contient en tout $(n+1)(n+2)/2$ coefficients, donc $(n+1)(n+2)/2-1 = n(n+3)/2$ coefficients indépendants. Par conséquent, par $n(n+3)/2$ points en position générale dans le plan [58] passe une et une seule

56. On peut trouver ces rappels dans [Salmon 1865] ou [Reye 1882] par exemple.
57. Voir [Alfonsi 2008].
58. Cela signifie qu'il n'existe pas de courbe de degré $n' < n$ contenant $n'(n'+3)/2+1$ de ces points.

courbe algébrique de degré n. Par exemple, 9 (resp. 14) points en position générale définissent une unique courbe cubique (resp. quartique) [59].

5. On peut définir un faisceau de courbes de degré n comme étant l'ensemble (infini) des courbes de degré n passant par $r = n(n+3)/2-1$ points donnés *a priori*, pourvu que ces r points soient en position convenable. Les r points sont les points-base du faisceau. Par exemple, on peut définir un faisceau de courbes quartiques à partir de 13 points-base (et alors toutes les quartiques du faisceau passent nécessairement par 3 autres points fixes).

6. De façon analogue, une équation de surface cubique contient 20 coefficients, donc 19 coefficients indépendants. Par conséquent, par 19 points de l'espace en position générale passe une unique surface cubique ; par 18 points passent une infinité de surfaces cubiques : c'est un *faisceau de surfaces cubiques*, et les 18 points sont les *points-base* du faisceau.

Enfin, je souligne que dans ce qui suit, des figures que j'ai tracées ont été ajoutées ça et là pour aider le lecteur avec des objets qui ne lui sont peut-être pas familiers. Si l'article de Geiser sur les courbes quartiques et les surfaces cubiques est totalement exempt de figures, la préface du manuel *Einleitung in die synthetische Geometrie* montre que Geiser voulait développer la « capacité d'intuition spatiale [60] » de ses étudiants. La présence de nombreuses figures dans ce manuel (il y en a 101 pour les 181 pages du livre) montre ainsi les vertus pédagogiques de celles-ci aux yeux de Geiser [61].

Commençons maintenant la description détaillée de l'article de Geiser en question, [Geiser 1869b]. Dans la section I de cet article, Geiser montre comment construire une courbe quartique et ses vingt-huit tangente doubles à partir d'une surface cubique et ses vingt-sept droites.

Pour cela, Geiser commence par considérer une surface cubique F_3 sans singularité, ainsi qu'un point p de l'espace. Il énonce que le cône de sommet p tangent à la surface [62] est de degré 6, et que si p appartient à la surface cubique, ce qui est supposé être le cas dans la suite, ce cône se compose du plan E tangent à la surface en p et d'un cône K_4 de

59. Cela peut sembler contradictoire avec le point précédent : c'est le paradoxe de Cramer. Il s'explique par le fait que (par exemple pour les cubiques) les 9 points d'intersection de courbes cubiques ne sont pas en position générale, justement parce qu'ils sont définis par une intersection particulière.

60. « Es galt zunächst, unter möglichst geringen Vorassetzungen das räumliche Anschauungsvermögen der Zuhörer auszubilden. » [Geiser 1869a, p. III].

61. Aucune des figures de ce livre ne concerne les surfaces cubiques ou les courbes quartiques, sujets qui n'y sont pas traités. À propos des figures en géométrie, surtout dans la première moitié du XIXᵉ siècle, voir [Lorenat 2015b].

62. Par définition, le *cône de sommet p tangent à la surface cubique* est l'ensemble des points p' de l'espace tels que la droite pp' soit tangente à la surface. Cayley et Salmon l'avaient déjà utilisé en 1849 dans [Cayley 1849] pour établir l'existence des vingt-sept droites sur les surfaces cubiques. Se reporter à la fin de cette section 2.4.1, où le calcul mené permet de voir dans un cas particulier que le degré d'un cône tangent à une surface de degré n est $n(n-1)$.

degré 4. Geiser prend alors une droite g de la surface cubique : le plan e contenant p et g coupe la surface cubique en une courbe de degré 3 contenant nécessairement la droite g, donc composée de la droite g et d'une conique. Les points d'intersection de cette conique avec g sont notés r et s ; le plan e est tangent à la surface cubique en chacun de ces points, puisque ce sont des points doubles de la courbe intersection de e et de F_3. Le plan e est par conséquent un plan tangent double au cône K_4, les arêtes de contact étant les droites pr et ps. Geiser obtient ainsi 27 plans tangents doubles e à K_4 ; il leur ajoute le plan E qui est également doublement tangent à K_4, les arêtes de contact étant dans ce cas les deux tangentes principales[63] t_1, t_2 à la surface cubique en p.

Geiser procède alors à la construction de la courbe quartique (se reporter en parallèle à la figure 2.2). Il considère un plan quelconque $\mathfrak{E}$ de l'espace. Ce plan coupe le cône K_4 selon une courbe quartique (plane) C_4 dont les vingt-huit tangentes doubles sont obtenues comme suit. Pour chaque plan e comme précédemment, l'intersection de e avec $\mathfrak{E}$ est une droite g' qui est tangente double à la quartique, les points de contact étant les points d'intersection r' et s' de $\mathfrak{E}$ avec pr et ps. Cela donne vingt-sept tangentes doubles. La dernière est l'intersection γ' des plans $\mathfrak{E}$ et E, les points de contact t'_1, t'_2 étant les points d'intersection de $\mathfrak{E}$ avec les tangentes principales t_1, t_2.

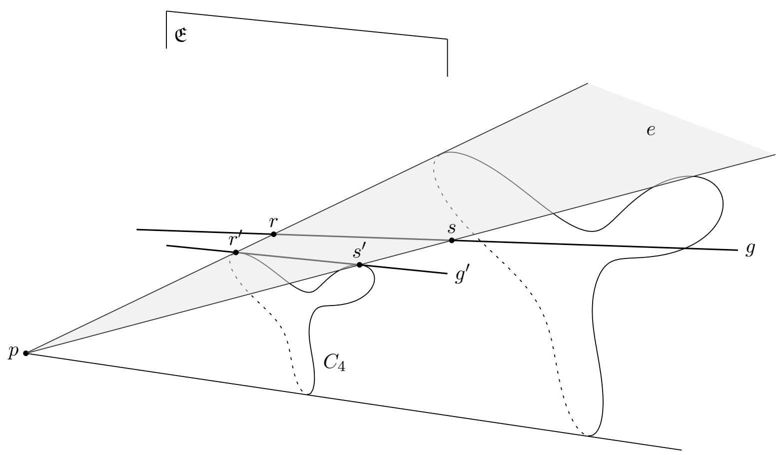


FIGURE 2.2 – Construction de la quartique C_4. Les deux quartiques sont des sections du cône K_4. La droite g de la surface cubique se projette sur une tangente double g' de la quartique C_4.

Pour récapituler, on obtient une courbe quartique C_4 en intersectant le cône K_4 avec un plan quelconque $\mathfrak{E}$. Parmi les vingt-huit tangentes doubles à C_4, vingt-sept sont les projections (de centre p) sur $\mathfrak{E}$ des droites de F_3 et la vingt-huitième est l'intersection de $\mathfrak{E}$ et du plan tangent à F_3 en p.

63. Les *tangentes principales* (« Haupttangenten ») à une surface en un point p sont les deux droites tangentes à cette surface en p avec un contact d'ordre au moins 3. [Salmon 1882, p. 244] les nomme « inflexional tangents ».

Geiser établit encore une propriété de la configuration géométrique qu'il vient de construire : il prouve ainsi que le plan $\mathfrak{E}$ rencontre la surface cubique en une courbe cubique C_3 qui est tangente à la courbe quartique C_4 en six points. Il montre en outre que ces six points ainsi que t'_1 et t'_2 sont situés sur une même conique C_2. Bien qu'il ne le dise pas, cette propriété lui permet de préparer la construction réciproque qui fait l'objet de la section II.

Geiser commence en effet, dans cette section II, par démontrer une sorte de réciproque à cette propriété, dont l'énoncé est le suivant. Étant donnée une courbe quartique plane C_4, on fait passer une conique quelconque C_2 par les deux points de contact t'_1, t'_2 de cette courbe avec une de ses tangentes doubles, notée γ'. Cette conique coupe la quartique en six autres points $b_1, \ldots, b_6$. Alors il existe une courbe cubique C_3 qui est tangente à la quartique en ces six points [64] (voir la figure 2.3).

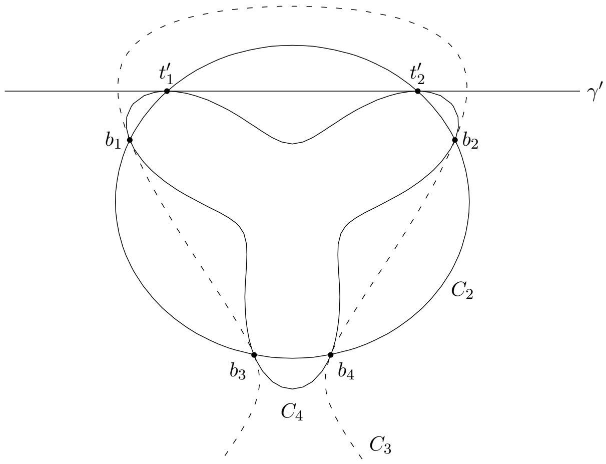


FIGURE 2.3 – Construction de la conique C_2 et de la cubique C_3. Les points b_5 et b_6 sont des points complexes et n'apparaissent donc pas sur cette figure.

Voici la démonstration donnée par Geiser de cette propriété. On définit un faisceau de quartiques avec la courbe C_4 et la courbe C_2, comptée avec multiplicité 2 : les points-base de ce faisceau sont $t'_1, t'_2, b_1, \ldots, b_6$, chacun étant compté avec multiplicité 2. On définit ensuite une courbe cubique C_3 assujettie à passer par b_1, b_2, b_3 (comptés avec multiplicité 2) et par b_4, b_5, b_6 (comptés avec multiplicité 1), puis on définit la courbe C''_4 comme étant la réunion de C_3 et de γ'. Par construction, C''_4 passe par $t'_1, t'_2, b_1, b_2, b_3$ avec multiplicité 2 et par b_4, b_5, b_6 avec multiplicité 1. Or, ce sont là les 13 points-base du faisceau ; par conséquent, C''_4 fait partie du faisceau, et en particulier, elle contient b_4, b_5, b_6 avec multiplicité 2. Comme enfin ces trois points ne sont pas sur γ', ils sont sur C_3. Donc C_3 contient

64. Ce théorème est une sorte de réciproque à la propriété de la fin de la section I. En outre, Geiser fait référence à [Hesse 1855a], où le même théorème est énoncé et démontré.

$b_1, \ldots, b_6$ avec multiplicité 2 à chaque fois : c'est dire que C_3 est tangente à C_4 en ces six points.

Geiser utilise ensuite le résultat ainsi démontré pour prouver « que réciproquement, toute courbe plane C_4 de degré 4 peut être mise en relation avec une surface du troisième degré de la façon qui [a été] expliquée [dans la section I] [65]. » Partant d'une courbe C_4 incluse dans un plan $\mathfrak{E}$, il utilise ce résultat, obtenant ainsi une courbe cubique C_3. Il considère un point p situé hors de $\mathfrak{E}$ ainsi que le plan E contenant p et la tangente double γ'. Dans ce plan E, il construit une courbe cubique C'_3 ayant p comme point double, avec pt'_1, pt'_2 comme tangentes en ce point, et passant par les trois points d'intersection de γ' et de C_3 — tout est fait pour reconstruire la surface cubique au vu de ce qui a été fait dans la section I : l'intersection de celle-ci avec $\mathfrak{E}$ doit être C_3, l'intersection avec E doit être une courbe cubique avec un point double en p (puisque E est tangent à la surface en p), etc. [66]. On pourra se reporter à la figure 2.4 pour visualiser la situation à ce stade de la preuve.

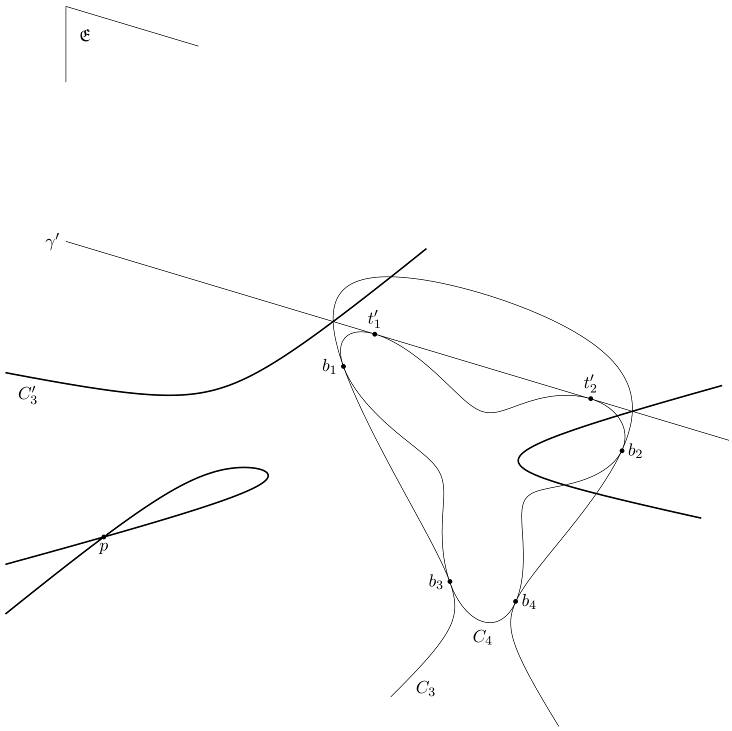


Figure 2.4 – La cubique C'_3, en gras, est dans le plan E défini par p et par γ'. Le troisième point d'intersection de γ' et de C_3 n'apparaît pas sur la figure.

65. « Dass umgekehrt jede beliebige ebene Curve vierten Grades C_4 zu eine Fläche dritten Grades in die eben auseinandergesetzte Beziehung gebracht werden kann. » [Geiser 1869b, p. 130].

66. L'existence de C'_3 n'est pas justifiée par Geiser. Ce dernier laisse implicite le fait qu'imposer les tangentes pt'_1, pt'_2 en p compte pour 2×2 conditions ponctuelles : il y a donc bien 9 conditions ponctuelles en tout.

Geiser définit alors un faisceau de surfaces cubiques contenant [67] C_3, C_3', b_1, b_2 et b_3. Il justifie cette existence par le fait que « ces éléments comptent pour 18 points », [Geiser 1869b, p. 132]. En effet, la cubique C_3 compte pour 9 points et la cubique C_3' compte pour 6 points car elle est assujettie à passer par les trois points de $\gamma' \cap C_3$. Il y a donc 18 points, ce qui permet de définir un faisceau.

Ce faisceau de surfaces cubiques donne lieu à un faisceau de cônes de degré 4 à 16 arêtes-base (les arêtes pt_1', pt_2', $pb_1, \ldots, pb_6$ toutes comptées deux fois), chacun de ces cônes étant le cône de sommet p tangent à une surface cubique du premier faisceau. Les intersections de ces cônes avec le plan $\mathfrak{E}$ forment à leur tour un faisceau de courbes quartiques à seize points-base t_1',t_2', $b_1, \ldots, b_6$ (tous comptés deux fois). Puisque la quartique C_4 du départ contient tous ces points-base, elle fait partie du faisceau. Geiser en déduit qu'il lui correspond une surface cubique du premier faisceau. Cette surface est celle qui était cherchée, et Geiser conclut :

> Une courbe plane quelconque de degré quatre peut toujours être conçue comme l'intersection du plan la contenant avec le cône tangent à une surface du troisième degré en un point de cette surface [68]. [Geiser 1869b, p. 132]

Cet énoncé conclut la section II et finit donc d'établir le lien entre surfaces cubiques et courbes quartiques.

Dans la section III, Geiser propose de montrer ce dernier théorème de façon « analytique [69] ». Il choisit dans le plan U de la quartique C_4 des coordonnées (projectives) x, y, z telles que l'axe des z soit une des tangentes doubles à la quartique et les autres axes passent par les points de contact de cette tangente double avec la quartique. Il énonce alors que l'équation de la courbe est de la forme [70]

$$z \cdot \varphi_3(x, y, z) - x^2y^2 = 0,$$

où φ_3 est une fonction homogène de degré 3. Geiser considère un point p situé hors du plan U et forme les plans X, Y, Z contenant p et les axes des x, y, z respectivement. Les coordonnées de l'espace choisies sont x, y, z, u, et Geiser affirme que la surface d'équation

$$F_3 = \varphi_3(x, y, z) + 4uxy + 4u^2z = 0$$

67. La cubique cherchée fait nécessairement partie de ce faisceau, puisque d'après ce qui a été vu par Geiser en section I, elle doit contenir C_3, C_3', b_1, b_2 et b_3.

68. « Eine beliebige Curve vierten Grades in der Ebene kann stets aufgefasst werden als der Durschnitt des Tangentenkegels, welcher von einem Punkte einer Fläche dritten Grades aus an diese Fläche geht, mit der Ebene der Curve. »

69. « Auch analytisch ergibt sich dieser Satz leicht », [Geiser 1869b, p. 132]. Geiser ne donne pas de raison à ce choix de présenter une preuve alternative.

70. En effet, il suffit de traduire les conditions sur les points de contact de la tangente double : par exemple, dire que le point de coordonnées $(1 : 0 : 0)$ appartient à la courbe signifie que l'équation de celle-ci ne contient pas de terme en x^4 ; dire que ce même point est point de contact d'une tangente implique qu'il n'y a pas de terme en y^3x, etc.

est telle que l'intersection de son cône tangent en p par le plan U est exactement la courbe quartique du départ.

Complétons Geiser en vérifiant ce dernier point. Pour cela, suivons la démarche utilisée dans le livre *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions* de Salmon, [Salmon 1865, p. 212], pour trouver le degré d'un cône tangent à une surface. Soit $q \neq p$ un point de coordonnées x, y, z, u. Il appartient au cône tangent si et seulement si la droite pq est tangente à F_3. Comme les points de la droite pq sont les points de coordonnées $(\mu x, \mu y, \mu z, \lambda + \mu u)$ avec $(\lambda : \mu)$ quelconque, cette droite est tangente à F_3 si et seulement si l'équation

$$F_3(\mu x, \mu y, \mu z, \lambda + \mu u) = 0$$

possède une racine double en $(\lambda : \mu)$. Or cette équation s'écrit

$$(\varphi_3(x, y, z) + 4xyu + 4zu^2)\mu^3 + 4(xy + zu)\mu^2\lambda + 4z\mu\lambda^2 = 0.$$

Elle possède une solution double si et seulement si son discriminant est nul, c'est-à-dire si et seulement si

$$(xy + uz)^2 - z(\varphi_3(x, y, z) + 4xyu + zu^2) = 0.$$

Cette dernière équation est celle du cône ; son intersection avec le plan U s'obtient en y substituant $u = 0$, ce qui conduit à

$$x^2y^2 - z\varphi_3(x, y, z) = 0,$$

qui est bien l'équation de la quartique C_4.

Les sections restantes (de IV à VIII) présentent chacune une application du lien entre les vingt-sept droites et les vingt-huit tangentes doubles. Comme écrit au chapitre précédent, il s'agit pour Geiser de déduire des propriétés (déjà connues) concernant les vingt-huit tangentes doubles à partir de propriétés (également connues) des vingt-sept droites :

> En conséquence de l'aperçu précis que l'on a sur les positions mutuelles des 27 droites d'une surface du troisième degré, les conclusions que l'on peut tirer de ce théorème [le lien entre les deux configurations *via* la projection] sont nombreuses. Celles-ci devront plus tard être exposées aux mathématiciens dans une présentation détaillée, et être mises en rapport avec les résultats de la théorie des tangentes doubles d'une courbe du quatrième degré que l'on doit à Aronhold, Clebsch, Hesse, Roch, Salmon et Steiner.
>
> Pour expliquer cela, nous ne donnerons ici que quelques exemples, qui conduisent pour la plupart à des résultats connus [71]. [Geiser 1869b, p. 133]

71. « Im Folge der genauen Einsicht, welche man in die gegenseitige Lage der 27 Geraden einer Fläche dritten Grades hat, sind die Folgerungen, welche man aus diesem Satze ziehen kann, sehr zahlreich. Dieselben sollen späterhin in einer umfassenderen Darstellung den Mathematikern vorgelegt, und mit den Resultaten aus der Theorie der Doppeltangenten einer Curve vierten Grades in Zusammenhang gebracht

À titre d'exemple, je propose de présenter les énoncés et les résultats des sections IV et V.

Ainsi, dans la section IV, Geiser rappelle d'abord que les vingt-sept droites d'une surface cubique sont incluses six à six dans un même hyperboloïde. Il en déduit alors que les vingt-huit tangentes doubles à une courbe quartique peuvent se grouper par groupes de six, qui sont tangentes à une même conique. Sans donner de référence, Geiser précise que ce résultat avait déjà vu par Aronhold et Hesse.

Pour ce qui est de la section V, Geiser considère une surface cubique F_3, un point p de cette surface et trois droites g_1, g_2, g_3 de la surface formant un triangle. Il rappelle que les plans contenant p et g_i coupent la surface F_3 en la droite g_i et une conique K_i, et note comme il l'a fait précédemment r_i, s_i les points d'intersection de g_i et K_i. Puisque tous les points r_i, s_i appartiennent à la fois à la polaire F_2 de p par rapport à F_3 et au plan du triangle $g_1g_2g_3$, ils sont tous situés sur une même conique K. En outre, comme les tangentes principales t_1, t_2 sont contenues dans F_2, elles intersectent nécessairement la conique K.

Geiser applique ensuite son résultat de la section I : les trois droites g_1, g_2, g_3 se projettent en trois tangentes doubles g'_1, g'_2, g'_3 à la quartique C_4 dont les points de contact sont les projections r', s' des points r, s. De plus, les droites t_1, t_2 deviennent les points de contact t'_1, t'_2 d'une autre tangente double γ'. Enfin, la conique K se projette sur une conique K' du plan de la courbe C_4, de sorte que les 8 points de contact r', s', t'_1, s'_1 appartiennent à cette conique K'.

Pour résumer le résultat du V, les vingt-huit tangentes doubles d'une courbe quartique se regroupent 4 par 4 de sorte que les 8 points de contact correspondants sont situés sur une même conique. Plus précisément, si on se donne une tangente double γ', elle se regroupe avec chaque triplet de tangentes doubles correspondant à un des 45 triplets de droites de la surface cubique formant un triangle ; de plus, il y a alors $28 \cdot 45/4 = 315$ tels groupes de quatre. Encore une fois, Geiser indique que ce résultat se trouvait déjà dans des travaux de Hesse, Salmon et Steiner, mais ne cite rien précisément.

L'article de Geiser sur le lien entre les vingt-huit tangentes doubles et les vingt-sept droites ayant été décrit en détail, passons à présent aux recherches de Jordan qui y correspondent.

2.4.2 Les « recherches algébriques » de Jordan sur le lien entre les vingt-huit tangentes doubles et les vingt-sept droites

Dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques*, le lien entre les vingt-huit tangentes et les vingt-sept droites est prouvé dans le §VI du chapitre des applications géométriques, consacré au problème des courbes d'ordre $n-3$ qui sont tangentes en $n(n-$

werden, welche man der Herren Aronhold, Clebsch, Hesse, Roch, Salmon und Steiner verdankt. Hier mögen nur zur Erläuterung einige Beispiele angeführt werden, die zum grössten Theil auf bekannte Resultate führen. »

3)/2 points à une courbe C donnée de degré n (le cas $n = 4$ correspondant aux tangentes doubles à une courbe quartique donnée).

Jordan commence par citer le mémoire *Ueber die Anwendung der Ablschen Functionen in der Geometrie*, [Clebsch 1864a], pour rappeler que

> La détermination des courbes de l'ordre $n-3$ qui touchent en $n(n-3)/2$ points une courbe donnée C d'ordre n dépend d'une équation de degré $2^{2p-1} - 2^{p-1}$, en posant pour abréger $p = (n-1)(n-2)/2$. Les racines de cette équation étant représentés par le symbole $(x_1 y_1 \dots x_p y_p)$, où $x_1, y_1, \dots, x_p, y_p$ sont des indices variables chacun de 0 à 1, et satisfaisant à la condition
>
> $$x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p \equiv 1 \mod 2,$$
>
> on aura le théorème suivant [...] :
>
> Soit μ un entier quelconque tel, que $\mu \dfrac{n-3}{2}$ soit entier : les points de contact de C avec les μ courbes correspondantes aux μ racines $(x'_1 y'_1 \dots x'_p y'_p), \dots, (x_1^{(\mu)} y_1^{(\mu)} \dots x_p^{(\mu)} y_p^{(\mu)})$ seront sur une même courbe du degré [72] μ, lorsque les $2p$ congruences contenues dans les formules suivantes :
>
> $$x'_\rho + \cdots + x_\rho^{(\mu)} \equiv y'_\rho + \cdots + y_\rho^{(\mu)} \equiv 0 \mod 2$$
>
> sont satisfaites à la fois. [Jordan 1870b, p. 329]

Ces relations géométriques étant rappelées, Jordan suit alors sa méthode générale en introduisant une fonction φ_μ adéquate : elle est obtenue en sommant tous les produits de μ racines satisfaisant aux conditions $x'_\rho + \cdots + x_\rho^{(\mu)} \equiv y'_\rho + \cdots + y_\rho^{(\mu)} \equiv 0$ du théorème cité précédemment.

Jordan passe ensuite au cas particulier où $n = 4$, pour lequel « on aura l'équation aux vingt-huit tangentes doubles de courbes du quatrième ordre », [Jordan 1870b, p. 330]. Il utilise $\mu = 4$, de sorte que la fonction des racines est (avec une notation actuelle)

$$\begin{aligned}\varphi_4 &= \sum_{\substack{x_\rho + x'_\rho + x''_\rho + x'''_\rho \equiv 0 \\ y_\rho + y'_\rho + y''_\rho + y'''_\rho \equiv 0 \\ \forall \rho \in \{1,2,3\}}} (x_1 y_1 \dots y_3)(x'_1 y'_1 \dots y'_3)(x''_1 y''_1 \dots y''_3)(x'''_1 y'''_1 \dots y'''_3) \\ &= (110000)(000011)(000111)(110100) + (110000)(000011)(001011)(111000) + \cdots\end{aligned}$$

Il regarde ensuite l'effet de l'adjonction à l'équation aux vingt-huit tangentes doubles de l'une de ses racines, (110000) : les racines restantes sont déterminées par une équation de degré 27 dont le groupe H est formé des substitutions de G qui fixent (110000). Ainsi, H laisse invariante la fonction φ'_4 formée des termes de φ_4 qui contiennent (110000) en facteur [73]. Une nouvelle fonction ψ invariable par H est obtenue en omettant ce facteur ; elle

72. Erreur dans le *Traité*, où il est écrit « du degré $(n-3)/2$ ».

73. En effet, si $\sigma \in H$, alors σ envoie un terme de φ_4 sur un terme de φ_4 puisque $\sigma \in G$. Comme de

est formée de la somme des produits de trois racines $(x_1 \dots y_3)$, $(x'_1 \dots y'_3)$, $(x''_1 \dots y''_3)$ telles que [74]

$$x_1 + x'_1 + x''_1 + 1 \equiv y_1 + y'_1 + y''_1 + 1 \equiv x_2 + x'_2 + x''_2 \equiv \cdots \equiv y_3 + y'_3 + y''_3 \equiv 0 \mod 2.$$

Jordan écrit alors :

> Cela posé, il est aisé de voir que ψ contient quarante-cinq termes et ne diffère que par la notation de la fonction φ du n° 441 [celle des vingt-sept droites]. [Jordan 1870b, p. 330]

Cette vérification, omise par Jordan, n'est en effet pas difficile à faire. En cherchant tous les symboles de racines vérifiant les congruences précédentes, on obtient alors une fonction ψ de la forme

$$\psi = (000011)(000111)(110100) + (000011)(001011)(111000) + \cdots,$$

qui correspond effectivement à la fonction φ associée aux vingt-sept droites,

$$\varphi = abc + ade + \cdots$$

Jordan déduit de cette identité entre φ et ψ que le groupe de « l'équation aux vingt-sept tangentes doubles » est contenu dans celui de l'équation aux vingt-sept droites [75].

Pour montrer l'égalité des deux groupes, Jordan montre que leurs ordres sont égaux. Or, Jordan a étudié dans le *Traité* ce qu'il appelle les « groupes de Steiner », dont le groupe des vingt-huit tangentes doubles est un cas particulier. Le cardinal de ce dernier est [76]

$$\mathcal{R}_3(\mathcal{R}_3 - 1)\, 2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5,$$

où $\mathcal{R}_3 = 2^{2\cdot 3-1} - 2^{3-1} = 28$. L'ordre du groupe des vingt-sept tangentes doubles est donc [77] $\mathcal{R}_3(\mathcal{R}_3 - 1)\, 2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5/28$, qui est égal à l'ordre du groupe de l'équation aux vingt-sept droites, à savoir $27 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4$. Finalement, Jordan a montré qu'en adjoignant à l'équation aux tangentes doubles une de ses racines, les vingt-sept racines restantes

plus σ fixe la racine (110000), elle envoie un terme de φ_4 qui contient (110000) sur un terme de φ_4 qui contient (110000). Donc σ laisse φ'_4 invariante.

74. Prendre $(x'''_1 y'''_1 x'''_2 y'''_2 x'''_3 y'''_3) = (110000)$ dans les conditions données précédemment.

75. Le groupe de « l'équation aux vingt-sept tangentes doubles », [Jordan 1870b, p. 330], est le groupe de l'équation aux vingt-huit tangentes doubles, réduit par adjonction d'une de ses racines. C'est donc le groupe H, ou plutôt le groupe $\tilde{H}$ obtenu en restreignant les substitutions de H à l'ensemble des racines exceptée (110000). Ce groupe est inclus dans le groupe de ψ par construction et le groupe de ψ est le même que celui de φ qui est le groupe des vingt-sept droites.

76. Voir [Jordan 1870b, p. 330]. Jordan montre par ailleurs que ces groupes de Steiner sont des groupes « abéliens », ce qui prouve que le groupe des vingt-huit tangentes doubles est isomorphe au groupe symplectique $\mathrm{Sp}_6(\mathbf{F}_2)$.

77. Cela découle de la transitivité du groupe aux vingt-huit tangentes doubles. Petite coquille dans le *Traité*, où il est écrit $(\mathcal{R}_3 - 1)\, 2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5/28$.

dépendent d'une équation de degré 27 ayant le même groupe que l'équation aux vingt-sept droites.

Jordan conclut alors par ces mots, déjà rapportés précédemment :

> Ainsi se retrouve entre le problème des vingt-sept droites et celui de doubles tangentes, le lien remarquable signalé par M. Geiser (*Mathematische Annalen*, t. I^er^). [Jordan 1870b, p. 330]

Ce lien entre les équations aux vingt-sept droites et aux vingt-huit tangentes doubles [78] trouve encore une application dans le *Traité*, puisqu'il permet à Jordan de montrer que l'équation aux vingt-huit tangentes doubles n'a pas de réduite de degré strictement inférieur à 28.

Petit bilan À l'issue de cette description de l'approche de Jordan, on pourra commencer par constater que le cloisonnement disciplinaire mettant Jordan d'un côté et Geiser de l'autre se confirme. En effet, à part dans les rappels qui précèdent la création de la fonction φ associée aux vingt-huit tangentes doubles — mais cela n'est d'ailleurs pas propre au lien entre ces tangentes et les vingt-sept droites —, l'approche de Jordan est basée uniquement sur des considérations de racines d'équations, sur des procédés d'adjonction et sur des identités de groupes. En outre, conformément à ce qui a été vu dans l'étude de l'équation aux vingt-sept droites, ce sont bien toujours des racines et des groupes de substitutions de racines qui sont en jeu dans le *Traité*. Pour ce qui est du lien de Geiser entre courbes quartiques et surfaces cubiques, nous pouvons le résumer comme étant une projection sur un plan du contour apparent de la cubique et de ses droites.

Les recherches de Jordan permettant, selon lui-même, de « retrouver » celles de Geiser, on aurait pu penser trouver dans les premières des traces de transferts explicites des secondes. Mais cela n'est pas le cas. En effet, il n'y a dans le *Traité* aucune traduction de morceaux de preuve de Geiser. Par exemple, chez Geiser, il y a une des vingt-huit tangentes qui a un statut particulier par rapport aux autres car elle n'est pas obtenue comme projection d'une des vingt-sept droites, mais Jordan ne fait pas de rapprochement avec son adjonction d'une racine à l'équation aux vingt-huit tangentes. Il ne met pas en non plus en évidence le fait que l'identité entre la fonction ψ qu'il obtient et la fonction φ associée aux vingt-sept droites traduit une identité de relations géométriques, à savoir que les vingt-sept tangentes doubles restantes se répartissent trois par trois de la même façon que les vingt-sept droites se répartissent trois par trois en triangles — ce qui est un résultat contenu dans la section V de Geiser.

L'absence de transfert effectif des travaux de Geiser dans ceux de Jordan montre donc un certain hiatus entre théorie des substitutions et géométrie. Pour affiner cette analyse,

78. Traduit en termes de groupes symplectiques, (voir la fin de la section 2.3.2 et la note 76), on obtient ainsi une injection entre groupes symplectiques $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_3) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_6(\mathbf{F}_2)$. Dieudonné indique quant à lui que « les liens connus entre le problème des 28 tangentes et celui des 27 droites apparaissent [...] comme reflétant l'isomorphisme exceptionnel entre $\mathrm{PU}_4^+(\mathbf{F}_4)$ et $\mathrm{PSp}_4(\mathbf{F}_3)$ », [Jordan *Œuvres 1*, p. XXIII].

passons au cas du lien entre les vingt-sept droites et les seize droites, pour lequel c'est maintenant Jordan qui précède chronologiquement Geiser.

2.4.3 La « conjecture » de Jordan sur la relation entre les vingt-sept droites et les seize droites

Le problème des seize droites des surfaces quartiques à conique double est traité dans le §III des « Applications géométriques » du *Traité*. Avant de voir comment Jordan les relie aux vingt-sept droites des surfaces cubiques, regardons brièvement ce qu'il fait de l'équation aux seize droites. Seul ce qui est utile pour comprendre le lien avec les vingt-sept droites sera expliqué ici.

Jordan réfère un article de Clebsch sur les surfaces quartiques à conique double, [Clebsch 1868], pour l'exposé des propriétés qui suivent. Une telle surface contient seize droites, et il existe cinq cônes, auxquels chacune des seize droites est tangente. Pour chaque cône, les seize droites se répartissent en huit couples de la façon suivante : il y a exactement quatre plans tangents au cône qui coupent la surface quartique en deux coniques dégénérées en paires de droites, qui forment lesdits couples. Les droites peuvent se noter $1, 2, \ldots, 16$, et ce qui vient d'être dit se résume sur le tableau suivant :

I	$2,6;$	$3,7;$	$4,8;$	$5,9;$	$1,16;$	$10,15;$	$11,14;$	$12,13$
II	$1,6;$	$3,10;$	$4,11;$	$5,12;$	$2,16;$	$7,15;$	$8,14;$	$9,13$
III	$1,7;$	$2,10;$	$4,13;$	$5,14;$	$3,16;$	$6,15;$	$8,12;$	$9,11$
IV	$1,8;$	$2,11;$	$3,13;$	$5,15;$	$4,16;$	$6,14;$	$7,12;$	$9,10$
V	$1,9;$	$2,12;$	$3,14;$	$4,15;$	$5,16;$	$6,13;$	$7,11;$	$8,10$

où sur une ligne sont écrites (par couples correspondant chacun à une conique dégénérée) les droites correspondantes à un des cinq cônes, et, toujours sur une ligne donnée, les droites d'un même plan tangent sont écrites à quatre cases d'intervalle. Par exemple, pour le cône I, les droites 2, 6, 1 et 16 sont dans un même plan tangent.

Suivant son mode opératoire, Jordan introduit une fonction φ qui est la somme de tous les produits de racines correspondant au tableau précédent (j'ajoute l'indice 16 à φ pour la distinguer de la fonction correspondante dans le cas des vingt-sept droites) [79] :

$$\varphi_{16} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 9 + \cdots + 5 \cdot 16 + 6 \cdot 13 + 7 \cdot 11 + 8 \cdot 10,$$

et Jordan montre que le groupe de l'équation X aux seize droites est inclus dans le groupe G_{16} des substitutions de $\{1, 2, \ldots, 16\}$ qui laissent φ_{16} invariante. Comme dans

79. Dans l'expression de φ_{16}, « 2 » par exemple est à lire comme étant le symbole de la racine de l'équation aux seize droites correspondant à la droite numérotée 2.

les autres cas, il ne fait aucune remarque sur l'inclusion réciproque.

Jordan introduit dix « fonctions partielles $a_1, b_1, \ldots, a_5, b_5$ », formées des quatre termes des lignes des deux blocs du tableau précédent. Par exemple,

$$a_1 = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 9 \qquad \text{et} \qquad b_1 = 1 \cdot 16 + 10 \cdot 15 + 11 \cdot 14 + 12 \cdot 13.$$

Il note Y l'équation de degré 10 dont dépendent ces quantités. Jordan introduit également les substitutions

$$A = (2,1)(10,7)(11,8)(12,9) \qquad A_1 = (6,7)(14,12)(13,11)(3,2)$$
$$A_2 = (7,8)(10,11)(4,3)(14,15) \qquad A_3 = (8,9)(11,12)(13,14)(5,4)$$
$$B = (9,16)(4,10)(2,13)(3,11)(5,1)(6,12)(7,14)(8,15)$$
$$B_1 = (12,16)(4,7)(1,13)(3,8)(5,2)(6,9)(19,14)(11,15)$$
$$B_2 = (14,16)(4,6)(1,11)(2,8)(5,3)(7,9)(10,12)(13,15)$$
$$B_3 = (15,16)(3,6)(1,10)(2,7)(5,4)(8,9)(11,12)(13,14)$$

ainsi que

$$\mathscr{A} = (a_1\ a_2)(b_1\ b_2), \quad \mathscr{A}_1 = (a_2\ a_3)(b_2\ b_3), \quad \mathscr{A}_2 = (a_3\ a_4)(b_3\ b_4), \quad \mathscr{A}_3 = (a_4\ a_5)(b_4\ b_5)$$
$$\mathscr{B} = (a_1\ b_1)(a_5\ b_5), \quad \mathscr{B}_1 = (a_2\ b_2)(a_5\ b_5), \quad \mathscr{B}_2 = (a_3\ b_3)(a_5\ b_5), \quad \mathscr{B}_3 = (a_4\ b_4)(a_5\ b_5)$$

dont il montre qu'elles engendrent respectivement le groupe de X et le groupe de Y. Enfin, il montre que ces deux groupes sont de même ordre $16 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.

Passons maintenant au lien entre les seize droites et les vingt-sept droites. Comme on l'a déjà vu, il est énoncé sans démonstration au dernier numéro de la section sur les surfaces cubiques :

> Supposons que l'on s'adjoigne une des racines de l'équation aux vingt-sept droites, telle que a. Il restera une équation de degré 26, dont le groupe est dérivé des substitutions B, C, D, E, F. Ce groupe n'étant pas transitif, l'équation se décompose en deux facteurs rationnels, du seizième et du dixième degré. On voit sans peine que ces équations partielles ont les mêmes groupes que les équations X et Y du §III. [Jordan 1870b, p. 329]

Je propose d'en reconstruire ici une démonstration calquée sur la démarche déployée par Jordan pour le lien entre l'équation aux vingt-huit tangentes doubles et celle aux vingt-sept droites. Cette reconstruction aura pour but de montrer que ce théorème admet une preuve qui ne dépend pas des travaux de Geiser, au contraire de celle proposée par van der Waerden pour l'inclusion réciproque du groupe de φ dans groupe de l'équation aux vingt-sept droites (cf. *supra*). Par ailleurs, si je m'autoriserai à utiliser quelques symboles et termes anachroniques, je prendrai garde à ne pas mélanger le vocabulaire de la théorie des substitutions et de la géométrie. Ce cloisonnement, que j'ai déjà souligné à plusieurs reprises, me semble en effet important à respecter pour maintenir la tension existant entre théorie des substitutions et géométrie. Cependant, et justement pour marquer cette tension et montrer ce que Jordan ne dirait probablement *pas*, je profiterai de cette reconstruction pour proposer çà et là, en notes de bas de pages, des interprétations géométriques au sens donné précédemment.

Notons ainsi E_{26} l'équation obtenue à partir de l'équation aux vingt-sept droites par adjonction de sa racine a. Son groupe G_{26} est formé des substitutions de G, groupe de l'équation aux vingt-sept droites, qui fixent [80] a. Il contient donc le groupe $\langle B, C, D, E, F\rangle$ engendré par B, C, D, E et F, puisque ces dernières fixent toutes a. Or $\#G_{26} = \#G/27$ car G agit transitivement, et vu ce qui a été fait en 2.3.2, $\#\langle B, C, D, E, F\rangle \geqslant 10 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 2$. Cette dernière borne étant égale à $\#G/27$, on en déduit l'égalité $G_{26} = \langle B, C, D, E, F\rangle$ annoncée par Jordan.

Pour voir que G_{26} n'est pas transitif, on peut par exemple chercher quelles sont les orbites de son action sur les vingt-six racines $b, c, \ldots, u'$. Grâce aux expressions de B, C, D, E et F, on obtient aisément deux orbites, formées respectivement de 10 et de 16 éléments [81] :

$$\omega_{10} = \{b, c, d, e, f, g, h, i, k, l\} \qquad \text{et} \qquad \omega_{16} = \{m, n, p, q, r, s, t, u, m', n', p', q', r', s', t', u'\}.$$

Cela montre que G_{26} n'est pas transitif. En outre, si l'on pose

$$E_{10} = \prod_{\xi \in \omega_{10}} (x - \xi) \qquad \text{et} \qquad E_{16} = \prod_{\xi \in \omega_{16}} (x - \xi),$$

alors on a $E_{26} = E_{10}E_{16}$, et chacun des facteurs E_{10} et E_{16}, étant invariant sous l'action de G_{26}, est bien rationnel. Il reste à voir pourquoi ces facteurs ont mêmes groupes que les équations X et Y issues des seize droites.

En s'inspirant de ce que Jordan fait pour les vingt-huit tangentes doubles, introduisons

$$\varphi' = mn + pq + rs + tu + \cdots + nt' + um' + rq' + ps',$$

dont les quatre premiers termes correspondent aux paires de racines de ω_{16} qui forment avec b un terme dans la fonction φ associée aux vingt-sept droites [82], les quatre suivants aux paires de racines de ω_{16} associées à c dans φ, etc. — on peut par exemple utiliser la

80. *Géométriquement*, le groupe G peut s'interpréter comme un groupe de transformations permutant les vingt-sept droites entre elles et conservant leurs relations d'incidence. Le groupe G_{26} en est alors le sous-groupe qui laisse fixe la droite a.

81. *Géométriquement*, ces orbitent correspondent respectivement aux droites incidentes à a et à celles qui ne lui sont pas incidentes.

82. *Géométriquement*, il s'agit des paires de droites de ω_{16} qui sont incidentes à b.

liste des termes de φ donnée à la section 2.3.1 afin de trouver tous les termes de φ'. Le groupe de φ' contient alors le groupe de E_{16}. En effet, tout élément σ du groupe de E_{16} provient d'une substitution $\tilde{\sigma}$ appartenant au groupe de E_{26} ; autrement dit, $\tilde{\sigma}$ coïncide avec σ sur $\{m, n, \ldots, u'\}$ et induit une certaine permutation de $\{b, c, \ldots, l\}$. Regardons par exemple l'image de mn par σ. Comme $\tilde{\sigma}$ est dans le groupe de E_{26}, le produit $\tilde{\sigma}(b)\sigma(m)\sigma(n)$ apparaît[83] dans φ. Or, puisque $\tilde{\sigma}(b) \in \{b, c, \ldots, l\}$, le produit $\sigma(m)\sigma(n)$ est un terme φ', par construction même de celle-ci. D'où l'inclusion annoncée.

On remarque alors que les fonctions φ' et φ_{16} sont identiques à la notation près, la correspondance de la notation des racines étant donnée par le tableau suivant :

$2, 6;$	$3, 7;$	$4, 8;$	$5, 9;$	$1, 16;$	$10, 15;$	$11, 14;$	$12, 13$
m, n	q, p	s, r	u, t	n', m'	q', p'	s', r'	u', t'
$1, 6;$	$3, 10;$	$4, 11;$	$5, 12;$	$2, 16;$	$7, 15;$	$8, 14;$	$9, 13$
n', n	q, q'	s, s'	u, u'	m, m'	p, p'	r, r'	t, t'
$1, 7;$	$2, 10;$	$4, 13;$	$5, 14;$	$3, 16;$	$6, 15;$	$8, 12;$	$9, 11$
n', p	m, q'	s, t'	u, r'	q, m'	n, p'	r, u'	t, s'
$1, 8;$	$2, 11;$	$3, 13;$	$5, 15;$	$4, 16;$	$6, 14;$	$7, 12;$	$9, 10$
n', r	m, s'	q, t'	u, p'	s, m'	n, r'	p, n'	t, q'
$1, 9;$	$2, 12;$	$3, 14;$	$4, 15;$	$5, 16;$	$6, 13;$	$7, 11;$	$8, 10$
n', t	m, u'	q, r'	s, p'	u, m'	n, t'	p, s'	$r, q'.$

Par conséquent, φ_{16} et φ' ont même groupe et donc le groupe de E_{16} est inclus dans le groupe de φ_{16}. De même, en introduisant

$$\varphi'' = bc + de + fg + hi + kl,$$

on montre que le groupe de E_{10} est inclus dans le groupe de $\varphi_{10} = a_1b_1 + \cdots + a_5b_5$, la

83. *Géométriquement*, les droites $\tilde{\sigma}(b)$, $\sigma(m)$ et $\sigma(n)$ forment un triangle.

correspondance des notations étant cette fois donnée par

$$\begin{array}{cccccccccc} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 & a_4 & b_4 & a_5 & b_5 \\ b & c & d & e & f & g & h & i & k & l. \end{array}$$

Pour montrer que toutes ces inclusions sont en fait des égalités, on va montrer que toutes les substitutions des groupes de φ_{10} et de φ_{16} se retrouvent dans les groupes de E_{10} et E_{16} respectivement.

Pour le groupe de E_{10} par exemple : le groupe de φ_{10} est engendré par les substitutions $\mathscr{A}, \mathscr{A}_1, \dots, \mathscr{B}_3$ décrites précédemment. Prenons $\mathscr{A} = (a_1\ a_2)(b_1\ b_2)$, et définissons en conséquence $\tilde{\mathscr{A}} = (b\ d)(c\ e)$. On vérifie facilement que cette substitution $\tilde{\mathscr{A}}$ (sur $\{b, c, \dots, l\}$) provient de la substitution $BC^2B \in G_{26}$. De même, on peut voir que la substitution $\tilde{\mathscr{B}} = (b\ c)(k\ l)$, correspondant à $\mathscr{B}$, provient de $BE^2DB^2DE^2$. Avec des vérifications similaires, on voit que le groupe $\langle \tilde{\mathscr{A}}, \dots, \tilde{\mathscr{B}}_3 \rangle$ est contenu dans le groupe de E_{10}. Mais $\langle \tilde{\mathscr{A}}, \dots, \tilde{\mathscr{B}}_3 \rangle$ est clairement isomorphe à $\langle \mathscr{A}, \dots, \mathscr{B}_3 \rangle$ qui est le groupe de φ_{10}.

Finalement, le groupe de E_{10} est égal au groupe de φ_{10}, qui est égal au groupe de l'équation Y. On montre de même que le groupe de E_{16} est égal au groupe de l'équation aux seize droites X, ce qui achève la reconstruction de la preuve de Jordan.

2.4.4 Les « considérations géométriques » de Geiser sur le lien entre les vingt-sept droites et les seize droites

L'article de Geiser sur les surfaces quartiques à conique double, [Geiser 1869c], est divisé en cinq sections numérotées en chiffres romains. Il début par une courte introduction, essentiellement constituée de ce qui a été cité plus haut, où est entre autres annoncée les « considérations géométriques » permettant de voir le lien entre les seize droites et les vingt-sept droites. La fin de l'introduction annonce en outre que ce lien est établi de deux manières différentes, ce qui correspond respectivement aux sections I et II, et aux sections III et IV. Dans la dernière section, Geiser expose quelques propriétés supplémentaires dans le cas où la conique double de la quartique est le « cercle imaginaire à l'infini ». N'étant pas en rapport avec le lien entre les vingt-sept droites et les seize droites, je ne parlerai pas de ces propriétés supplémentaires. D'ailleurs, Geiser lui-même rappelle à la fin de son article que celui-ci consiste surtout en la « confirmation de la conjecture » de Jordan [84].

Première démonstration : représentations de surfaces sur un plan

La première démonstration de Geiser utilise la théorie des représentations de surfaces sur un plan, et plus particulièrement les représentations des surfaces cubiques et des surfaces quartiques à conique double. Avant d'entrer dans les détails de la démarche de Geiser,

84. Voir la note 53.

expliquons brièvement en quoi consiste cette théorie, en prenant pour exemple la représentation des surfaces cubiques sur un plan.

Dans un mémoire intitulé *Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung*, [Clebsch 1866], Clebsch avait montré le résultat suivant :

> À chaque point du plan correspond en général un point de la surface et réciproquement ; sont exceptés seulement six points du plan, auxquels ne correspondent pas des points de la surface, mais des droites [85]. [Clebsch 1866, p. 361]

La correspondance dont parle Clebsch est justement la représentation de la surface sur un plan. En termes plus actuels, il s'agit donc d'une application birationnelle entre le plan (projectif) et la surface cubique [86]. Pour expliquer cela, voyons comment Clebsch avait construit cette représentation.

Rappelons d'abord qu'une *gerbe de plans* est l'ensemble des plans de l'espace passant par un point donné, appelé le *sommet* de la gerbe. Comme Clebsch, notons $a = 0$ une équation de plan, étant sous-entendu que a est une forme linéaire non nulle en les quatre coordonnées homogènes de l'espace x_1, x_2, x_3, x_4 — l'équation du plan s'écrit donc aussi $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$. Maintenant, si p est un point de l'espace donné comme l'intersection de trois plans $a = 0$, $b = 0$ et $c = 0$, alors les plans de la gerbe de somme p sont les plans ayant une équation de la forme $\chi a + \lambda b + \mu c = 0$, avec $(\chi : \lambda : \mu) \in E = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ quelconque. Si on se donne trois gerbes de plans, définies respectivement par $a = b = c = 0$, $a' = b' = c' = 0$ et $a'' = b'' = c'' = 0$, on dit qu'elles sont *projectives* entre elles lorsqu'on associe (arbitrairement) un à un les plans qui les définissent. Autrement dit, on fixe une paramétrisation

$$\Lambda = (\chi : \lambda : \mu) \in E \mapsto (\chi a + \lambda b + \mu c : \chi a' + \lambda b' + \mu c' : \chi a'' + \lambda b'' + \mu c'')$$

qui décrit simultanément les trois gerbes.

Revenons à la représentation des cubiques. Renvoyant à [Schröter 1863], Clebsch se basait sur le fait qu'une surface cubique F_3 peut être décrite comme le lieu d'intersection

85. « Jedem Punkt der Ebene entspricht also im Allgemeinen ein Punkt der Fläche und umgekehrt; ausgenommen sind davon nur sechs Punkten der Ebene, denen nicht Punkte der Fläche entsprechen, sondern Gerade [*sic*] ».

86. Considérons une surface cubique F_3 et une application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) & \longrightarrow & F_3 \\ (x_1 : x_2 : x_3) & \longmapsto & (f_1(x_1 : x_2 : x_3) : f_2(x_1 : x_2 : x_3) : f_3(x_1 : x_2 : x_3) : f_4(x_1 : x_2 : x_3).) \end{array}$$

On dit que c'est une *application rationnelle* s'il elle est définie partout sauf éventuellement un sous-ensemble « pas trop gros » de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et si les f_i sont rationnelles en les coordonnées x_i ; on note alors $f : \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \dashrightarrow F_3$. S'il existe $g : F_3 \dashrightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ qui est l'application réciproque de f (sur les bons ensembles de définition), on dit que f est une *application birationnelle*. La représentation de la surface cubique sur le plan peut être interprétée comme un éclatement du plan projectif en six points en position générale : l'ensemble « pas trop gros » enlevé à $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ consiste en ces six points, et celui enlevé à F_3 consiste en six droites. Voir par exemple [Hartshorne 1977, p. 401].

de trois gerbes projectives de plans. Avec les notations précédentes, un point x de coordonnées $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ appartient à l'intersection de trois gerbes projectives s'il existe un (unique) Λ tel que $x_1, \ldots, x_4$ sont les solutions du système [87]

$$(S_\Lambda) \begin{cases} \chi a & + & \lambda b & + & \mu c & = & 0 \\ \chi a' & + & \lambda b' & + & \mu c' & = & 0 \\ \chi a'' & + & \lambda b'' & + & \mu c'' & = & 0. \end{cases}$$

Cela permet ainsi de définir une application $x \in F_3 \mapsto \Lambda = (\chi : \lambda : \mu) \in E$, rationnelle car χ, λ, μ s'expriment rationnellement en fonction des x_i (et des coefficients de $a, \ldots, c''$).

Réciproquement, Clebsch avait procédé comme suit. On se donne un Λ et on considère le système (S_Λ), d'inconnue $x_1, \ldots, x_4$, et dont on note $f_1(\chi, \lambda, \mu), \ldots, f_4(\chi, \lambda, \mu)$ les déterminants de taille 3×3 extraits. Si les $f_i(\chi, \lambda, \mu)$ sont non tous nuls, alors le système est de rang 3 et on peut utiliser les formules de Cramer pour le résoudre : il existe un facteur ρ tel que

$$(*) \begin{cases} \rho x_1 = f_1(\chi, \lambda, \mu) \\ \rho x_2 = f_2(\chi, \lambda, \mu) \\ \rho x_3 = f_3(\chi, \lambda, \mu) \\ \rho x_4 = f_4(\chi, \lambda, \mu). \end{cases}$$

Cela donne ainsi une application $\Lambda \mapsto x = (f_1(\Lambda) : \cdots : f_4(\Lambda)) \in F_3$, définie partout sauf en les Λ qui annulent simultanément les f_i. Cette application est rationnelle en Λ et est, par construction, réciproquement de celle construite *supra*.

Clebsch avait encore montré que les points $\Lambda \in E$ qui annulent simultanément les f_i sont au nombre de six, sont situés en position générale, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas situés sur une même conique et qu'ils sont trois à trois non alignés. Ces points sont les *points exceptionnels* de la représentation. Il avait en outre fait remarquer que, pour ces points exceptionnels, le système (S_Λ) définissait non pas un point, mais une droite de l'espace [88], et donc contenue dans la surface F_3.

Le but de Clebsch avait été d'utiliser cette représentation d'une surface cubique sur un plan pour étudier ce qu'il appelait la « géométrie sur la surface », c'est-à-dire l'étude de courbes tracées sur cette surface, avec leur points remarquables, leurs intersections,

87. Le système a bien pour inconnues $x_1, \ldots, x_4$ qui n'apparaissent pas dans la notation adoptée ici. Par exemple, la première ligne peut également s'écrire

$$\chi(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4) + \lambda(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4) + \mu(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4) = 0.$$

88. Cela découle du fait que le rang du système est alors 2. En effet, il est strictement inférieur à 3 puisque tous les déterminants 3×3 extraits son nuls. S'il était de rang 1, il y aurait tout un plan inclus dans la surface cubique, hypothèse qu'on écarte en supposant cette dernière lisse.

etc. Le principe était de voir comment se transformaient les courbes du plan projectif par l'application birationnelle de la représentation. Plus précisément, Clebsch avait montré que si une courbe plane de degré n passe par les points fondamentaux avec des multiplicités $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$, alors son image est une courbe de l'espace (incluse dans la cubique) de degré $N = 3n - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_6)$.

Revenons à l'article de Geiser sur les surfaces quartiques à conique double, [Geiser 1869c]. En citant le mémoire de Clebsch sur la géométrie des surfaces cubiques, [Clebsch 1866], Geiser résume dans la section I les résultats que nous venons de présenter :

1. En général, à chaque point de F_3 correspond un unique point de E, et réciproquement.
2. Dans E, il y a six points $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ en position générale[89] tels qu'à chacun d'eux correspond une droite contenue dans la cubique F_3.
3. À une courbe C_n incluse dans E et passant α_1 fois par σ_1, α_2 fois par σ_2, etc., correspond une courbe gauche C_N de degré $N = 3n-(\alpha_1+\cdots+\alpha_6)$, incluse dans F_3, et rencontrant α_1 fois la droite correspondant à σ_1, α_2 fois la droite correspondant à σ_2, etc.

En citant ensuite l'article de Clebsch sur les surfaces quartiques que nous avons déjà rencontré, [Clebsch 1868], Geiser donne de façon analogue les propriétés caractéristiques de la représentation d'une surface quartique à conique double F_4 sur un plan E :

1. En général, à chaque point de la surface F_4 correspond un unique point de E, et réciproquement.
2. À chaque point de la conique double C_2 de la quartique correspond un couple de points de E.
3. Dans E, il y a cinq points $s_1, \ldots, s_5$ en position générale[90] tels qu'à chacun d'eux correspond une droite contenue dans la quartique F_4.
4. À une courbe C_n incluse dans E et passant a_1 fois par s_1, a_2 fois par s_2, etc., correspond une courbe gauche C_N de degré $N = 3n-(a_1+\cdots+a_5)$, incluse dans F_4, et rencontrant a_1 fois la droite correspondant à s_1, a_2 fois la droite correspondant à s_2, etc.

Ces propriétés ayant été rappelées, Geiser indique ensuite comment il est possible d'associer une surface cubique à une surface quartique à conique double. Il s'agit d'abord de représenter la quartique sur un plan E avec cinq points fondamentaux $s_1, \ldots, s_5$. Ces cinq

89. Je traduis ainsi l'expression « In E liegen sechs ausgezeichnete, ihrer Lage nach von einander unabhängige Punkte $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ ».

90. Ici, cela signifie que les points s_i sont trois à trois non alignés.

points, plus un sixième, permettent alors de définir une surface cubique par représentation. Afin de mettre en correspondance les droites de ces surfaces, Geiser détaille, dans la section II de [Geiser 1869c], leur provenance dans chacune des deux représentations [91]. Ainsi, les vingt-sept droites de la surface cubique consistent en :

1. les six droites $\gamma_1, \ldots, \gamma_6$ correspondant aux points $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$,

2. les quinze droites $\lambda_{\mu\nu}$ correspondant aux droites $\sigma_\mu\sigma_\nu$,

3. les six droites $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_6$ correspondant aux coniques passant par cinq des six points fondamentaux $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ (notées avec la convention que Γ_k correspond à la conique passant par les points autres que σ_k) ;

tandis que les seize droites des surfaces quartiques à conique double consistent en :

1. les cinq droites $g_1, \ldots, g_5$ correspondant aux points $s_1, \ldots, s_5$,

2. les dix droites l_{mn} correspondant aux droites $s_m s_n$,

3. la droite G_6 correspondant à la conique passant par les cinq points $s_1, \ldots, s_5$.

Cela permet à Geiser d'associer ces droites entre elles comme ceci :

$$\begin{array}{ccccc} g_1, \ldots, g_5 & ; & l_{12}, \ldots, l_{45} & ; & G_6 \\ \gamma_1, \ldots, \gamma_5 & ; & \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{45} & ; & \Gamma_6 \end{array}$$

et d'énoncer le résultat suivant : il est possible d'associer aux seize droites du F_4, seize des vingt-sept droites du F_3, dès lors que ces seize-là sont les seize restantes quand, parmi les vingt-sept, on en sélectionne une puis on l'élimine ainsi que les dix qui lui sont incidentes (par exemple γ_6 et $\lambda_{16}, \ldots, \lambda_{56}, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_5$). Geiser fait encore remarquer que les relations d'incidence entre les seize droites issues d'une surface ou de l'autre sont les mêmes [92].

Enfin, dans le dernier paragraphe du II, Geiser prouve que la conique double de la surface quartique devient, par la transformation issues des deux représentations, une courbe quartique gauche incluse dans la surface cubique.

91. Par exemple, pour les surfaces cubiques, il y a déjà les six droites correspondant à chaque σ_i vu la propriété 1 de la représentation. La propriété 3 permet de trouver les autres, qui sont des C_N avec $N = 1$: il s'agit donc de trouver des courbes C_n qui correspondent à un C_1. Il y en a quinze qui correspondent à $n = 1$ et pour lesquelles deux des α valent 1 et les autres 0 : ce sont les droites joignant les σ_i deux à deux. Il y en a six qui correspondent à $n = 2$ et pour lesquelles tous les α valent 1, sauf un qui est nul : ce sont les coniques passant par cinq des σ_i sauf un. On obtient ainsi les vingt-sept droites.

92. Une interprétation (que Geiser ne fait pas) est que le groupe de l'équation aux seize droites est identique à celui de l'équation de degré 16 obtenue en adjoignant une de ses racines à l'équation aux vingt-sept droites. Voir également la note 99.

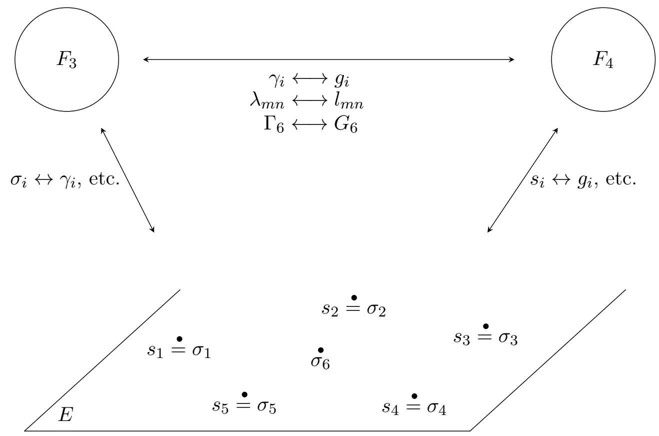


FIGURE 2.5 – Les représentations des surfaces F_3 et F_4 sur le même plan E, en faisant coïncider les points-base.

Seconde démonstration : généralisation du principe des rayons réciproques

Geiser passe ensuite, dans la section III, à la seconde démonstration du lien entre les droites des surfaces cubiques et des surfaces quartiques à conique double est présentée par Geiser comme

> [une] application d'une correspondance du second degré, qui est une généralisation du principe des rayons réciproques [93]. [Geiser 1869c, p. 252]

Les idées de cette correspondance sont exposées dans la section III : étant donnés une surface quadrique F_2 et un point P, on associe à tout point p de l'espace le point p' défini comme étant le quatrième harmonique [94] à p, s_1 et s_2, où ces derniers points s_1 et s_2 sont les points d'intersection de la droite Pp avec F_2 (voir la figure 2.6).

Geiser indique que l'application ainsi définie est en général univoque et réciproque (« eindeutig und reciprok »), avec deux cas exceptionnels : au point P lui-même est associé le plan polaire [95] E de P par rapport à F_2, et à un point p de la conique C_2 intersection

93. « [eine] Anwendung einer geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades, welche eine Verallgemeinerung des Princips der reciproken Radien ist ». Geiser indique en référence [Geiser 1866]. Quant au principe des rayons réciproques, en voici l'idée (telle qu'elle est exposée dans [Geiser 1869a]) : dans un plan sont donnés un cercle K de centre M et un point p. On note P la polaire de p par rapport à K, c'est-à-dire la droite joignant les deux points de contact des deux tangentes à K menées par p. Il s'agit alors d'associer à p le point p' défini comme étant l'intersection des droites P et Mp. Le principe permet donc de définir une transformation du plan ; sa « généralisation » présentée par Geiser consiste à se placer dans l'espace et à remplacer le cercle par une surface quadrique.

94. Étant donnés quatre points alignés p', p, s_1, s_2, leur *rapport anharmonique*, ou *birapport*, est la quantité définie par $\overline{p'p}/\overline{p's_1} : \overline{s_2p}/\overline{s_2s_1}$. Lorsque ce birapport est égal à -1, on dit que p', p, s_1, s_2 forment une *division harmonique* ; p' est alors le *quatrième harmonique* à p, s_1 et s_2.

95. Le *plan polaire* de P par rapport à F_2 est le plan contenant la conique formée de tous les points M de F_2 tels que la droite PM est tangente à F_2. Avec des équations : si F_2 est donné par l'annulation d'une forme quadratique $q(x, y, z, w) = 0$, alors le plan polaire de P par rapport à F_2 a pour équation $B(P, X) = 0$, où l'on a noté B la forme polaire de q et $X = (x, y, z, w)$.

de E et F_2 est associée la droite pP.

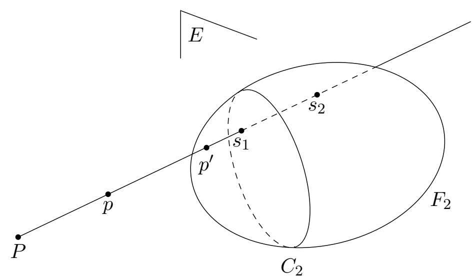


FIGURE 2.6 – Généralisation du principe des rayons réciproques.

Sont ensuite énoncées les règles de correspondance des courbes et des surfaces par cette transformation. Ainsi, à une courbe gauche C_n qui rencontre a fois C_2 et passe b fois par P, correspondent :

1. le plan E compté b fois,
2. un système de a arêtes du cône K_2 de sommet P et de base C_2,
3. une courbe gauche $C'_{2n-(a+b)}$ qui rencontre C_2 en $2n-(a+2b)$ points et passe $n-a$ fois par P.

Et à une surface F_n contenant a fois le point P et contenant b fois la conique C_2 correspondent :

1. le plan E compté a fois,
2. le cône K_2 compté b fois,
3. une surface $F'_{2n-(a+2b)}$ qui contient $(n-2b)$ fois le point P et $n-(a+b)$ fois la conique C_2.

Dans la section IV, Geiser applique ensuite cette transformation au problème des surfaces quartiques à conique double. Il considère donc une telle surface F_4, note E le plan contenant la conique double C_2 et considère un point P situé sur F_4 mais pas sur C_2. Le cône K_2 de sommet P et de base C_2 définit, avec le plan E compté double, un faisceau de quadriques. Geiser considère alors une des quadriques de ce faisceau (différente de C_2 et de E) qu'il note F_2 et qui va servir à la correspondance décrite précédemment. Les règles de transformation indiquent alors qu'à la surface F_4 correspondent[96] :

1. le plan E compté une fois,

96. Il suffit d'appliquer la règle de transformation des surfaces avec $n=4$, $a=1$ et $b=2$, ce qui traduit que la surface quartique contient P et C_2 comme conique double.

2. le cône K_2 compté deux fois,

3. une surface cubique F_3' contenant C_2 une fois mais ne contenant pas P ;

Et à une surface cubique quelconque F_3' contenant une fois C_2 mais ne contenant pas P correspondent [97] :

1. le cône K_2 compté une fois,

2. une surface quartique F_4 avec C_2 comme conique double.

Cette transformation permet ainsi d'associer un point de F_3' à un point de F_4, et réciproquement, à quelques cas exceptionnels près. Par exemple, à P correspond, sur F_3', l'intersection de E avec F_3', c'est-à-dire la conique C_2 et une droite γ_6. Geiser obtient ainsi une application de F_4 sur F_3'.

Enfin, Geiser s'occupe des droites des surfaces. En concordance avec ses notations antérieures, il note $\gamma_1, \ldots, \gamma_5$; $\lambda_{12}, \ldots, \lambda_{45}$; Γ_6 les droites de la surface cubique F_3' qui ne rencontrent pas γ_6. Ces droites rencontrent nécessairement C_2, donc leur image par la correspondance est à chaque fois une droite [98] de la surface F_4. Celles-ci sont notées $g_1, \ldots, g_5$; $l_{12}, \ldots, l_{45}$; G_6 et Geiser indique à nouveau que les relations d'incidence de ces seize droites sont les mêmes que pour les seize droites du F_3' auxquelles elles correspondent [99].

En conclusion, Geiser fait une remarque comparative entre les deux correspondances entre surfaces cubiques et surfaces quartiques à conique double qu'il a présentées : pour lui, les deux coïncident, mais

> la seconde est une représentation plus directe, car elle met tout simplement F_4 et F_3' en perspective par rapport à P. Cette seconde [correspondance] est ainsi préférable pour déduire les propriétés du F_4 à partir de celles du F_3' [100]. [Geiser 1869c, p. 255]

À titre de suggestion, Geiser indique que la seconde transformation serait ainsi utile pour étudier la réalité des éléments de la surface quartique, en se basant sur les résultats connus concernant les surfaces cubiques — pour ces résultats, Geiser renvoie aux travaux de R. Sturm et de Cremona qui ont déjà été décrits au chapitre précédent, [Sturm 1867 ; Cremona 1868].

---

97. Le résultat qui suit s'obtient en appliquant la règle de transformation avec $n = 3$, $a = 0$ et $b = 1$.

98. Geiser ne justifie pas ces affirmations. Pour la première, on remarquer que si γ est une des droites considérées, son point d'intersection avec E est inclus dans $E \cap F_3' = C_2 \cup \gamma_6$; mais comme γ et γ_6 sont disjointes, ce point d'intersection appartient nécessairement à C_2. Pour déterminer ensuite l'image de γ sur F_4, il suffit d'appliquer la règle de transformation des courbes en prenant $n = 1$, $a = 1$ et $b = 0$ (remarquer que γ ne contient pas le point P car F_3' ne le contient pas).

99. À nouveau, cette remarque sur la concordance des relations d'incidence peut s'interpréter au niveau des groupes de Galois.

100. « Die zweite derselben eine directere ist, indem durch sie F_4 und F_3' in Bezug auf P geradezu perspectivisch aufeinander bezogen sind. Diese zweite wird darum vorzugsweise geeignet sein, die Eigenschaften der F_4 aus denen der F_3' abzuleiten. »

Bilan Des conclusions analogues à celles de la situation des vingt-huit tangentes peuvent être tirées ici. Le premier point concerne la démarcation disciplinaire entre Jordan et Geiser : comme précédemment, le premier ne parle que de racines, d'adjonction et de groupes, tandis que le second met avant des transformations de l'espace — sans d'ailleurs parler de groupes de transformations — et recherche comment elles agissent sur les droites de l'une ou l'autre des surfaces.

On constate de plus qu'il n'y a pas non plus de transfert effectif opéré depuis l'approche de Jordan vers celle de Geiser. À nouveau, l'adjonction d'une racine n'a pas été interprétée comme la sélection d'une droite particulière. Par ailleurs, Geiser a bien mis en évidence le fait que parmi les vingt-sept droites d'une surface cubique, on peut en mettre seize en rapport avec les seize droites des surfaces quartiques à conique double lorsque ce sont les seize qui ne sont pas incidentes à une droite donnée. Mais il n'a pas relié cela à la factorisation de l'équation aux vingt-sept droites après adjonction d'une de ses racines. Enfin, et malgré le soin qu'il a apporté à vérifier par deux fois que les relations d'incidence entre les seize droites des surfaces quartiques et celles des surfaces cubiques sont identiques, Geiser n'a pas proposé d'interprétation en terme d'égalité de groupes.

Il est intéressant de noter que dans son *Programme d'Erlangen* écrit trois ans après l'article de Geiser, Felix Klein évoque entre autres la « géométrie des rayons réciproques » et la « géométrie des transformations rationnelles [101] », et il est possible pour nous de voir que les deux démonstrations de Geiser sur le lien entre les seize droites et les vingt-sept droites se rapportent respectivement à l'une et à l'autre. Mais Klein précise aussi que la théorie des transformations rationnelles n'est, au moment où il écrit, pas encore assez développée pour qu'il puisse donner davantage que des « principes » d'une géométrie des transformations rationnelles [102]. En particulier, aucun lien n'est fait entre cette géométrie et celle des rayons réciproques.

Que ce soit par les représentations de surfaces sur un plan ou par sa généralisation du principe des rayons réciproques, Geiser a lié les surfaces cubiques et les surfaces quartiques à conique double par des transformations de l'espace. Ces transformations envoient les seize droites des quartiques sur seize des droites des surfaces cubiques de la façon que nous avons déjà décrite : parmi les vingt-sept droites d'une cubique, 16 droites qui ne sont pas incidentes à une droite donnée peuvent être mises en correspondance avec les seize droites d'une surface quartique à conique double, et cette correspondance conserve les relations d'incidence.

101. Respectivement : « Die Geometrie der reciproken Radien » et « eine Geometrie der rationalen Umformungen », [Klein 1872, p. 20 et p. 29], traduits en « la géométrie des rayons vecteurs réciproques » et « une géométrie des transformations rationnelles » dans [Klein 1974, p. 18 et p. 27].

102. « Dans l'espace, toute la théorie ne fait encore que naître. On ne connaît jusqu'ici qu'un petit nombre de transformations rationnelles, et on les utilise pour attacher par représentation des surfaces inconnues à des surfaces connues. » [Klein 1974, p. 28].

2.4.5 Un hiatus

J'étais resté, avant de commencer la description mathématique des preuves de Jordan et de Geiser, à une double constatation. Les propos de ces derniers montraient d'une part qu'ils concevaient leurs approches comme bien distinctes au niveau disciplinaires, celle de Jordan relevant de la théorie des substitutions, celle de Geiser relevant de la géométrie. Ils annonçaient également un va-et-vient entre leurs travaux, entretenu par des relations d'inspiration, de prévision et de confirmation.

J'ai déjà souligné la nette démarcation des objets et techniques utilisées de part et d'autre. Ainsi, chez Jordan, les objets qui sont au cœur du lien entre les différentes configurations de droites sont les équations algébriques qui y sont associées, et le moyen de passer de l'une à l'autre consiste en des adjonctions de racines et en des identités de groupes. Chez Geiser, les objets sont les droites elles-mêmes ; elles sont mises en correspondance *via* diverses transformations de l'espace (projections, applications birationnelles, inversions). Remarquons aussi que chacun des deux articles de Geiser proposaient différentes preuves, relevant plutôt de la géométrie analytique ou de la géométrie synthétique, mais qu'elles n'étaient pas présentées comme concurrentes [103]. La démarcation à l'œuvre ici concerne donc bien la théorie des substitutions et la géométrie. Comme nous l'avons vu, cette dernière ne se résume pas à des exclusivités mutuelles d'objets et de techniques, puisqu'aucune sorte de transfert heuristique, aucune traduction entre théorie des substitutions et géométrie ne sont apparues.

Tout cela montre ainsi une certaine distance entre théorie des substitutions et géométrie, distance accentuée par les champs lexicaux de la prévision et de la confirmation relevés dans les commentaires de Jordan et Geiser. Rappelons en effet que Jordan lui-même écrivait que « la théorie des substitutions aurait permis de prévoir l'existence [des] relations géométriques » et que le lien entre les équations aux vingt-sept droites et aux seize droites avait été « vérifié » par Geiser. Ce dernier évoquait quant à lui la « conjecture » de Jordan qu'il allait « confirmer ».

N'ayant pas connaissance de lettres qui auraient été échangées à ce sujet entre Jordan et Geiser, il est difficile de trancher avec certitude sur cet emploi du terme « conjecture ». Une explication possible serait qu'il réfère simplement au fait que Jordan n'a pas publié de démonstration de son lien entre les vingt-sept droites et les seize droites. La reconstruction que j'ai proposée précédemment et qui suit pas à pas le cas des vingt-huit tangentes suggère toutefois que Jordan avait probablement eu une preuve de ce lien.

Ajouté à tous les autres commentaires de Jordan et de Geiser, ce mot « conjecture » souligne plutôt un véritable hiatus existant, à cette époque, entre théorie des substitutions

103. [Geiser 1869b] est classé dans la rubrique « Nouvelle géométrie synthétique » du *Jahrbuch*, mais contient une preuve que Geiser lui-même désignait comme « analytique ». L'autre article [Geiser 1869c] est classé dans deux rubriques de géométrie du *Jahrbuch* : celle de « Nouvelle géométrie synthétique » et celle des « Correspondances, transformations univoques, représentations » qui appartient à la section « Géométrie analytique ». Sur les géométries analytique et synthétique, voir [Lorenat 2015b].

et géométrie. Il s'agit ainsi bel et bien de deux disciplines distinctes, entre lesquelles des liens sont pressentis par Jordan et Geiser [104] mais ne sont pas réalisés dans les preuves mathématiques elles-mêmes : les objets et techniques de l'une ne peuvent agir avec ceux de l'autre. Vu sous cet angle, la théorie des substitutions ne peut que suggérer des résultats géométriques (ici des liens entre trois configurations de droites), résultats devant alors être formulés et démontrés dans la géométrie.

En effet, un autre trait caractéristique de la situation est qu'il n'existe pas ici de formulation des liens entre les trois configurations de droites qui soit commune à la théorie des substitutions et la géométrie. Il s'agit en effet pour Jordan d'égalités de groupes après adjonctions successives et pour Geiser de transformations de l'espace envoyant droites sur droites : il n'y a à aucun moment de recherche d'énoncé unique, ce qui participe d'autant plus au hiatus entre théorie des substitutions et géométrie. Par cette remarque, ces liens ne rejoignent pas la série de théorèmes du XIXe siècle dont les mathématiciens ont cherché et trouvé des preuves différentes et indépendantes, comme par exemple la loi de réciprocité quadratique, la transcendance de e ou celle de π, ou encore la théorème de clôture de Poncelet [105]. Pour ces exemples, il s'agissait en effet d'un énoncé commun et de plusieurs démonstrations, éventuellement hiérarchisées entre elles par les mathématiciens selon leur simplicité, leur efficacité, leur rigueur, leur potentialité de généralisation, etc., ou encore vues dans leur multiplicité disciplinaire comme autant d'indices de l'existence d'une unité mathématique [106].

En outre, ni Jordan ni Geiser ne semblent rechercher de dictionnaire entre leurs deux approches. Les rapprochements disciplinaires (incomplets) en jeu ici forment donc une situation différente de celle (plus tardive) du programme d'André Weil consistant à partir des analogies entre théories des corps de nombres algébriques, corps de fonctions sur $\mathbf{C}$ et des corps de fonctions sur des corps finis, puis de chercher à traduire les résultats de l'une dans le langage de l'autre afin de profiter d'un enrichissement mutuel [107].

Continuons à présent à suivre les travaux de Jordan sur les vingt-sept droites avec le lien entre celles-ci et les fonctions hyperelliptiques, qui va nous aider à éclairer ces rapports complexes entre théorie des substitutions et géométrie.

2.5 Les vingt-sept droites et les fonctions hyperelliptiques

Comme présenté plus haut, les fonctions hyperelliptiques font l'objet de la troisième section du chapitre des « Applications à la théorie des transcendantes » du *Traité*, les

104. Cette idée se retrouve dans l'usage du conditionnel passé dans : « La théorie des substitutions aurait donc permis de prévoir l'existence des liaisons géométriques », [Jordan 1869c, p. 659].
105. Voir respectivement [Lemmermeyer 2000], [Ozhigova 2001, p. 201] et [Bos et al. 1987 ; Friedelmeyer 2007].
106. Voir [Goldstein 2011b] pour les points de vue de Charles Hermite sur ce sujet.
107. [Weil 1979].

deux premières étant consacrées aux fonctions circulaires et elliptiques. La section des hyperelliptiques est divisée en deux parties ; la première concerne la division des fonctions hyperelliptiques par un nombre quelconque n et la seconde est dévolue au cas particulier $n = 3$, c'est-à-dire au cas de la trisection. Cette seconde partie fait également l'objet de la note intitulée « Sur la trisection des fonctions abéliennes et sur les vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre », [Jordan 1869a], qui ne diffère du *Traité* essentiellement que par ses notations, ses références internes et son paragraphe introductif que voici :

> Tous les géomètres[108] connaissent le fait de l'abaissement des équations modulaires pour les transformations des degrés 5, 7 et 11, et les importantes conséquences qu'en a déduites M. Hermite. MM. Clebsch et Gordan ont signalé un abaissement analogue pour les équations des périodes dont dépend la bissection des fonctions abéliennes. Nous venons d'obtenir un résultat du même genre pour l'équation qui donne la trisection dans les fonctions à quatre périodes. [Jordan 1869a, p. 865]

Jordan se situe donc dans une certaine lignée de travaux relatifs aux équations issues de la théorie des transcendantes. En guise d'introduction au cas hyperelliptique, présentons brièvement les cas circulaire et elliptique, ce qui permettra en même temps d'éclaircir le sens du début de la citation précédente.

Commençons par considérer la fonction circulaire cosinus. Cette fonction peut être vue comme la réciproque de l'intégrale

$$u = -\int_1^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Le cosinus est en outre susceptible d'être prolongé en une fonction définie sur l'ensemble des nombres complexes. Il possède enfin une période, 2π.

Soit maintenant un entier n et un nombre complexe quelconque u : on sait que $\cos \dfrac{u}{n}$ est solution d'une équation de degré n dont les coefficients font intervenir rationnellement la quantité $\cos u$. Cette équation est l'équation de *division* du cosinus, et ses racines sont tous les

$$\cos \frac{u + 2p\pi}{n}, \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant p \leqslant n-1.$$

Dans le cas particulier où u est égal à 0 (ou à un multiple entier de la période 2π), la racine $\cos 0$ devient rationnelle. Les racines restantes dépendent donc d'une équation de degré $n - 1$ appelée *équation de division des périodes.*

Le cas elliptique consiste à partir d'une intégrale dans laquelle le radicande est un polynôme de degré 3 ou 4. On considère ainsi une intégrale de la forme

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

108. Ici, le terme « géomètres » signifie « mathématiciens » au sens large.

où le paramètre $k \in]0, 1[$ est appelé le *module*. Il s'agit d'une *intégrale elliptique*. La *fonction elliptique* associée est sa fonction réciproque, c'est-à-dire la fonction λ définie par [109]

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \iff \lambda(u) = x.$$

Ainsi présentée, cette fonction λ n'est *a priori* définie que sur un intervalle réel, mais il est possible de l'étendre en une fonction définie sur l'ensemble des nombres complexes sauf quelques points [110]. Les fonctions elliptiques ont la particularité d'avoir deux périodes : il existe deux complexes ω et ω' (les périodes) tels que pour tous entiers p, q et tout complexe u, on a $\lambda(u + p\omega + q\omega) = \lambda(u)$.

Alors, de façon similaire au cas des fonctions circulaires, la quantité $\lambda(u/n)$ est solution d'une équation de degré n^2 à coefficients rationnels en $\lambda(u)$, $\lambda'(u)$ et k. Cette équation est l'*équation de division* des fonctions elliptiques ; ses racines sont tous les

$$\lambda\left(\frac{u + p\omega + q\omega'}{n}\right), \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant p, q \leqslant n-1.$$

Dans le cas particulier où u est égal à 0 (ou à une combinaison linéaire à coefficients entiers des périodes), la racine $\lambda(0)$ devient rationnelle, et il reste une équation de degré $n^2 - 1$ appelée *équation de division des périodes* des fonctions elliptiques.

D'autres équations spéciales existent pour les fonctions elliptiques, issues du problème de la transformation [111]. Ce problème consiste à trouver, étant donné un module k, une fonction rationnelle $y = U(x)/V(x)$, un module ℓ et une constante M appelée le *multiplicateur*, tels que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-\ell^2y^2)}} = \frac{1}{M}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

En prenant U et V premiers entre eux de degrés respectifs n et $n-1$, la transformation est dite d'ordre n. Alors ℓ (resp. M) est lié à k par une équation de degré $n+1$ appelée *équation modulaire* (resp. *équation du multiplicateur*). Le résultat évoqué par Jordan dans la citation précédente est que dans les cas $n = 5$, 7 ou 11, l'équation modulaire possède une réduite de degré 5, 7 ou 11 respectivement. Énoncé par Galois, ce résultat avait fait l'objet de recherches notamment de la part de Betti et de Hermite. Dans le cas où $n = 5$, ce dernier avait en outre montré comment, grâce à l'équation modulaire, il était possible de résoudre l'équation générale du cinquième degré *via* les fonctions elliptiques.

---

109. Si l'on fait tendre k vers 0, alors l'intégrale devient la fonction arcsin, et son inverse est la fonction circulaire bien connue sin. En ce sens, les fonctions elliptiques sont des généralisations des fonctions circulaires.
110. Plus précisément, une fonction elliptique est une fonction (doublement périodique, cf. *infra*) méromorphe sur $\mathbf{C}$, ayant un pôle en chaque point d'un réseau de $\mathbf{C}$. Pour les détails techniques concernant l'inversion et l'extension du domaine de définition, voir [Houzel 2002, p. 96-99].
111. Voir [Gray 2000, ch. IV ; Goldstein & Schappacher 2007 ; Goldstein 2011a].

Revenons à Jordan et au cas hyperelliptique, qui consiste essentiellement à partir d'intégrales ayant au dénominateur le radical d'un polynôme de degré supérieur à 5. L'équation particulière qui nous intéresse ici est encore une équation de division de périodes — et pas un analogue des équations modulaires.

Dans ce qui suit, j'expliquerai les recherches de Jordan sur ce sujet en donnant suffisamment de détails pour comprendre les principales étapes, mais j'omettrai certains points très techniques. On trouvera toutefois l'explication complète des travaux de Jordan sur les fonctions hyperelliptiques en annexe C.

2.5.1 Fonctions hyperelliptiques et équations de division

Avec Jordan, considérons un polynôme du sixième degré

$$\Delta^2(x) = (x - m_0)(x - m_1)\dots(x - m_5) = x^6 + ax^5 + \dots + f.$$

Les *intégrales hyperelliptiques* associées à ce polynôme sont des intégrales de la forme

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{\mu + \nu x}{\Delta(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \Phi_1(x) = \int_0^x \frac{\mu' + \nu' x}{\Delta(x)}\,\mathrm{d}x,$$

où μ, ν, μ', ν' sont des constantes.

Dans deux mémoires cités par Jordan dans le *Traité*, Carl Gustav Jacob Jacobi avait remarqué que les intégrales hyperelliptiques ne pouvaient pas être inversées en tant que telles, au contraire du cas elliptique, [Jacobi 1832 ; Jacobi 1835]. En revanche, il avait montré qu'en définissant

$$u = \int_0^x \frac{\mu + \nu x}{\Delta(x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^y \frac{\mu + \nu y}{\Delta(y)}\,\mathrm{d}y \qquad \text{et} \qquad v = \int_0^x \frac{\mu' + \nu' x}{\Delta(x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^y \frac{\mu' + \nu' y}{\Delta(y)}\,\mathrm{d}y,$$

ces nouvelles fonctions u et v des deux variables x et y peuvent être inversées [112]. Les *fonctions hyperelliptiques* sont les fonctions inverses : ce sont donc des fonctions de deux variables complexes, notées $\lambda_0(u, v)$ et $\lambda_1(u, v)$, vérifiant l'équivalence

$$\begin{cases} u = \Phi_0(x) + \Phi_0(y) \\ v = \Phi_1(x) + \Phi_1(y) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda_0(u, v) \\ y = \lambda_1(u, v). \end{cases}$$

Jacobi avait aussi montré, dans ces mêmes mémoires, que les fonctions hyperelliptiques possèdent chacune 4 périodes par variable, c'est-à-dire qu'il existe des nombres

112. Voir [Houzel 2002, p. 158-160] pour le détail des travaux de Jacobi sur ce point.

complexes $P_1, \dots, P_4$, $Q_1, \dots, Q_4$ tels que pour tous u et v et tous entiers p_1, q_1, p_2, q_2,

$$\begin{cases} \lambda_0(u + p_1P_1 + q_1P_2 + p_2P_3 + q_2P_4, v + p_1Q_1 + q_1Q_2 + p_2Q_3 + q_2Q_4) = \lambda_0(u, v) \\ \lambda_1(u + p_1P_1 + q_1P_2 + p_2P_3 + q_2P_4, v + p_1Q_1 + q_1Q_2 + p_2Q_3 + q_2Q_4) = \lambda_1(u, v). \end{cases}$$

Tout comme dans le cas elliptique, il existe un problème de division, consistant ici à déterminer les valeurs de $\lambda_0(u/n, v/n)$ et $\lambda_1(u/n, v/n)$ en fonction de $\lambda_0(u, v)$ et $\lambda_1(u, v)$. C'est encore Jacobi qui avait vu que ce problème pouvait se résoudre à l'aide de deux équations en deux inconnues à coefficients rationnels en les quantités $\lambda_i(u, v)$ et $\Delta(\lambda_i(u, v))$, la première inconnue correspondant à $\lambda_0(u/n, v/n)$ et la seconde à $\lambda_1(u/n, v/n)$.

L'*équation de division* des fonctions hyperelliptiques est l'équation résultant de l'élimination d'une inconnue dans le système de ces deux équations. Dans le *Traité*, Jordan prouve[113] que ses racines sont toutes de la forme

$$g\left[\lambda_0\left(\frac{u + p_1P_1 + q_1P_2 + p_2P_3 + q_2P_4}{n}, \frac{v + p_1Q_1 + q_1Q_2 + p_2Q_3 + q_2Q_4}{n}\right),\right.$$
$$\left.\lambda_1\left(\frac{u + p_1P_1 + q_1P_2 + p_2P_3 + q_2P_4}{n}, \frac{v + p_1Q_1 + q_1Q_2 + p_2Q_3 + q_2Q_4}{n}\right)\right]$$

où g est une fonction symétrique et rationnelle de deux variables fixée et où p_1, q_1, p_2, q_2 sont des entiers quelconques. À cause de la périodicité de λ_0 et λ_1, l'équation de division possède donc exactement n^4 racines, correspondant aux différentes valeurs modulo n que peuvent prendre les coefficients $p_1, \dots, q_2$. L'équation de division par n des fonctions hyperelliptiques est ainsi de degré n^4.

Dans le cas particulier où les nombres complexes u et v sont nuls (ou sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes), les racines sont toutes données par la formule

$$g\left[\lambda_0\left(\frac{p_1P_1 + q_1P_2 + p_2P_3 + q_2P_4}{n}, \frac{p_1Q_1 + q_1Q_2 + p_2Q_3 + q_2Q_4}{n}\right),\right.$$
$$\left.\lambda_1\left(\frac{p_1P_1 + q_1P_2 + p_2P_3 + q_2P_4}{n}, \frac{p_1Q_1 + q_1Q_2 + p_2Q_3 + q_2Q_4}{n}\right)\right],$$

que Jordan note $(p_1q_1p_2q_2)$. Parmi elles, la racine (0000) est rationnelle : l'équation de degré $n^4 - 1$ dont dépendent les racines restantes est l'*équation de division des périodes* des fonctions hyperelliptiques.

113. Jacobi avait conjecturé que l'équation résultante était de degré n^4, et Hermite l'avait prouvé en 1843, en donnant les mêmes formules que celles fournies ici par Jordan. Voir [Houzel 2002, p. 162].

2.5.2 Groupes de monodromie et groupe algébrique de l'équation de division

Dans le but de déterminer le groupe de l'équation de division, Jordan recourt à l'étude de ses groupes de monodromie. L'idée à la base de la notion de groupe de monodromie est que si l'on a une équation dont les coefficients dépendent d'un paramètre complexe z, alors ses racines peuvent être permutées lorsqu'on fait varier z le long d'un chemin fermé — les premières recherches sur ce sujet avaient été présentées par Victor Puiseux dans deux article, [Puiseux 1850 ; Puiseux 1851].

En suivant Puiseux, regardons l'exemple de l'équation $u^2 - z = 0$, où u est l'inconnue et z le paramètre. Si l'on pose $z = re^{it}$, les deux racines de l'équation sont

$$u_1(re^{it}) = \sqrt{r}e^{it/2} \qquad \text{et} \qquad u_2(re^{it}) = -\sqrt{r}e^{it/2}.$$

Faisons décrire à z un cercle complet autour de 0, dans le sens trigonométrique ; autrement dit, faisons varier t de 0 à 2π dans les formules précédentes. Lorsque $t = 0$, on a

$$u_1(re^{i0}) = \sqrt{r} \qquad \text{et} \qquad u_2(re^{i0}) = -\sqrt{r},$$

alors que quand $t = 2\pi$, on a

$$u_1(re^{2i\pi}) = -\sqrt{r} \qquad \text{et} \qquad u_2(re^{2i\pi}) = \sqrt{r}.$$

Les deux racines ont donc été échangées après que z a décrit le cercle un cercle. Si l'on faisait faire à z un tour supplémentaire, alors il y aurait un nouvel échange, qui équivaudrait donc à laisser u_1 et u_2 invariantes par un chemin consistant en deux tours autour de 0.

Plus généralement, lorsque z parcourt un chemin fermé, les racines de l'équation $f(u, z)$ sont permutées entre elles. Une fonction de z qui reprend les mêmes valeurs à chaque fois que z reprend la même valeur est appelée *fonction monodrome* de z — dans l'exemple précédent, on peut voir que la fonction $u_1 + u_2$ est monodrome. Cette notion permet à Jordan d'énoncer :

> Théorème. — Soit $f(u, z) = 0$ une équation dont les coefficients contiennent un paramètre indéterminé z. On peut déterminer entre les racines de cette équation un groupe de substitutions H tel, que toute fonction rationnelle des racines et de z monodrome par rapport à z soit invariable par les substitutions de H (indépendamment de toute valeur particulière donnée à z), et réciproquement. [Jordan 1870b, p. 277]

Le groupe H ainsi défini est le *groupe de monodromie* [114] de l'équation $f(u, z)$ par rapport à z. Dans la démonstration de ce théorème, Jordan montre en particulier que le groupe de

114. Le groupe de monodromie d'une équation avait déjà été introduit par Hermite en 1851, suite aux travaux de Puiseux. Mais le terme « monodromie » semble être apparu avec Jordan. Voir [Goldstein 2011a, p. 255-256].

monodromie est formé des permutations de racines provenant de toutes les lois de variations possibles de z.

Par exemple, pour l'équation $u^2 - z = 0$, il est aisé de voir que le groupe de monodromie par rapport à z est formé de l'identité et de la transposition correspondant à l'échange des racines u_1 et u_2 : en termes modernes, les lacets entourant 0 avec un indice pair induisent l'identité tandis que ceux avec indice impair induisent la transposition. La fonction $u_1 + u_2$ est monodrome par rapport à z et est effectivement invariante par la transposition échangeant u_1 et u_2.

Dans le *Traité*, Jordan montre un résultat permettant de relier groupes de monodromie et groupe algébrique d'une équation : le groupe de monodromie de $f(u,z)$ par rapport à z est (en termes modernes) un sous-groupe distingué du groupe algébrique de l'équation $f(u,z) = 0$, où le paramètre z est considéré comme une quantité adjointe. Dans l'exemple de $u^2 - z$, il y a même égalité entre groupe de monodromie et groupe algébrique.

Enfin, Jordan précise que si une équation contient plusieurs paramètres, on peut définir *mutatis mutandis* le groupe de monodromie par rapport à tous ces paramètres, étant entendu qu'il faille alors considérer des mouvements au terme desquels chacun d'eux reprend sa place initiale.

Revenons aux cas de l'équation de la division des fonctions hyperelliptiques. Pour appliquer les techniques de monodromie, Jordan présente les périodes de ces fonctions en termes d'« intégrales élémentaires » : les périodes $P_1, \ldots, Q_4$ sont données par[115]

$$\begin{array}{lcl} P_1 = A_0 - A_1 & ; & Q_1 = B_0 - B_1 \\ P_2 = A_1 - A_2 & ; & Q_2 = B_1 - B_2 \\ P_3 = A_3 - A_4 & ; & Q_3 = B_3 - B_4 \\ P_4 = A_4 - A_5 & ; & Q_4 = B_4 - B_5, \end{array}$$

où les A_i et les B_i sont les *intégrales élémentaires*, c'est-à-dire les valeurs respectives des intégrales

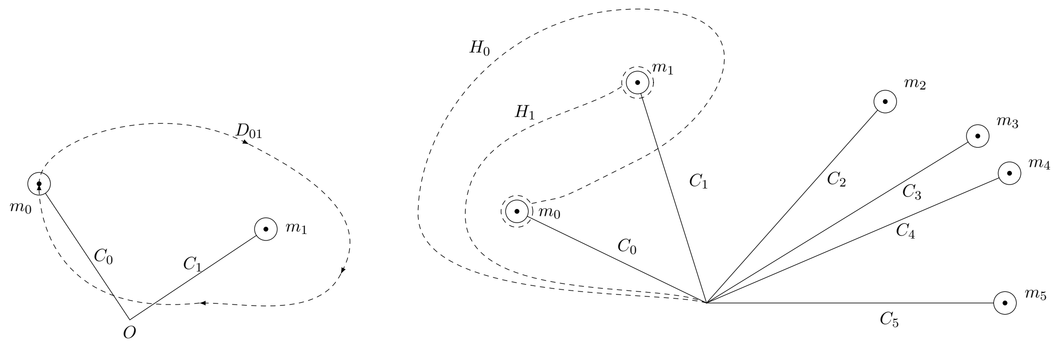
$$\int \frac{\mu + \nu x}{\Delta(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int \frac{\mu' + \nu' x}{\Delta(x)}\,\mathrm{d}x$$

calculées le long du chemin élémentaire[116] C_i relatif à m_i (rappelons que les m_i sont les racines du polynôme Δ^2).

Jordan va calculer le groupe de monodromie de l'équation de division par rapport aux m_i. L'idée est que la variation des m_i entraîne des modification des chemins C_i, donc des intégrales élémentaires, et donc des périodes[117]. Par exemple, Jordan considère le

115. Ces expressions des périodes avaient déjà été données dans [Puiseux 1850].
116. En termes modernes, il s'agit d'un lacet entourant m_i avec indice 1.
117. Jordan utilise une méthode similaire dans son paragraphe sur les fonctions elliptiques. Il y écrit qu'il s'agit d'une « méthode élégante, due à M. E. Mathieu », [Jordan 1870b, p. 338]. Aucune référence précise

mouvement consistant à laisser $m_1, \dots, m_6$ immobiles tout en faisant décrire à m_0 un lacet autour de m_1 (voir la figure suivante). Jordan montre alors que suite à ce mouvement, les



(a) Le mouvement D_{01} (b) Modification des chemins C_0 et C_1

FIGURE 2.7 – À gauche, D_{01} est le mouvement effectué par m_0 autour de m_1. À droite, les chemins en pointillés représentent les déformations subies par les chemins élémentaires C_0 et C_1 suite au mouvement D_{01}. Voir [Jordan 1870b, p. 358].

toutes les périodes P_i sont inchangées, sauf P_2 qui devient $P_1 + 2P_2$, et de même pour les périodes Q_i. Une racine de l'équation de division

$$g\left[\lambda_0\left(\frac{p_1P_1+q_1P_2+p_2P_3+q_2P_4}{n}, \frac{p_1Q_1+q_1Q_2+p_2Q_3+q_2Q_4}{n}\right),\right.$$
$$\left.\lambda_1\left(\frac{p_1P_1+q_1P_2+p_2P_3+q_2P_4}{n}, \frac{p_1Q_1+q_1Q_2+p_2Q_3+q_2Q_4}{n}\right)\right]$$

est alors changée en

$$g\left[\lambda_0\left(\frac{p_1P_1+q_1(2P_1+P_2)+p_2P_3+q_2P_4}{n}, \frac{p_1Q_1+q_1(2Q_1+Q_2)+p_2Q_3+q_2Q_4}{n}\right),\right.$$
$$\left.\lambda_1\left(\frac{p_1P_1+q_1(2P_1+P_2)+p_2P_3+q_2P_4}{n}, \frac{p_1Q_1+q_1(2Q_1+Q_2)+p_2Q_3+q_2Q_4}{n}\right)\right],$$

c'est-à-dire en

$$g\left[\lambda_0\left(\frac{(p_1+2q_1)P_1+q_1P_2+p_2P_3+q_2P_4}{n}, \frac{(p_1+2q_1)Q_1+q_1Q_2+p_2Q_3+q_2Q_4}{n}\right),\right.$$
$$\left.\lambda_1\left(\frac{(p_1+2q_1)P_1+q_1P_2+p_2P_3+q_2P_4}{n}, \frac{(p_1+2q_1)Q_1+q_1Q_2+p_2Q_3+q_2Q_4}{n}\right)\right].$$

Avec la notation de Jordan décrite précédemment, la racine $(p_1q_1p_2q_2)$ est donc changée

n'est donnée, mais il s'agit probablement de [Mathieu 1867]. Dans ce mémoire sur les fonctions elliptiques, Mathieu utilise effectivement des techniques similaires en tout point à ce que fait Jordan. On retrouve aussi le même type de dessins explicatifs. Voir en particulier [Mathieu 1867, p. 283-284] et comparer les figures de [Mathieu 1867, p. 283] et [Jordan 1870b, p. 339].

en $(p_1 + 2q_1, q_1 p_2 q_2)$. Autrement dit, le déplacement de m_0 décrit plus haut induit la substitution que Jordan note

$$S_1 = |p_1, q_1, p_2, q_2 \qquad p_1 + 2q_1, q_1, p_2, q_2|.$$

Avec des considérations de ce type, Jordan parvient à déterminer le groupe de monodromie de l'équation de division des périodes par rapport aux m_i, son groupe de monodromie par rapport aux coefficients $a, \ldots, f$ de Δ^2 et son groupe de monodromie par rapport aux quantités $\lambda_0(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$, $\Delta(\lambda_0(u, v))$ et $\Delta(\lambda_1(u, v))$. Par exemple, lorsque n est un nombre premier impair, le premier de ces groupes est, en notation actuelle, le groupe $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_n)$. Grâce aux liens existant entre groupes de monodromie et groupe algébrique d'une équation, Jordan en déduit que le groupe algébrique de l'équation de division des périodes est le « groupe abélien », c'est-à-dire en adoptant une notation actuelle, le groupe $G = \mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_n) \rtimes \mathbf{F}_n^*$.

2.5.3 Lien avec les vingt-sept droites

Le lien avec les vingt-sept droites est établi dans le cas de la trisection des périodes, correspondant à $n = 3$. L'équation de trisection des périodes, notée dorénavant E, est degré $3^4 - 1 = 40$; son groupe est le groupe abélien $G = \mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_3) \rtimes \mathbf{F}_3^*$ qui a pour ordre $2\Omega_2 = 2(3^4 - 1)3^3(3^2 - 1)3$. Jordan va montrer que cette équation possède une réduite de degré 27 ayant le même groupe que l'équation aux vingt-sept droites.

Pour cela, il commence par considérer le sous-groupe H_1 de G engendré par la substitution

$$|p_1, q_1, p_2, q_2 \qquad p_2, q_2, p_1, q_1|$$

ainsi que les substitutions de la forme

$$|p_1, q_1, p_2, q_2 \qquad a_1' p_1 + c_1' q_1, b_1' p_1 + d_1' q_1, a_2'' p_2 + c_2'' q_2, b_2'' p_2 + d_2'' q_2|$$

avec $a_1', \ldots, d_2''$ entiers modulo 3.

Jordan montre que ce groupe H_1 est d'ordre $2\omega = (3^2 - 1)^2 (3^2 - 3)^2$, et en déduit qu'« une fonction φ_1 des racines de E, invariable par les substitutions de H_1, dépendra d'une équation $\mathscr{E}$ de degré $2\Omega_2/(2\omega) = 45$ », [Jordan 1870b, p. 365] [118].

Jordan introduit ensuite le groupe $\mathscr{F}$ formé des substitutions

$$A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta = |p_1, q_1, p_2, q_2 \qquad p_1 + \alpha, q_1 + \beta, p_2 + \gamma, q_2 + \delta|$$

118. En termes actuels, la fonction φ_1 est un élément primitif de K^{H_1}/k, où j'ai noté k le corps de définition de E et K un corps de décomposition de cette équation. La fonction φ_1 dépend bien d'une équation de degré 45 puisque l'on a $[K^{H_1} : k] = (G : H_1) = 45$.

et appelle « décompositions » de $\mathscr{F}$, des[119] couples de sous-groupes de $\mathscr{F}$ de cardinal 3^2 et qui, à eux deux, engendrent $\mathscr{F}$. Par exemple, les sous-groupes $P_1 = \langle A, B\rangle$ et $P'_1 = \langle C, D\rangle$, engendrés respectivement par A, B et par C, D, forment une telle décomposition.

À chaque racine de l'équation $\mathscr{E}$ correspond alors une décomposition de $\mathscr{F}$. En effet, les racines de $\mathscr{E}$ sont les fonctions φ_s obtenues à partir de φ_1 par action des substitutions s de G, celles de H_1 laissant par définition φ_1 invariable[120]. Par ailleurs, les substitutions s de G agissent sur la décomposition $\{P_1, P'_1\}$ de $\mathscr{F}$ par conjugaison (les conjugués $P_s = sP_1s^{-1}$ et $P'_s = sP'_1s^{-1}$ forment encore une décomposition de $\mathscr{F}$), les substitutions de H_1 laissant $\{P_1, P'_1\}$ inchangée.

Pour résumer cela en termes actuels, on a une application

$$\begin{array}{ccc} \{\text{racines de } \mathscr{E}\} & \longrightarrow & \{\text{décompositions de } \mathscr{F}\} \\ \varphi_s & \longmapsto & \{P_s, P'_s\} \end{array}$$

qui est compatible à l'action de G/H_1 sur les racines de $\mathscr{E}$ d'une part et sur les décompositions de $\mathscr{F}$ d'autre part. De plus, Jordan montre que la correspondance ainsi définie est biunivoque.

Comme il y a 45 racines de $\mathscr{E}$, il y a 45 décompositions de $\mathscr{F}$, dont Jordan établit la liste (sans expliquer comment il a procédé). Cette liste est présentée dans un tableau reproduit en partie ci-dessous :

$A, B \;;\; C, D$	$A, BD^2 \;;\; CA, D$	$A, BD \;;\; CA^2, D$
$AD, B\,; CB, D$	$AD, BD^2; CAB, D$	$AD, BD; CA^2B, D$
$AD^2, B; CB, D$	$AD, BD^2; CAB, D$	$AD, BD; CA^2B, D$
$\cdots \;;\; \cdots$	$\cdots \;;\; \cdots$	$\cdots \;;\; \cdots$

Jordan note ensuite de façon correspondante $1, 2, \ldots, 45$ les racines de l'équation $\mathscr{E}$:

$$\begin{array}{ccc} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 5, & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 43, & 44, & 45, \end{array}$$

et regarde ensuite comment le groupe abélien G agit sur les racines en regardant comment il agit sur les décompositions. Jordan prend l'exemple de la substitution

$$L_1 = |p_1, q_1, p_2, q_1 \qquad p_1 + q_1, q_1, p_2, q_2|.$$

119. Il y a une condition technique supplémentaire, que j'explique dans l'annexe C.
120. Autrement dit, il y a autant de racines φ_s que de représentants de classes de G/H_1.

Cette substitution transforme A, B, C, D en A, AB, C et D respectivement, donc laisse inchangés $P_1 = \langle A, B\rangle$ et $P_1' = \langle C, D\rangle$. Par conséquent, elle fixe la racine 1.

Jordan traite un autre exemple en regardant en quelle racine est transformée la racine 4 par L_1. Cette substitution transforme la décomposition $\langle AD, B\rangle$, $\langle CB, D\rangle$ en la décomposition $\langle AD, AB\rangle$, $\langle CAB, D\rangle$. Écrite telle quelle, cette dernière n'apparaît pas dans le tableau des quarante-cinq décompositions, mais Jordan indique qu'elle est « évidemment identique » à la décomposition $\langle AD, BD^2\rangle$, $\langle CAB, D\rangle$. Cela montre ainsi que L_1 remplace la racine 4 par la racine 5. Jordan écrit ensuite :

> Continuant ainsi, on peut écrire sans difficulté les déplacements opérés entre les racines $1, 2, \ldots, 45$ par la substitution $|p_1, q_1, p_2, q_2 \quad p_1, 2q_1, p_2, 2q_2|$ et par les autres substitutions L_1, L_2, M_1, M_2, $N_{1,2}$ dont G est dérivé. [Jordan 1870b, p. 368]

Autrement dit, Jordan regarde comment sont substituées entre elles les racines $1, \ldots, 45$ par ces six substitutions (qui sont, en termes plus actuels, des générateurs de G). Il affirme alors que chacune de ces six substitutions permute entre elles les vingt-sept expressions suivantes :

$$
\begin{array}{lll}
(1, 37, 34, 41, 45), & (1, 39, 36, 40, 44), & (1, 38, 42, 43, 35),\\
(10, 37, 7, 21, 32), & (11, 37, 4, 25, 30), & (15, 34, 3, 24, 33),\\
(2, 34, 12, 29, 22), & (16, 20, 27, 45, 5), & (26, 9, 14, 45, 23),\\
(19, 41, 13, 6, 31), & (17, 41, 18, 28, 8), & (15, 44, 6, 21, 27),\\
(26, 8, 44, 25, 12), & (17, 36, 3, 23, 32), & (2, 36, 13, 30, 20),\\
(7, 40, 16, 29, 18), & (19, 40, 4, 33, 14), & (10, 39, 9, 22, 31),\\
(11, 39, 5, 24, 28), & (2, 35, 28, 21, 14), & (16, 31, 35, 25, 3),\\
(19, 42, 12, 5, 32), & (15, 42, 18, 30, 9), & (7, 43, 26, 24, 13),\\
(17, 43, 4, 22, 27), & (10, 38, 20, 33, 8), & (11, 38, 23, 29, 6),
\end{array}
$$

où chaque symbole $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ désigne une fonction des racines de $\mathscr{E}$ invariable par les substitutions qui permutent exclusivement entre elles les racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, mais variable par toute autre substitution. Jordan note ensuite a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, p, q, r, s, t, u, m', n', p', q', r', s', t', u' ces vingt-sept fonctions et X l'équation du vingt-septième degré dont elles dépendent.

Remarquant que chacune des racines $1, 2, \ldots, 45$ apparaît dans exactement trois des fonctions $a, b, \ldots, u'$ (par exemple, 1 apparaît dans a, b et c ; 37 apparaît dans a, d et e), Jordan forme les produits trois à trois correspondant et note φ leur somme. Il observe alors que

$$\varphi = abc + ade + \cdots + lps'$$

est identique à la fonction φ qu'il avait introduite lors de l'étude de l'équation aux vingt-sept droites.

La dernière étape de Jordan consiste à montrer que le groupe de l'équation X est égal au groupe des substitutions qui laissent φ invariante. Pour cela, il procède en deux temps.

D'abord, Jordan écrit que si S est une substitution quelconque du groupe abélien G, si α est une des racines $1, \ldots, 45$ et si β est la racine sur laquelle est envoyée α par S, alors S remplace une des expressions $a, b, \ldots, u'$ qui contient α par une autre qui contient[121] β ; par conséquent, la substitution S permute entre eux les termes de φ. Jordan indique alors que toute fonction de $a, b, \ldots, u'$ invariable par les substitutions fixant φ est nécessairement invariable par les substitutions de G et est donc rationnelle[122]. Cela signifie exactement que le groupe de l'équation X est contenu dans celui de φ.

Jordan traite l'inclusion réciproque par un argument de cardinalité : si l'équation X est supposée résolue, le groupe G se réduit aux substitutions qui fixent $a, b, \ldots, u'$. Ces substitutions fixent donc chaque terme $abc, \ldots, ls'p$ de φ et laissent ainsi invariable chaque racine $1, 2, \ldots, 45$, puisque ces dernières sont les racines communes à chaque terme de φ. Ainsi, les substitutions du groupe réduit de G par résolution de X transforment chaque décomposition de $\mathscr{F}$ en elle-même. Jordan en déduit alors (sans faire les calculs) que ce groupe réduit est égal aux substitutions qui « multiplient tous les indices par un même facteur constant ± 1 », [Jordan 1870b, p. 369]. Cela lui permet de voir que le groupe de X a pour ordre Ω_2 (la moitié de l'ordre de G), qui est également l'ordre du groupe de φ. Jordan conclut :

> L'équation X a donc le même groupe que l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre. [Jordan 1870b, p. 369]

Pour résumer, Jordan a construit deux réduites $\mathscr{E}$ et X de l'équation de trisection des périodes des fonctions hyperelliptiques, de degrés respectifs 45 et 27. L'équation X a le même groupe que l'équation aux vingt-sept droites, et le groupe de la trisection s'y ramène par adjonction d'une racine carrée.

2.5.4 Bilan : analyse, théorie des substitutions, géométrie

Dans les recherches qui ont été décrites dans cette section, on peut commencer par remarquer que Jordan s'inscrit bien dans une série de travaux relatifs aux fonctions elliptiques et hyperelliptiques, et ce à plusieurs niveaux. Comme on l'a vu, il met explicitement en écho son résultat sur l'abaissement de l'équation de la trisection des périodes avec ceux, que « [t]ous les géomètres connaissent », concernant l'abaissement des équations modulaires relatives aux fonctions elliptiques. Ce faisant, Jordan entend continuer une tradition de recherches commencée près de quarante ans auparavant. En outre, il s'appuie dans ses

121. Par exemple, le terme abc est envoyé sur le terme $S(a)S(b)S(c)$. Or, abc apparaît parmi les termes de φ car a, b et c ont la racine 1 en commun. Donc $S(a)$, $S(b)$ et $S(c)$ ont la racine $S(1)$ en commun, et par conséquent, le produit $S(a)S(b)S(c)$ apparaît dans φ.

122. En effet, puisque G est contenu dans le groupe Γ de φ, on a $k(a, \ldots, u')^{\Gamma} \subset k(a, \ldots, u')^{G}$. ensuite, toute fonction des racines de X invariable sous G est rationnelle car $k(a, \ldots, u') \subset K^{H_1} = K^{G} = k$.

preuves sur de nombreux résultats connus (comme ceux de Jacobi) et utilise des objets et des techniques empruntées à ses contemporains, tels Hermite, Puiseux et Mathieu [123].

Si l'on examine les étapes de la démonstration de Jordan du lien entre fonctions hyperelliptiques et vingt-sept droites, on peut constater que ces utilisations lui permettent d'expliciter la structure abélienne du groupe (algébrique) de l'équation de trisection. Dès lors que cette structure a été mise à jour, Jordan se replie sur ses techniques usuelles de théorie des substitutions : considérations de groupes, de fonctions de racines invariables par des sous-groupes ou création *ad hoc* de telles fonctions, utilisation de générateurs, etc.

En particulier, il n'y a à aucun moment intervention d'objets géométriques dans ces preuves de Jordan, au sens dégagé à la section 2.2 — auquel échappe l'utilisation de (dessins de) chemins d'intégration. La seule occurrence des vingt-sept droites apparaît tout à la fin, dans la remarque de conclusion : « [l']équation [de trisection] a donc le même groupe que l'équation aux vingt-sept droites ». Alors que Jordan ne discute pas ce résultat dans le *Traité*, plusieurs commentaires de lui-même et d'autre mathématiciens, rapportés ailleurs, soulignent leur étonnement à ce sujet.

2.5.5 Une « énigme à expliquer »

Comme l'a remarqué F. Brechenmacher, ce lien entre l'équation aux vingt-sept droites et celle de trisection des périodes des fonctions hyperelliptiques a fait partie des résultats du *Traité* ayant circulé dès la parution de cet ouvrage — et même avant, à travers la note consacré à ce sujet, [Jordan 1869a] —, contribuant à son succès immédiat auprès de certains mathématiciens, [Brechenmacher 2011, p. 341]. Citons ainsi Sylvester, qui place ce résultat parmi les plus importants de l'année 1869 :

> Je devrais ajouter à cette liste d'événements mémorables, qui doivent à tout jamais faire ressortir 1869 des annales de la science, [...] la merveilleuse réalisation du Dr. Christian Wiener en planches stéréométriques des 27 droites sur une surface cubique de Salmon-Cayley d'une part, et d'autre part la surprenante découverte de M. Camille Jordan (élève de Hermite, et élève à la hauteur de son maître) de l'application de ces 27 droites à la trisection des fonctions abéliennes [124]. [Sylvester 1866-69, p. 155]

123. Comme précédemment, nous pouvons dire que ces objets et techniques relèvent de l'analyse pour Jordan.

124. « I ought to tack on to this list of memorabilia, which must for ever make 1869 stand out in the Fasti of science, Capt. Andrew Noble's mechanical invention for measuring up to the millionth part of a second the rate of motion of a shot inside a cannon and Dr. Christian Wiener's wonderful realization in stereoscopic drawings of the Salmon-Cayley 27 lines on a cubic surface on the one hand, and on the other (Hermite's pupil, pupil worthy of his master) M. Camille Jourdan's [sic] surprising discovery of their application to the trisection of Abelian functions. » Les premiers éléments de la liste d'événements mémorables de Sylvester sont « Janssen's and Lockyer's hydrogenous solar chromosphere, Tyndall's indefinitely attenuated cometary matter, and the still more impalpable and shadowy product of cerebration embodied in diptychs with their *quasi* chemical composition and parallels stretching between and connecting, as it were, with forces of affinity the atomic elements of the associated geminate molecules ». C'est en tant que « théories ayant leur origine dans l'observation » que Sylvester mentionne ces trois premiers éléments. L'article duquel est tiré la citation n'a pas de rapport avec les surfaces cubiques ou les vingt-sept droites. Il s'agit d'un article de

Sylvester ne précise pas pourquoi il considère le lien entre les vingt-sept droites et les fonctions hyperelliptiques comme un résultat remarquable. Il est en tout cas certain que les vingt-sept droites elles-mêmes sont un sujet de vif intérêt pour Sylvester, comme le montre l'envolée lyrique qui suit l'extrait précédent :

> Avec probablement la même bonne raison qu'Archimède a fait graver le cylindre, le cône et la sphère sur sa pierre tombale, nos compatriotes distingués pourraient laisser des instructions testamentaires pour que l'eikosiheptagramme cubique soit gravé sur la leur. Esprit de l'Univers ! où allons-nous, et quand, où et comment tout cela finira-t-il [125] ? [Sylvester 1866-69, p. 155]

Un autre commentaire permet de voir un avis également enthousiaste sur le lien entre les vingt-sept droites et les fonctions hyperelliptiques. C'est celui de Luigi Cremona, qui écrit à Jordan le 19 décembre 1869 :

> Monsieur,
>
> J'ai reçu hier [...] la première partie de votre *Traité des substitutions et des équations algébriques*, que vous avez eu la bonté de me destiner en cadeau. Je vous prie maintenant d'agréer mes sincères et vifs remerciements.
>
> Je n'ai pu jusqu'ici que tailler les pages mais les seuls titres des §§ ont suffi pour me donner l'idée du plaisir et de l'instruction que je pourrai tirer de la lecture de votre ouvrage : lecture que je commencerai sans délai.
>
> Entre autres, il y a une question qui excite au plus haut degré ma curiosité : celle du rapprochement de la recherche des 27 droites d'une surface cubique (qui ont été découvertes par MM. Cayley et Salmon, avant Steiner) avec la trisection des fonctions hyperelliptiques. Surtout du point de vue géométrique, il y a là une véritable énigme à expliquer [126]. [...]

Ce à quoi Jordan répond :

> Monsieur,
>
> Je vous remercie de l'appréciation bienveillante que vous avez bien voulu faire de la première partie de mon ouvrage, et de la rectification que vous me signalez au sujet

mathématiques dans lequel Sylvester exprime de façon insistante son point vue consistant à considérer les mathématiques comme une science d'observation. Mais au contraire d'autres exemples, il n'est pas clair qu'il associe les résultats relatifs aux vingt-sept droites à des observations. Les points de vue de Hermite sur cette question de l'importance de l'observation en mathématiques sont étudiés dans [Goldstein 2011b]. Par ailleurs, présenter Jordan comme élève d'Hermite est un peu curieux, compte tenu de leurs relations parfois tendues. Voir [Brechenmacher 2007a, p. 229].

125. « Surely with as good reason as had Archimedes to have the cylinder, cone, and sphere engraved on his tombstone might our distinguished countrymen leave testamentary directions for the cubic eikosiheptagram to be engraved on theirs. Spirit of the Universe! whither are we drifting, and when, where, and how is all this to end? » Au sujet du style particulier de Sylvester, voir [Parshall 2006].

126. Extrait d'une lettre de Cremona à Jordan datée du 19 décembre 1869, conservée aux Archives de l'École polytechnique (réf. VI2A2(1855) 9). Je suis redevable à Giorgio Israel de m'avoir envoyé une transcription de la réponse qui suit, datée du 10 janvier 1870. Ces lettres ont été éditées par Simonetta Di Sieno et Paola Testi Saltini, et seront publiées sous la direction de G. Israel dans un ouvrage contenant la correspondance de Cremona.

> de l'invention des 27 droites des surfaces du 3e ordre. Je ne manquerai pas de faire cette rectification dans ma préface.
>
> La démonstration définitive d'une liaison entre cette question des 27 droites et la division des fonctions abéliennes me semble une question bien intéressante, mais trop difficile pour moi, qui ne possède assez ni les théories géométriques, ni celles des fonctions abéliennes. L'intérêt que vous paraissez prendre à ce sujet m'a cependant décidé à faire un premier pas dans cette voie, en cherchant quelle est la fonction des 27 droites qui satisfait à une équation du 40e degré, analogue à celle de la trisection des fonctions abéliennes.
>
> J'avais d'abord pensé qu'il fallait prendre pour nouvelle inconnue un terne de trièdres conjugués ; mais l'équation du 40e degré ainsi obtenue n'est pas celle que l'on cherche, quoique présentant avec elle des traits de ressemblance assez remarquables. [...]

Cet échange a ensuite donné lieu à une courte note aux *Comptes Rendus* intitulée « Sur une nouvelle combinaison des vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre », débutant comme suit :

> Dans une précédente Communication (*Comptes Rendus*, 12 avril 1869), nous avons montré que l'équation [...] dont dépend la trisection des périodes dans les fonctions abéliennes à quatre périodes, a deux réduites [...] respectivement analogues à l'équation aux 45 triangles et à celle aux 27 droites des surfaces du troisième ordre. Pour faciliter la comparaison ultérieure de ces deux problèmes, en apparence si différents, il peut être utile de rechercher réciproquement quelle est la combinaison des 27 droites (ou des 45 triangles) qui, prise pour inconnue, dépendra d'une équation analogue à celle qui donne la division d'une fonction abélienne. [Jordan 1870a, p. 326]

À la suite de la remarque adressée par Cremona à Jordan, le lien entre les vingt-sept droites et la trisection des fonctions hyperelliptique donne ainsi lieu à de nouveaux travaux : pour expliquer cette « énigme », pour « faciliter la comparaison ultérieure de ces deux problèmes », pour en trouver une « démonstration définitive », Jordan se propose de chercher un nouvel objet géométrique, créé à partir des vingt-sept droites et donnant lieu à une équation analogue à celle de la trisection.

Ainsi, dans la note que nous venons de citer, [Jordan 1870a], la solution consiste à d'abord partir d'une fonction f symétrique en deux des racines de l'équation E de la trisection des périodes. Comme cette dernière est de degré 80, la fonction f dépend d'une équation de degré 40, qui est donc une réduite de E. En exhibant ensuite un sous-groupe d'indice 40 du groupe de l'équation de trisection formé de substitutions qui fixent f, Jordan parvient à montrer que f est une fonction symétrique en les neuf fonctions[127] 1, 2, 3, 10, 11, 18, 19, 26 et 27.

Jordan introduit ensuite de nouveaux objets : désignant par la même notation $1, \ldots, 45$ les quarante-cinq triangles associés aux vingt-sept droites, il considère l'*ennéaèdre* formé

127. Je rappelle que ces fonctions sont des racines de la réduite $\mathscr{E}$ de degré 45 qui avaient été notées par Jordan $1, \ldots, 45$.

des triangles 1, 2, 3, 10, 11, 18, 19, 26 et 27. Formé à partir des vingt-sept droites grâce à des relations d'incidence particulières, un tel ennéaèdre est donc un objet géométrique, au sens que j'ai dégagé au début de ce chapitre. Jordan met ensuite en avant les relations d'incidences suivantes : les neuf triangles de l'ennéaèdre n'ont aucune droite commune et si on se donne deux quelconques d'entre eux, le triangle qui forme avec eux un trièdre de Steiner fait également partie de l'ennéaèdre. Jordan montre ensuite qu'il existe exactement 40 ennéaèdres, c'est-à-dire 40 systèmes de neuf triangles possédant les propriétés d'incidence précédentes. Il parle alors de le « réduite du quarantième degré qui a pour racines nos ennéaèdres », [Jordan 1870a, p. 328], sans expliquer clairement pourquoi elle est équivalente à l'équation aux vingt-sept droites.

Cette équivalence semble ainsi provenir de l'existence même des ennéaèdres, systèmes de neuf triangles ayant des relations d'incidence particulières. Cela rappelle la manière dont Jordan avait présenté les réduites géométriques de l'équation aux vingt-sept droites, associées aux triangles, aux systèmes de doubles trièdres et aux doubles-six — cette proximité se lit d'ailleurs également dans la fin de l'extrait de lettre de Jordan à Cremona *supra*, où Jordan écrit qu'il avait d'abord pensé à considérer les trièdres conjugués [128]. Mais on voit dans le cas présent que la recherche de ce nouvel objet constitue pour Jordan la bonne réponse à apporter au problème, la manière d'y apporter une « démonstration définitive » : il s'agit ainsi de fournir un objet géométrique pour éclairer un lien qui a été dévoilé par la théorie des substitutions.

2.6 Conclusion

Théorie des substitutions et géométrie entretiennent des liens complexes dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Jordan. Avec des situations comme les vingt-sept droites, les vingt-huit tangentes doubles ou les seize droites, la géométrie fournit à Jordan des équations particulières qui sont étudiées *via* leur groupe, par la théorie des substitutions.

Dans ces recherches, les relations d'incidence jouent un rôle primordial, d'abord parce qu'elles donnent lieu à ces fonctions φ qui sont à la base des travaux sur les équations associées aux diverses situations géométriques. En ramenant l'étude des groupes de ces équations à celle des groupes des fonctions φ, Jordan a cependant mis en exergue l'impossibilité de connaître de façon exhaustive les relations géométriques d'une situation. En commentant par ailleurs le besoin d'une démonstration par la théorie des substitutions de l'inexistence d'une réduite de degré inférieur à 27 pressentie par la géométrie, Houël situe cette impossibilité dans une opposition entre géométrie et théorie des substitutions : ce n'est qu'au moyen de cette dernière qu'il est possible de résoudre des « questions négatives ».

128. À la fin de [Jordan 1870a], Jordan précise que les ennaèdres et les systèmes de trièdres conjugués dépendent d'équations qui n'ont pas le même groupe.

Dans le même temps, la théorie des substitutions permet à Jordan d'établir des liens entre les vingt-sept droites, les vingt-huit tangentes doubles et les seize droites d'une part, entre les vingt-sept droites et les fonctions hyperelliptiques d'autre part. Mais des limites apparaissent vite car c'est la géométrie qui est appelée pour « confirmer » un lien ou « faciliter » la compréhension de la théorie des substitutions. En particulier, par le recours aux ennéaèdres résulte une « réduite géométrique », comme celles que nous avons relevées dans le *Traité*.

Comme je l'ai écrit plus haut, cette insistance mise sur des objets géométriques comme les triangles, les doubles-six ou les ennéaèdres pour en déduire immédiatement des réduites s'accorde peu avec les autres méthodes déployées par Jordan dans le *Traité*. Afin de pouvoir mieux les appréhender, nous allons prendre un peu de recul et situer le *Traité* dans un corpus plus large.

Chapitre 3

Le corpus des équations de la géométrie

Afin de pouvoir mieux expliquer la présence chez Jordan de ce que j'ai appelé les « réduites géométriques », je vais à présent chercher d'autres travaux que ceux de Jordan sur ce sujet, considérant un corpus défini par ce qui est appelé à l'époque les « équations de la géométrie ». Le chapitre est tourné entièrement vers ce corpus. Je commencerai ainsi par décrire des difficultés de sa construction, liées à des caractéristiques des équations de la géométrie elles-mêmes. Je présenterai ensuite en détail à la fois les textes du corpus obtenu et leurs auteurs, en insistant sur les relations qu'ils entretiennent entre eux et sur le statut des équations de la géométrie pour chacun d'eux [1]. Enfin, je dégagerai des éléments permettant de voir que le corpus se présente comme un terrain rencontre de deux cultures, l'une liée principalement aux travaux de Galois en théorie des équations, l'autre associée aux configurations géométriques telles que les vingt-sept droites.

3.1 Une étiquette et un corpus

Pour construire un corpus d'étude de ces équations associées aux configurations géométriques comme les vingt-sept droites, une idée consiste à utiliser les outils de recension de travaux mathématiques que sont l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, le *Catalogue of Scientific Papers* et le *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*.

Dans l'*Encyklopädie* d'abord, il existe une section du chapitre sur la théorie de Galois et ses applications, [Hölder 1899], intitulée « Geometrische Gleichungen ». Cette section fait entre autres référence aux travaux de Jordan sur les équations aux vingt-sept droites, aux vingt-huit tangentes doubles et aux seize droites que nous avons discutés dans le chapitre précédent : elle se présente donc comme un point de départ possible pour la délimitation

1. Une partie de ces recherches a fait l'objet d'une publication, [Lê 2014].

d'un corpus d'étude. Remarquons d'ailleurs que son titre semble faire écho à celui de la note « Sur les équations de la géométrie » de Jordan que nous avons déjà utilisée [2], dans laquelle Jordan annonçait les méthodes et la plupart des résultats du chapitre des applications géométriques du *Traité des substitutions et des équations algébriques*.

Le *Répertoire bibliographique* contient lui aussi une rubrique faisant explicitement référence aux équations étudiées dans le chapitre des applications géométriques de Jordan. En effet, sa section sur la théorie de Galois et la théorie des équations comporte une sous-section appelée « Application de la théorie à des équations particulières : équations des points d'inflexion d'une cubique ; des 27 droites d'une surface du troisième ordre ; équations modulaires, etc. » (référence A4d).

En revanche, ni le *Jahrbuch* ni le *Catalogue* ne possèdent d'entrée renvoyant à des équations liées aux vingt-sept droites ou d'autres configurations géométriques. Si cette absence les disqualifie en tant que moyens de repérage, elle suggère cependant deux idées. La première concerne les lieux institutionnels. On sait en effet que l'*Encyklopädie* est attachée à Göttingen alors que le *Jahrbuch* se rapproche plutôt de Berlin [3]. Cela peut donc indiquer que les équations de la géométrie forment un sujet reconnu par les mathématiciens de Göttingen, et pas par ceux de Berlin. La seconde idée est d'ordre chronologique : alors que la classification du *Jahrbuch* reste très stable depuis la création du périodique en 1868 jusqu'en 1905, en particulier pour la section d'algèbre [4], celles du *Répertoire* et de l'*Encyklopädie* datent de la toute fin du XIXe siècle — respectivement, de 1889 et d'autour de 1895 [5]. Que les équations de la géométrie sont l'objet de rubriques uniquement dans ces derniers est donc peut-être le signe qu'il s'agit d'un sujet qui ne devient identifié en tant que tel qu'à partir de la fin des années 1880.

Ce sont donc l'*Encyklopädie* et le *Répertoire* qui seront utilisés dans la suite. Au contraire du *Répertoire*, l'*Encyklopädie* ne se résume pas à une liste de références ; je vais commencer par examiner son contenu pour voir comment les équations de la géométrie y sont appréhendées.

3.1.1 Les équations de la géométrie dans l'*Encyklopädie*

Le chapitre « Galois'sche Theorie mit Anwendungen » de l'*Encyklopädie* a été écrit par Otto Hölder (1859-1937). Ce dernier avait commencé ses études au *Polytechnikum* de Stuttgart. Il avait ensuite continué son apprentissage des mathématiques à Berlin avec notamment Karl Weierstrass, puis à Tübingen avec Paul du Bois-Raymond, auprès de qui

2. Le titre de la section de l'*Encyklopädie* se traduirait en français plutôt par « Équations géométriques », mais comme cette section se réfère en grande partie à Jordan, je garderai l'expression « équations de la géométrie » de ce dernier.
3. Au sujet de la création de l'*Encyklopädie* et de son homologue française, voir [Tobies 1994 ; Gispert 1999]. Pour le *Jahrbuch*, voir [Siegmund-Schultze 1993].
4. Voir [Corry 2007].
5. Pour le *Répertoire*, voir la référence [Nabonnand & Rollet 2002] déjà citée.

il prépara sa thèse de doctorat, soutenue en 1882[6]. D'après J. Gray, le centre d'intérêt de Hölder glissa de la théorie des fonctions vers des questions d'ordre algébrique en 1886, après qu'il eut suivi à Göttingen les cours de Felix Klein sur la théorie de Galois[7]. Hölder obtint la chaire de mathématiques laissée vacante par Sophus Lie à Leipzig en 1899, année dont est daté son chapitre de l'*Encyklopädie*.

Ce chapitre est divisé en 29 sections qui se rapportent à des notions comme le groupe d'une équation ou l'adjonction d'irrationalités, à des résultats tels que la non résolubilité par radicaux des équations de degré supérieur à 4, ou encore à des équations particulières comme les équations d'Abel, de Sylow, les équations cyclotomiques ou celles de division des fonctions elliptiques (voir la table 3.1).

La section sur les équations de la géométrie est la dernière du chapitre. Elle débute de la façon suivante[8] :

> La courbe générale du troisième ordre possède neuf points d'inflexion ; sur chaque droite joignant deux points d'inflexion se trouve toujours un troisième point d'inflexion. La détermination des points d'inflexion dépend d'une équation du neuvième degré $f(\lambda) = 0$, où l'on choisira λ de sorte qu'il s'exprime rationnellement en fonction des deux coordonnées d'un point d'inflexion et que réciproquement, ces coordonnées s'expriment toutes deux en fonction de λ. Aux neuf points d'inflexion correspondent les neuf racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_9$. [Hölder 1899, p. 518-519]

Hölder explique ensuite comment montrer que cette équation $f(\lambda) = 0$ est résoluble par radicaux, puis fait référence à des travaux de Otto Hesse concernant ce résultat, [Hesse 1847]. Après cela, il mentionne « d'autres équations de la géométrie dont les groupes ont été étudiés », en précisant que la liste n'est pas exhaustive : « l'équation aux vingt-huit tangentes doubles d'une courbe plane du quatrième ordre », « l'équation aux vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre », « l'équation aux seize droites d'une surface du quatrième ordre à conique double » et « l'équation aux seize points singuliers de la surface de Kummer[9] ». Hölder énonce que ces équations ne sont pas résolubles par radicaux et indique qu'il existe des liens entre les groupes des équations aux vingt-huit tangentes, aux vingt-sept droites et aux seize droites. Cela clôt la section « Geometrische Gleichungen » et donc le chapitre sur la théorie de Galois de l'*Encyklopädie*.

6. Voir [Van der Waerden 1939 ; Gray 1994].

7. [Gray 1994, p. 59]. Voir également [Ehrhardt 2012, p. 196-201] pour une discussion au sujet d'un article de Hölder de 1895 ayant « marqué le développement de la théorie de Galois ». Par ailleurs, voir [Nicholson 1993] pour la contribution de Hölder à la constitution de la notion de groupe quotient.

8. « Die allgemeine Kurve dritter Ordnung besitzt neun Wendepunkte ; dabei liegt auf der Verbindungslinie von je zwei Wendepunkten immer ein dritter Wendepunkt. Die Bestimmung der Wendepunkte hängt ab von einer Gleichung 9. Grades $f(\lambda) = 0$, wobei man λ so wählen wird, dass sich λ in den beiden Koordinaten eines Wendepunktes rational ausdrücken lässt und dass umgekehrt diese Koordinatent sich beide in λ ausdrücken lassen. Den neun Wendepunkten entsprechen die neun Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_9$. »

9. « Von anderen geometrischen Gleichungen, deren Gruppen studiert worden sind, mögen nur genannt werden die Gleichungen : 1) der 28 Doppeltangenten einer ebenen Kurve 4. Ordnung, 2) der 27 Geraden einer Fläche 3. Ordnung, 3) der 16 Geraden einer Fläche 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt, 4) der 16 Knotenpunkte der *Kummer*'schen Fläche. » [Hölder 1899, p. 519].

GALOIS'SCHE THEORIE MIT ANWENDUNGEN

Inhaltsübersicht

1. Einleitung
2. Definition der Gruppe einer Gleichung
3. Weitere Eigenschaften der Gruppe
4. Wirkliche Herstellung der Gruppe
5. Monodromiegruppe
6. Transitivität und Primitivität
7. Adjunktion einer natürlichen Irrationalität
8. Cyklische Gleichungen
9. Reine Gleichungen
10. Zerlegung des Gleichungsproblems durch Resolventenbildung
11. Adjunktion einer accessorischen Irrationalität
12. Adjunktion eines Radikals
13. Begriff der Auflösung
14. Kriterium der Auflösbarkeit
15. Behandlung nichtauflösbarer Gleichungen
16. Allgemeine Gleichungen
17. Gleichungen den ersten vier Grade
18. Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichungen höherer Grade
19. Gleichungen mit regulärer Gruppe
20. Gleichungen mit commutativer Gruppe
21. *Abel*'sche Gleichungen
22. Kreisteilungsgleichungen
23. Teilungs- und Transformationsgleichungen der elliptischen Funktionen
24. Reduktion von Gleichungen auf Normalformen
25. Irreducible von Primzahlgrad
26. *Sylow*'sche Gleichungen
27. Casus irreducibilis der kubischen Gleichung
28. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal
29. Geometrische Gleichungen

TABLE 3.1 – Reproduction de la table des matières du chapitre consacré à la théorie de Galois et ses applications de l'*Encyklopädie*, [Hölder 1899].

Au contraire de celle associée aux neuf points d'inflexion, les équations aux vingt-sept droites, aux vingt-huit tangentes doubles, etc., ne sont pas définies par Hölder. À la lecture seule de l'*Encyklopädie*, il est possible de comprendre ce à quoi elles réfèrent par analogie avec le cas des points d'inflexion. En effet, trois caractéristiques de l'équation aux neuf points peuvent être dégagées de la citation précédente : son degré est 9, ce qui correspond au nombre des points d'inflexion ; ses racines sont des paramètres (abscisses ou ordonnées) définissant ces points ; enfin, des relations d'incidence (d'alignement) existent entre ces derniers. Si les deux premières caractéristiques servent à comprendre mathématiquement ce qu'est l'équation aux neuf points, ce n'est pas le cas de la troisième, qui est mobilisée par Hölder pour montrer sa résolubilité par radicaux. Pour transposer le cas des neuf points à d'autres situations géométriques, on pourrait donc remplacer de façon *ad hoc* valeur du degré et paramètres des objets géométriques correspondant aux racines. Mais cela n'indique pas quels seraient les paramètres à choisir, ni même comment on pourrait former effectivement l'équation.

Le besoin de recourir à une analogie pour comprendre les autres équations que celle associée aux points d'inflexion peut passer pour banal dans un extrait de l'*Encyklopädie*. Mais il révèle surtout le fait que ces équations sont à comprendre au cas par cas ; en particulier, il n'existe pas de définition mathématique de l'expression « équations de la géométrie » dans l'*Encyklopädie*.

Cette lacune octroie à la famille d'équations désignées comme telles un statut différent des autres familles d'équations auxquelles sont dévolues les différentes sections du chapitre « Théorie de Galois et applications » de Hölder. Par exemple, les « équations d'Abel » sont définies par une certaine propriété portant sur leurs racines :

> Théorème : On suppose que les racines d'une équation sont toutes exprimables rationnellement en fonction de l'une d'elles x_1. Si deux racines quelconques sont représentées par $\theta(x_1)$ et $\theta_1(x_1)$, on suppose que l'on a toujours $\theta_1(\theta(x_1)) = \theta(\theta_1(x_1))$. Alors l'équation est résoluble. [...] Les équations [de ce] théorème s'appellent « équations d'Abel [10] ». [Hölder 1899, p. 506]

Le nom « équation d'Abel » est donc clairement défini et désigne toute équation dont les racines vérifient la propriété décrite dans cet extrait.

Regardons encore l'exemple des équations cyclotomiques :

> Soit p un nombre premier. Les racines p-ièmes de l'unité vérifient l'équation $x^p - 1 = 0$. Si l'on enlève du membre de gauche le facteur rationnel $x - 1$, il reste alors l'équation $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0$. [...] Comme les racines p-ièmes de l'unité sont représentés géométriquement par p points équidistants d'un cercle, la division

10. « Satz: Die Wurzeln einer Gleichung seien alle in einer von ihnen x_1 rational ausdrückbar. Falls irgend zwei Wurzeln durch $\theta(x_1)$ und $\theta_1(x_1)$ dargestellt sind, so sei immer $\theta_1(\theta(x_1)) = \theta(\theta_1(x_1))$. Die Gleichung ist dann auflösbar. [...] Die Gleichungen [dieses] Satz[es] heissen „*Abel*'sche Gleichungen". »

> du cercle en p parties égales dépend de ces équations ; c'est pourquoi on les appelle équations cyclotomiques [11]. [Hölder 1899, p. 508]

Ici, l'appellation « équations cyclotomiques » renvoie à des équations écrites explicitement comme des polynômes développés et égalés à zéro (ce qui n'était pas le cas pour les équations d'Abel), et se double d'une explication étymologique — remarquer le passage du singulier au pluriel dans la citation, qui indique l'existence d'une équation cyclotomique par nombre premier p.

À l'inverse des équations cyclotomiques ou d'Abel, celles désignées par l'expression « équations de la géométrie » ne sont pas bien définies mathématiquement dans l'*Encyklopädie*, que ce soit par une écriture explicite ou une propriété quelconque. Cette expression n'est donc pas un terme mathématique précis, mais plutôt une étiquette regroupant un certain nombre d'exemples, comme l'équation aux neuf points d'inflexion ou l'équation aux vingt-sept droites, mais aussi celles dont l'existence n'était que suggérée par Hölder [12].

Ainsi, pour localiser des équations de la géométrie qui ne sont pas explicitement listées par Hölder, je suis pour l'instant réduit à essayer d'en repérer en procédant par analogie avec l'équation aux vingt-sept droites, aux neuf points, etc., ou en cherchant l'expression « équations de la géométrie » elle-même — nous verrons néanmoins que ce recours à des analogies catégorise des façons de faire qui sont elles bien repérables [13].

3.1.2 Repérer les équations de la géométrie

Or, l'expression « équations de la géométrie » n'apparaît explicitement que dans une seule des références citées par l'*Encyklopädie* et le *Répertoire bibliographique*. Elle apparaît en effet uniquement dans le titre « Sur les équations de la géométrie » de la note de Jordan que nous avons déjà discutée, [Jordan 1869c]. Mais l'appellation « équations de la géométrie » n'est pas non plus définie dans cette note, et comme dans l'*Encyklopädie*, on y trouve « l'équation aux vingt-sept droites », « l'équation aux vingt-huit tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre », et d'autres expressions similaires d'équations associées à diverses situations géométriques.

Si l'on regarde le chapitre du *Traité des substitutions et des équations algébriques* consacré aux applications géométriques, un procédé général de formation des équations qui y sont traitées peut être lu en introduction :

> L'un des problèmes les plus fréquents de la géométrie analytique est de déterminer quels sont les points, ou bien les lignes ou surfaces d'une espèce donnée, qui satisfont

11. « Es sei p eine Primzahl. Die p^{ten} Einheitwurzeln genügen der Gleichung $x^p - 1$. Nimmt man aus der linken Seite den rationalen Faktor $x-1$ heraus, so bleibt die Gleichung $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0$ übrig. [...] Da die p^{ten} Einheitwurzeln durch p äquidistante Punkte eines Kreises geometrisch repräsentiert werden, so hängt von diesen Gleichungen die Teilung des Kreises in p gleiche Teile ab, man nennt sie deshalb Kreisteilungsgleichungen. »

12. Voir la citation de la note 9.

13. C'est ce phénomène que j'essaierai de décrire en utilisant l'expression « système culturel ».

> à certaines conditions. Lorsque le nombre des solutions est limité, les coordonnées du point cherché (ou les paramètres que renferme l'équation des lignes ou des surfaces cherchées) sont déterminées par un système d'équations algébriques $A, B, \ldots$ en nombre égal à celui des inconnues $x, y, \ldots$ Éliminons toutes les inconnues, sauf une seule, x : on sait que le degré de l'équation finale X indiquera le nombre des solutions du problème : et si les racines de cette équation sont inégales, soit x_0 l'une d'elles : on aura les valeurs correspondantes de $y_0, \ldots$ exprimées en fonction rationnelle de x_0, en substituant x_0 à la place de x dans les équations $A, B, \ldots$, et en cherchant le système des solutions communes à ces équations.
>
> Les points, lignes ou surfaces cherchés sont donc déterminés lorsqu'on a résolu l'équation X, et correspondent respectivement à ses diverses racines $x_0, x_1, \ldots$ [Jordan 1870b, p. 301]

Ce procédé général (c'est-à-dire qui ne dépend pas de la situation géométrique) peut être interprété comme une définition des « équations de la géométrie ». Une équation de la géométrie serait ainsi une équation algébrique (en une inconnue) associée à une situation géométrique donnée, de degré égal au nombre d'objets de la situation et dont les racines s'expriment rationnellement en fonction des paramètres de ces objets, et réciproquement — cela s'accorde avec les caractéristiques de l'équation aux neuf points d'inflexion vues dans l'*Encyklopädie*.

Pourtant, si ces explications peuvent aider le lecteur d'aujourd'hui à comprendre ce que peuvent être les équations de la géométrie, elles restent néanmoins inefficaces pour en dégager un critère de repérage : déjà dans les textes discutés jusqu'à présent, [Hölder 1899 ; Jordan 1869c], apparaissent des expressions comme « l'équation aux vingt-sept droites », qui ne sont accompagnées ni d'un procédé de formation, ni de précisions sur le ou les paramètres censés définir les objets géométriques impliqués.

En outre, nous verrons dans un moment que, comme chez Jordan, les équations associées à des situations géométriques et qui interviennent dans les textes recensés par l'*Encyklopädie* et le *Répertoire* ne sont jamais écrites sous forme d'un polynôme développé ou factorisé, comme ce peut être le cas par exemple pour l'équation cyclotomique.

Je suis finalement contraint d'utiliser ma propre compréhension de ces équations, forgée rétrospectivement à partir de la lecture de toutes les références données par l'*Encyklopädie* et le *Répertoire*. Dans ce qui suit, l'étiquette « équations de la géométrie » regroupera toute équation algébrique en une inconnue se rapportant à la détermination des objets d'une configuration géométrique, ou liée *a priori* à une telle configuration, même syntaxiquement, comme dans l'expression « équation aux vingt-sept droites [14] ».

Remarquons que cette description exclut certains types d'équations qui peuvent aussi être associées à des situations géométriques, mais de façon différente. Il s'agit d'une part des équations algébriques en plusieurs inconnues définissant des lieux géométriques, comme

14. Ces subtilités de désignations et de déterminations seront au cœur du chapitre suivant, en tant que caractéristiques particulières des équations de la géométrie.

par exemple $xy = 0$ qui représente, dans un plan, la réunion des deux droites d'équations respectives $x = 0$ et $y = 0$. Seront d'autre part exclues les équations (homogènes) dont les (rapports de) racines sont interprétées géométriquement *a posteriori*, comme c'est en particulier le cas pour dans l'interprétation géométrique de la théorie des formes. Un exemple simple est l'équation $x_1^2 - x_2^2 = 0$ dont les solutions en $(x_1 : x_2)$ définissent deux points $(1 : 1)$ et $(1 : -1)$ sur une droite projective [15]. Notons que le choix d'exclure ce qui se rattache à la théorie des formes est cohérent avec le fait que ni l'*Encyklopädie* ni le *Répertoire bibliographique* ne pointent vers des textes qui y sont principalement rattachés — rappelons que dans ces deux sources, les équations de la géométrie se trouvent dans les sections de théorie de Galois, et pas à la théorie des formes ou des invariants.

3.1.3 Formation du corpus

Inspiré des méthodes utilisées dans les thèses de Frédéric Brechenmacher et Jenny Boucard, [Brechenmacher 2006 ; Boucard 2011], le procédé de formation du corpus d'étude est le suivant : parmi toutes les références données par l'*Encyklopädie* et le *Répertoire*, je sélectionne celles qui comportent au moins une occurrence d'équation de la géométrie [16] ; pour chacun des textes obtenus, je liste ensuite les références données explicitement par citation et comme précédemment, je ne garde que celles dans lesquelles apparaît une équation de la géométrie au moins. Le corpus est alors formé par tous les textes obtenus de cette manière.

Je précise que lorsqu'un texte long était clairement cité pour un passage particulier (c'est par exemple le cas pour les chapitres de livres), je n'ai tenu compte que de ce passage. Ainsi, l'*Encyklopädie* cite le *Lehrbuch der Algebra* de Heinrich Weber pour son chapitre sur les neuf points d'inflexion qui fait donc partie du corpus, mais pas le chapitre mitoyen consacré aux vingt-huit tangentes doubles [17]. Un autre exemple est le *Cours d'algèbre supérieure* de Joseph-Alfred Serret, qui contient un chapitre sur les neuf points d'inflexion, mais qui est cité par un des textes du corpus (de Felix Klein) pour un résultat sans aucun rapport avec ce chapitre. Jamais cité pour son chapitre sur l'équation aux neuf points, l'ouvrage de Serret ne fera donc pas partie du corpus.

Ce corpus ne prétend de toute façon à aucune exhaustivité : j'ai par ailleurs trouvé de façon tout à fait fortuite des équations de la géométrie dans des articles non référencés par l'*Encyklopädie* ou le *Répertoire*. Je souligne toutefois qu'aucun des textes trouvés au hasard n'induisent de contradiction avec les résultats que je présenterai dans la suite. Cela étant

15. Des exemples plus compliqués (et issus du corpus qui sera décrit dans un instant) d'équations de lieux et d'interprétation géométrique de théorie des formes peuvent se trouver par exemple en [Clebsch 1868, p. 179] et [Maschke 1889, p. 330] respectivement.

16. Il existe des références de l'*Encyklopädie* qui ne comportent aucune mention d'équations de la géométrie. Par exemple, pour les vingt-sept droites des surfaces cubiques, Hölder cite [Cayley 1849] et [Jordan 1870b]. L'article de Cayley en question est celui ordinairement désigné comme la première publication au sujet de l'existence des vingt-sept droites ; l'équation aux vingt-sept droites n'y apparaît pas. Par ailleurs, le *Répertoire* comporte des références concernant les équations modulaires, et dans lesquelles il n'y a aucune équation de la géométrie.

17. Ce chapitre de Weber sera discuté et pris en compte au chapitre 5 de cette thèse.

dit, je reviendrai plus tard sur le *Cours d'algèbre* de Serret, en tant que manuel célèbre ayant largement circulé et participé à la formation des mathématiciens dans la seconde moitié du XIXe siècle.

J'obtiens ainsi un ensemble de 19 textes pour 11 auteurs, dont les dates de publication s'étendent de 1847 à 1896, avec une forte concentration entre 1868 et 1872. De ces 19 textes, 14 ont été trouvés directement par l'*Encyklopädie*, 5 proviennent du *Répertoire* (dont 2 font déjà partie des 14 précédentes) et 2 sont obtenus par l'étape d'extension par citation — cette faible augmentation peut s'expliquer en partie par la forte inter-textualité existant entre les textes du corpus, cf. *infra*. Signalons enfin que l'*Encyklopädie* contient une référence interne, puisqu'elle pointe vers un passage d'une autre section (nº 24) du chapitre de théorie de Galois, concernant l'équation de trisection des périodes des fonctions hyperelliptiques ; j'ai pris en considération cette référence interne, et 4 des textes du corpus sont des références données à cet endroit.

Chronologiquement, le corpus est formé des textes suivants. Pour ce qui est de ceux publiés avant 1868, le premier texte est un article de Otto Hesse sur certaines équations algébriques de degré 9 et l'équation aux neuf points d'inflexion, [Hesse 1847]. Viennent ensuite deux articles de Ernst Eduard Kummer sur des surfaces quartiques particulières (contenant des familles de coniques et possédant seize points singuliers, respectivement), [Kummer 1863 ; Kummer 1864].

Pour la période 1868-1872, les textes consistent en un article d'Alfred Clebsch sur les surfaces quartiques à conique double, [Clebsch 1868] ; le chapitre des applications géométriques et la section sur les fonctions hyperelliptiques du *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Camille Jordan, [Jordan 1870b], avec les courtes publications qui en avaient précédé la parution, [Jordan 1869a ; Jordan 1869b ; Jordan 1869c ; Jordan 1869d], ainsi qu'une note postérieure, [Jordan 1870a] [18] ; un article de Felix Klein, [Klein 1870], prolongement de sa thèse consacrée à la théorie des complexes de droites ; un article de Clebsch sur une interprétation géométrique de la théorie de l'équation du cinquième degré, [Clebsch 1871b] ; un autre article de Klein, cette fois sur une façon de représenter géométriquement les résolvantes d'équations algébriques, [Klein 1871b] ; un article de Sophus Lie, [Lie 1872], reprenant et développant sa thèse.

Pour finir, les textes du corpus d'après 1872 sont un article de Max Noether [19] sur l'équation du huitième degré et la théorie des courbes quartiques, [Noether 1879] ; le chapitre du *Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra* de Eugen Netto, consacré aux équations algébriques dont les racines sont liées trois par trois, [Netto 1882] ; un article de Klein sur la résolution de l'équation aux vingt-sept droites par les fonctions hyperelliptiques, [Klein 1888], et un article de Heinrich Maschke se rapportant à ce même

18. Toutes ces publications de Jordan ont déjà été vues et commentées dans le chapitre précédent, à l'exception de [Jordan 1869d] qui concerne l'équation aux seize points singuliers de la surface de Kummer.

19. Dans toute la suite de la thèse, je référerai à Max Noether par son nom patronymique seul, sa fille Emmy n'apparaissant à aucun moment.

sujet, [Maschke 1889] ; un chapitre du second volume du *Lehrbuch der Algebra* de Heinrich Weber, dévolu aux neuf points d'inflexion des courbes cubiques, [Weber 1896].

3.1.4 Les auteurs

Commençons par situer les auteurs du corpus les uns par rapport aux autres, en examinant les relations qu'ils entretiennent entre eux. Ces relations, mathématiques, institutionnelles ou personnelles, sont nombreuses et intriquées. Pour tenter de présenter les choses avec clarté, je vais partir des liens existant entre Hesse, Clebsch, Klein et Noether, en suivant la chronologie de leurs rencontres, et j'ajouterai ensuite les autres auteurs. Les liens entre toutes ces personnes sont schématisées à la fin de cette sous-section en figure 3.2, et on trouvera en table 3.2 leurs années de naissance et de mort.

Ernst Kummer	1810-1893
Otto Hesse	1811-1874
Alfred Clebsch	1833-1872
Camille Jordan	1838-1922
Sophus Lie	1842-1899
Heinrich Weber	1842-1913
Max Noether	1844-1921
Eugen Netto	1848-1919
Felix Klein	1849-1925
Heinrich Maschke	1853-1908

Table 3.2 – Années de naissance et de décès des auteurs du corpus.

Hesse fut docent puis professeur extraordinaire à l'université de sa ville natale Königsberg de 1840 à 1855. Il passa ensuite un an à Halle puis fut nommé professeur ordinaire à Heidelberg. Il y resta jusqu'en 1868, date à laquelle il partit pour Munich, où il mourut en 1874. Hesse enseigna ainsi la géométrie analytique à Clebsch (à Königsberg, de 1850 à 1854), ainsi qu'à Weber et à Noether (à Heidelberg, respectivement en 1860 et 1867-1868 [20]). Ce dernier et Klein écrivirent par ailleurs chacun une notice nécrologique de Hesse en 1875, [Klein 1875 ; Noether 1875]. Plus tard, Noether fit également partie des éditeurs des *Gesammelte Werke* de Hesse — publiées en 1897, [Hesse *Œuvres*] — avec Walther von Dyck, Sigmund Gundelfinger et Jacob Lüroth.

Gundelfinger, Lüroth et Noether s'étaient rencontrés dans les années 1860 à Giessen. Clebsch y était professeur depuis 1863, et avec Paul Gordan, il avait commencé à fédérer autour de lui plusieurs mathématiciens :

20. Voir [Brill, Gordan et al. 1873 ; Hesse *Œuvres*, p. 719 ; Schappacher & Volkert 2005].

> [À Giessen] s'était alors rassemblé autour de Clebsch et de Gordan un cercle de jeunes mathématiciens qui avaient été vivement stimulés intellectuellement par leurs relations personnelles étroites avec ces deux docents commodes et spirituels, durant les cours et les séminaires, au cours de promenades et autour du café. Outre les tout premiers élèves Güßfeld et Brill de Clebsch à Gießen, Lüroth, Gundelfinger, Korndörfer, et Noether à partir de 1868, ont appartenu à ce cercle de composition changeante [21]. [Brill 1923, p. 213]

En 1868, Clebsch reçut le poste de professeur laissé vacant par Riemann à Göttingen, et il y fut suivi par un certain nombre de ses élèves de Giessen.

Cette même année, Klein soutint sa thèse qu'il avait préparée auprès de Julius Plücker. Alors que ce dernier mourut peu après (toujours en 1868), Klein entreprit l'édition posthume d'un de ses livres et fut amené pour cela à rencontrer Clebsch [22] à Göttingen en 1869. Des années plus tard, Klein se rappela avoir beaucoup apprécié l'atmosphère stimulante qui régnait autour de Clebsch [23] ; réciproquement, ce dernier fut tout aussi enthousiaste lorsque Klein revint à Göttingen un peu plus tard, comme il l'écrivit à Jordan :

> Dr. Klein, qui est maintenant entièrement ici [à Göttingen], m'a beaucoup parlé de l'agréable moment qu'il a passé à Paris. Il est comme toujours très zélé [...] ; je suis heureux d'avoir gagné ici un collègue si actif et aimable [24].

En 1872, Clebsch mourut subitement et Brill, Gordan, Klein, Lüroth, Noether, ainsi que Aldoph Mayer et Karl von der Mühll écrivirent une longue nécrologie en son honneur, [Brill, Gordan et al. 1873] — ils s'y présentent comme « ses amis et anciens élèves ». Comme écrit précédemment, Hesse mourut deux ans plus tard, et Klein ainsi que Noether publièrent chacun une nécrologie de celui-ci.

Il existe ainsi un groupe de mathématiciens, dont font partie Klein et Noether, qui se sont progressivement groupés autour de Clebsch et qui se sont occupés d'affaires relatives à la mémoire des disparus Clebsch et Hesse [25]. Dans les nécrologies ainsi écrites, la filiation

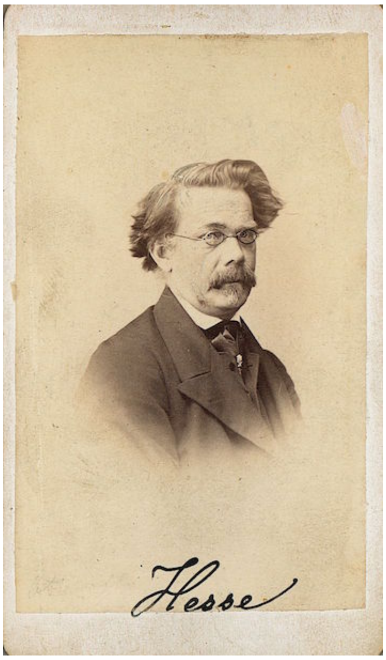
21. « [In Gießen] hatte sich in jener Zeit um Clebsch und Gordan ein Kreis von jungen Mathematikern geschart, die in engem persönlichem Verkehr mit den zwei umgänglichen geistvollen Dozenten in Vorlesungen und Seminaren, auf Spaziergängen und beim Kaffee lebhafte Anregung zu wissenschaftlicher Betätigung empfingen. Außer den frühesten Schülern von Clebsch in Gießen, Güßfeld und Brill, gehörten zu diesem Kreis in wechselnder Zusammensetzung Lüroth, Gundelfinger, Korndörfer und seit 1868 Noether. » Au sujet des mathématiques orales et informelles, voir [Rowe 2004] pour le cas de Göttingen entre 1895 et 1920.

22. Clebsch écrivit plus tard une notice nécrologique de Plücker, [Clebsch 1872b].

23. [Klein *Œuvres 1*, p. 50]. Cette référence pointe vers les commentaires que Klein lui-même inclut dans ses *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, éditées en 1921. Noter qu'à cette époque, Klein avait alors réussi à construire le « grand Göttingen », érigeant en héros les professeurs du passé de cette université, comme Gauss, Riemann ou Clebsch. Voir [Rowe 1989a].

24. « Dr. Klein, der jetzt ganz hier ist, hat mir viel von der angenehmen Zeit erzählt, welche er in Paris erlebt hat. Er ist, wie immer, sehr fleissig [...]; ich bin froh hier einen so regsamen und liebenswürdigen Collegen gewonnen zu haben. » Extrait d'une lettre de Clebsch à Jordan datée du 5 mars 1871 à Göttingen. Cette lettre est conservée aux archives de l'École polytechnique sous la référence VI2A2(1855) 15.

25. En partie du moins : il n'y a jamais eu d'édition des œuvres complètes de Clebsch.



(a) Otto Hesse (1811-1874)

(b) Alfred Clebsch (1833-1872)

(c) Max Noether (1844-1921)

(d) Felix Klein (1849-1925)

FIGURE 3.1 – Portraits de Otto Hesse, Alfred Clebsch, Felix Klein et Max Noether. Les images de Hesse et de Clebsch m'ont été fournies par la *Mathematische Gesellschaft* de Hamburg.

mathématique entre ces derniers est plusieurs fois mise en avant, et est doublée d'une relation amicale forte :

> Hesse eût à partir de 1843/44 des auditeurs comme Kirchhoff, Aronhold et Durège, à partir de 1849/50 Lipschitz, C. Neumann, Schroeter, à partir de l'été 1850 son successeur intellectuel Alfred Clebsch, qui s'est toujours revendiqué être un véritable élève de Hesse. Non seulement Hesse resta un ami fidèle de Clebsch jusqu'à la disparition prématurée de ce dernier, mais il le reconnut également avec volonté et fierté pour sa grande valeur [26]. [Hesse *Œuvres*, p. 716]

Hesse et Clebsch sont aussi présentés comme deux grands mathématiciens dont sont déplorées les morts rapprochées :

> En l'espace de deux ans, la science algébraico-géométrique allemande a perdu ses deux plus grands représentants : le maître Otto Hesse a maintenant suivi son élève Alfred Clebsch, disparu de façon si prématurée. Dans cette série, nous pouvons encore donner le nom du troisième géomètre analytique qui, avec les synthétistes Möbius et Steiner, était en Allemagne à la pointe de cette science en plein développement et a donné avec ceux-ci un contenu fondamental à la géométrie, et qui a été arraché il y a six ans à une activité géométrique nouvellement entamée : Julius Plücker (1801-1868) [27]. [Noether 1875, p. 77]

Dans ce dernier extrait, Noether présente donc une trinité de « géomètres analytiques » (Hesse, Clebsch, Plücker) disparus en quelques années. Avec cela, il marque un changement de génération : c'est une double génération, incarnée par Hesse et Clebsch (ainsi que Plücker), qui disparaît et qui laisse place à celle de leurs élèves, dont Klein et Noether.

En ce qui concerne plus spécifiquement les équations de la géométrie, il est intéressant de noter que les auteurs de la notice nécrologique de Clebsch soulignent que l'intérêt de ce dernier pour ce sujet venait justement de Hesse : « C'était vraiment les recherches de Hesse puis de Abel qui avaient vivement attiré l'attention de Clebsch sur ce côté algébrique des problèmes géométriques [28] ».

26. Extrait d'une note biographique de Hesse insérée dans ses œuvres complètes et rédigée par les éditeurs de ces œuvres : Walther von Dyck, Sigmund Gundelfinger, Jacob Lüroth et Max Noether. « Zudem hatte Hesse von 1843/44 an Hörer wie Kirchhoff, Aronhold und Durège, von 1849/50 an Lipschitz, C. Neumann, Schroeter, von Sommer 1850 an den ihm in Richtung und geistiger Nachfolge nächstverwandten Alfred Clebsch, der sich immer als eigentlicher Schüler Hesse's bekannt hat, und dem Hesse nicht nur bis zu dessen frühem Tode ein treuer Freud blieb, sondern den er auch willig und stolz in seiner Bedeutung anerkannte. »

27. « Innerhalb zweier Jahre hat die deutsche algebraisch-geometrische Wissenschaft ihre beiden grössten Vertreter verloren: seinem so früh dahingeschiedenen Schüler Alfred Clebsch ist der Altmeister Otto Hesse jetzt nachgefolgt. Wir können in dieser Reihe noch den dritten analytischen Geometer anführen, der in Deutschland mit den Synthetikern Möbius und Steiner schon an der Spitze der aufstrebenden Wissenschaft stand und mit ihnen vereint der Geometrie einen wesentlichen Gehalt gab, den vor sechs Jahren einer wieder neu aufgenommenen geometrischen Thätigkeit eintrissenen Julius Plücker (1801-1868). »

28. « Es waren wohl die Untersuchungen von Hesse und weitherin von Abel gewesen, die Clebsch's Interesse für diese algebraische Seite der geometrischen Probleme rege gemacht hatten », [Brill, Gordan et al. 1873, p. 47].

La suite de cette notice nécrologique de Clebsch fait entrer Jordan en scène :

> [P]lus tard, les relations multiples qu'il avait nouées avec Camille Jordan ramenèrent son attention vers tout ce qui se rattache aux groupements remarquables des racines d'une équation. Réciproquement, c'est principalement à lui qu'on est redevable d'avoir mis Camille Jordan en état de consacrer aux « équations de la géométrie » un chapitre spécial dans son grand ouvrage [29]. [Brill, Gordan et al. 1873, p. 47]

Comme j'ai déjà eu l'occasion de le souligner, ce passage a été repris par Jordan lui-même dans sa notice de candidature à l'Académie des sciences, [Jordan 1881, p. 33], et la préface du *Traité des substitutions et des équations algébriques* mentionne également l'influence qu'a eue Clebsch sur l'élaboration du chapitre des applications géométriques. Jordan semble donc endosser pleinement ce lien avec Clebsch.

La relation entre Clebsch et Jordan est aussi présentée comme amicale par C. Neumann dans la notice nécrologique de son ami d'enfance Clebsch :

> Clebsch n'a pas manqué de reconnaissance [...], en particulier à l'étranger. Il était membre correspondant des académies de Berlin et Münich, de Milan et Bologne ainsi que de Cambridge ; il était un des rares membres de la *London Mathematical Society*. Mais il ne s'est pas tenu, avec ses pairs, qu'à une relation superficielle liée à ces honneurs ; une amitié sincère l'a lié avec ses collègues. On doit ainsi indiquer les relations qu'il avait nouées avec par exemple (en passant sous silence un grand nombre d'allemands) avec Cremona à Milan, avec Camille Jordan à Paris et avec Cayley à Cambridge [30]. [C. Neumann 1872, p. 559]

Remarquer d'ailleurs que Clebsch n'avait pas développé de sentiments hostiles à l'égard des français (ou au moins de Jordan) après la guerre de 1870, comme le montre cet extrait d'une lettre qu'il écrit à Jordan le 5 mars 1871 :

> Très cher ami !
>
> J'espère que vous permettez que je vous appelle encore comme cela, et que vous bannissez le conflit du royaume de la science. Quels moments et quels événements avons-nous vécu ! Dieu merci, la paix nous rend enfin aux occupations gaies et [illisible]

29. « [S]päter wurde seine Aufmerksamkeit durch die vielfachen Beziehungen, in die er mit Camille Jordan getreten war, immer wieder auf Alles, was mit merkwürdigen Gruppirungen von Wurzeln einer Gleichung im Zusammenhange steht, hingelenkt. Umgekehrt hat man es ihm hauptsächlich zu verdanken, wenn Camille Jordan im Stande war, in seinem grossen Werke (Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris, Gauthier-Villars 1870) ein besonderes Capitel den „Gleichungen der Geometrie“ zu widmen. » La traduction est celle de [Jordan 1881, p. 33].

30. « An Anerkennung in Nähe und Ferne, namentlich auch im Auslande, hat es Clebsch nicht gefehlt. Er war correspondirentes Mitglied der Akademien in Berlin und München, in Mailand und Bologna, sowie in Cambridge; er war eines der wenigen Mitglieder der London Mathematical Society. Aber nicht nur in der äusserlichen Beziehung solcher Ehrenbezeugungen hat er zu seinen Fachgenossen gestanden; aufrichtige Freundschaft hat ihn mit den Gleichstrebenden verbunden. Denn so muss man die Beziehung nennen, die ihn (um von der grossen Anzahl der Einheimischen zu schweigen) z.B. mit Cremona in Mailand, mit Camille Jordan in Paris, mit Cayley in Cambridge verband. »

> de la science, et nous permet de travailler à l'alliance des peuples plutôt qu'à leur séparation [31].

Jordan avait aussi connu personnellement Klein et Lie juste avant le début de cette guerre. Ces deux mathématiciens avaient effectué un voyage à Paris au début de l'année 1870 et avaient entre autres rencontré l'auteur du tout nouveau *Traité*. Ainsi Klein se souvint-il en 1921 : « Camille Jordan m'avait fait grande impression ; son *Traité des substitutions et des équations algébriques* qui avait tout juste été publié nous [Lie et Klein] était apparu comme un livre à sept sceaux [32]. » Klein et Lie s'étaient quant à eux rencontrés un peu auparavant à Berlin et s'étaient liés d'amitié, partageant en particulier une aversion pour l'ambiance des cours et séminaires de Weierstrass et de Kummer qu'ils jugeaient trop formelle. En fait, à peine cinq jours après sa rencontre avec Klein, Lie avait envoyé deux mémoires mathématiques à Clebsch. Ce dernier avait avoué qu'il n'était pas suffisamment qualifié pour les juger, mais l'avait encouragé à entrer en contact avec Klein [33].

Netto avait lui aussi suivi les cours de Weierstrass, Kronecker et Kummer de 1866 à 1870 — aucune des sources que j'ai utilisées ne permet cependant de dire si Netto a été en contact avec Klein et Lie à ce moment [34]. Plus tard, Netto a participé au projet de l'*Encyklopädie*, en écrivant le chapitre de combinatoire, ce qui le rapproche donc de la sphère de Klein.

Notons que deux autres des mathématiciens du corpus ne s'inscrivent pas dans le clivage usuellement présenté opposant Klein et les Berlinois [35]. D'une part, Weber fut un collaborateur étroit du réseau kleinéen mais aussi un héritier de certains points de vue de Kronecker sur l'algèbre et la théorie des nombres [36]. D'autre part, Maschke fut formé au milieu des années 1870 sous l'égide du célèbre triumvirat berlinois, dont la personne de Kummer « semble avoir eu l'influence la plus durable sur son développement mathématique [37] » ; mais en 1880 il soutint sa thèse à Göttingen et revint y travailler avec Klein en 1887. Avec Oskar Bolza, il suivit cette année-là des cours de Klein portant sur les équations

31. « Theuerster Freund! Hoffentlich erlauben Sie mir noch immer Sie so zu nennen, und verbannen den Widerstreit der Nationen aus dem Reiche der Wissenschaft. Welche Zeiten und Dinge haben wir erlebt! Gott sei Dank, dass endlich der Friede uns wieder den [?] und heitern Beschäftigungen der Wissenschaft hingiebt, und es gestattet, an der Verbindung der Völker, statt an ihrer Trennung zu arbeiten. » Extrait d'une lettre de Clebsch à Jordan datée du 5 mars 1871 à Göttingen, conservée aux archives de l'École polytechnique sous la référence VI2A2(1855) 15.

32. « Einen großen Eindruck machte mir Camille Jordan, dessen traité des substitutions et des équations algébriques [sic] eben erschienen war und uns ein Buch mit sieben Siegeln erschien. » [Klein *Œuvres 1*, p. 51]. Remarquer que la désignation « livre à sept sceaux » était, au XIXe siècle, également utilisée pour les *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss.

33. Sur les premiers pas de Klein et de Lie, voir [Tobies 1981 ; Rowe 1989b ; Stubhaug 2005].

34. D'après [Lorey 1937, p. 85], aucune notice nécrologique de Netto n'a été écrite. On trouvera toutefois quelques informations sur lui dans cette référence.

35. Voir par exemple [Rowe 1989a ; Rowe 1998 ; Gray & Rowe 2000].

36. [Schappacher & Volkert 2005]. Pour les points de vue de Kronecker, voir par exemple [Edwards 1989].

37. « [Maschke] went for three year to Berlin, attracted by the famous triad Weierstrass, Kummer, and Kronecker, of whom Kummer seems to have had the most lasting influence upon his mathematical development. » [Bolza 1908, p. 85].

algébriques, mais participa aussi au séminaire de Göttingen et à des séances de travail chez Klein lui-même [38]. Après cette année passée avec Klein, Maschke aboutit notamment à des travaux dont fait partie son article du corpus. Son retour à Berlin fut ensuite décevant en raison de l'atmosphère qu'il ne jugeait pas propice au travail mathématique [39]. Comme indiqué au chapitre 1, Maschke émigra aux États-Unis un peu plus tard (en 1892) et s'impliqua alors dans le développement de l'université de Chicago.

Pour résumer, on peut distinguer trois générations (au vu des années de naissance) pour les auteurs du corpus : celle de Hesse et Kummer, celle de Jordan et Clebsch, et celle de Klein, Netto et Maschke. Ces générations coïncident avec les générations mathématiques, au sens des filiations entre professeurs et élèves. D'ailleurs, s'ils se situent entre la deuxième et la troisième génération en termes d'âge, Lie, Noether et Weber peuvent être placés dans la troisième génération mathématique, celle des collègues de Klein. Il existe en outre deux nœuds dans le réseau de personnes : Clebsch et Klein.

Certains des liens de filiation mathématique se doublent de sentiments d'amitié ou de fierté, comme on l'a vu surtout chez Hesse, Clebsch et Klein, et semblent parfois se renforcer par une opposition à Berlin. Assumés par les auteurs eux-mêmes ou revendiqués par leurs proches, ces sentiments participent à la construction d'un groupe social resserré, ce qui laisse préfigurer des circulations intenses d'idées mathématiques dans notre corpus des équations de la géométrie.

3.2 Les textes du corpus

Avant de décrire le contenu mathématique des textes du corpus, examinons de plus près les liens qu'entretiennent entre eux ces textes, surtout au niveau des citations [40]. Pour s'en faire une première idée, on trouvera en figure 3.3 le graphe des citations entre les textes du corpus, où les flèches pleines représentent une citation explicite. Les deux flèches en pointillés partant de [Lie 1872] signifient que Lie donne dans son texte une référence qui est manifestement erronée et qui devrait être très probablement soit [Kummer 1863], soit [Clebsch 1868] (sans qu'il soit possible de trancher, voir *infra* la citation de Lie). Je souligne que tout comme pour la création du corpus, seules les citations explicites ont été prises en compte. En outre, par souci de clarté, une seule case a été représentée pour le *Traité des substitutions et des équations algébriques* et les petites publications qui en

38. [Parshall & Rowe 1994, p. 199].

39. Voir [Parshall & Rowe 1994, p. 202], et en particulier l'extrait de lettre écrite de Maschke à Klein qui y est cité : « everyone here [in Berlin] works in isolation and can hardly be moved to talk about his [research]. » Notons toutefois que des échos inverses existent. Par exemple, C. Goldstein m'a indiqué qu'Axel Thue décrivait au contraire de façon très positive l'ambiance à Berlin à la fin du XIXe siècle. Certains mathématiciens semblent donc forcer le trait selon leurs propres inclinaisons mathématiques, polarisant ainsi la situation entre Berlin et Göttingen.

40. Sur les réseaux de textes, les liens de citation et leur utilisation en histoire des mathématiques, voir [Goldstein 1999].

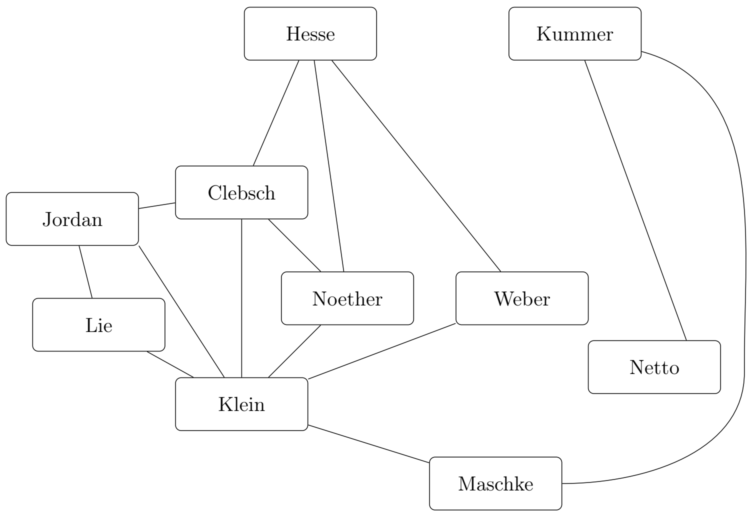


FIGURE 3.2 – Liens entre les auteurs du corpus des équations de la géométrie

sont plus ou moins des extraits — je préciserai dans la description qui suit quels sont les morceaux du *Traité* ou lesquelles de ces publications sont citées suivant les cas.

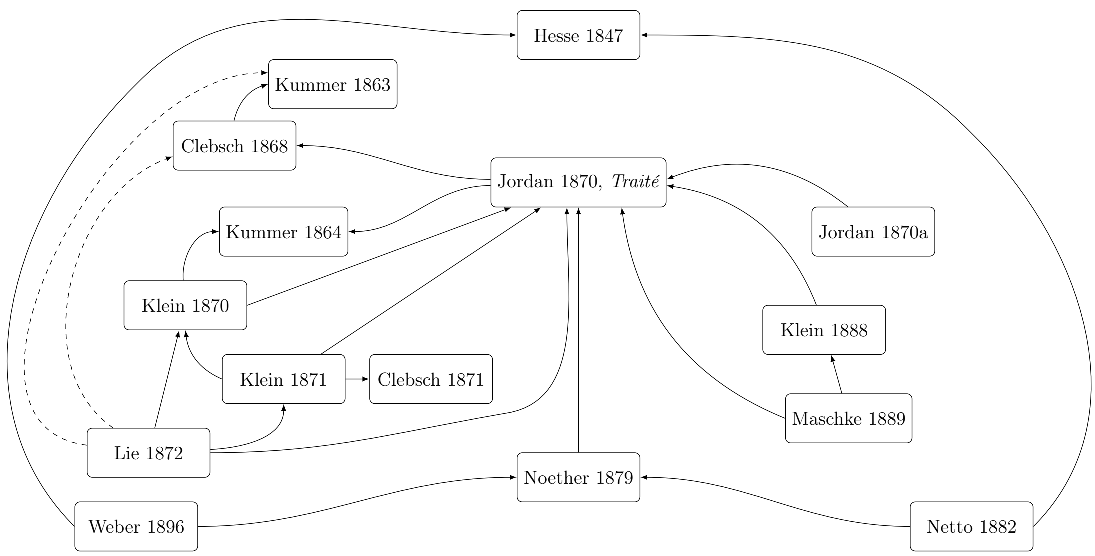


FIGURE 3.3 – Citations entre les textes du corpus.

Je me contenterai d'utiliser ce graphe pour brosser ici une image encore grossière du corpus. Il indique déjà que la répartition des auteurs par affinité (telle que décrite précédemment) ne se retrouve pas tout à fait ici : par exemple, alors que Kummer qui était plutôt isolé du groupe centré autour de Clebsch et Klein, ses textes se trouvent ici cités justement par ces mathématiciens-là.

Le graphe montre aussi un corpus assez resserré et cohérent au niveau des citations. On y devine un nœud, le *Traité* de Jordan, et trois sous-réseaux de textes. Ces sous-réseaux sont formés (outre le *Traité* qu'ils contiennent tous) respectivement de [Hesse 1847 ; Noether 1879 ; Netto 1882 ; Weber 1896], de [Kummer 1863 ; Kummer 1864 ; Clebsch 1868 ; Klein 1870 ; Clebsch 1871b ; Klein 1871b ; Lie 1872] et de [Klein 1888 ; Maschke 1889]. À première vue, la note [Jordan 1870a] est quant à elle liée seulement au *Traité*.

Les citations qui lient tous ces textes ont plusieurs statuts : les descriptions dans les paragraphes qui suivent montreront surtout des citations d'attribution de premiers travaux, sans transfert mathématique, mais aussi des citations concernant des résultats ou méthodes reprises comme bases de travail et quelques-unes associées à des résultats mathématiques retrouvés de différentes façons. Noter enfin que les citations ne concernent pas systématiquement des équations de la géométrie. Par exemple, [Klein 1871b] cite [Kummer 1864] pour des résultats géométriques sur une surface quartique, mais par pour l'équation de la géométrie apparaissant dans l'article de Kummer.

Je vais à présent commencer la description des textes du corpus un à un, dans l'ordre chronologique. Je n'adopterai donc pas un découpage basé sur l'existence des trois sous-réseaux évoqués plus haut, mais reviendrai après coup sur ces sous-réseaux en discutant justement de leur signification vis-à-vis des équations de la géométrie. Certains aspects techniques des démonstrations ne seront analysés qu'au chapitre suivant, le but ici étant surtout d'introduire les textes en présentant leurs objectifs, la façon dont les équations de la géométrie y apparaissent et leurs liens aux autres textes du corpus.

3.2.1 L'article de Hesse, 1847

Dans son article du corpus, [Hesse 1847], Hesse propose de montrer la résolubilité algébrique de toute équation X du neuvième degré dont les racines $x_1, \ldots, x_9$ sont liées trois par trois par des relations rationnelles et symétriques avec la propriété que si une telle relation est $x_\mu = \theta(x_\chi, x_\lambda)$, alors on a aussi $x_\lambda = \theta(x_\mu, x_\chi)$ et $x_\chi = \theta(x_\lambda, x_\mu)$. Dès l'introduction, Hesse place ce résultat dans la lignée des travaux d'Abel sur la résolution d'équations algébriques particulières et rappelle une conjecture qu'Abel avait donnée dans un mémoire de 1830, [Abel 1830] : si une équation irréductible de degré premier possède la propriété que parmi trois quelconques de ses racines, l'une est toujours fonction rationnelle des deux autres, alors cette équation est résoluble par radicaux. Pour Hesse, les résultats de son article montrent que l'hypothèse d'Abel de primalité du degré n'est pas nécessaire [41].

Remarquer que cette mention d'Abel ainsi que la formulation même de la propriété définissant les équations étudiées ici par Hesse renvoient à des travaux de théorie des équations du premier tiers du XIXᵉ siècle que j'ai déjà évoqués, concernant les équations d'Abel, de Galois [42] ou cyclotomiques.

41. « An diesen noch nicht bewiesenen Satz will ich einige Bemerkungen anschliessen, indem ich die Bestimmung aufhebe, dass die Zahl, welche den Grad der Gleichung angiebt, eine Primzahl sein müsse. » [Hesse 1847, p. 193].

42. Je rappelle qu'à cette époque, une équation de Galois est une équation de degré premier, dont toutes

Hesse indique dans une note de bas de page que l'étude de ces équations de degré 9 lui ont été suggérées par Carl Gustav Jacob Jacobi après que ce dernier lut ses travaux sur les courbes cubiques :

> J'extrais le passage suivant d'une lettre datée de janvier 1844 et écrite à Rome par le professeur Jacobi à qui j'avais communiqué les premiers résultats de mes recherches sur les points d'inflexion. « Vous pourrez également probablement résoudre le problème général suivant : résoudre une équation du neuvième degré lorsqu'une fonction rationnelle et symétrique $F(x, x')$ de deux racines quelconques x, x' donne toujours une troisième racine x'' de sorte que si $F(x, x') = x''$, alors $F(x', x'') = x$ et $F(x'', x) = x'$. Car c'est le cas ici pour les équations des points d'inflexion des courbes du troisième ordre. Ainsi serait révélée une nouvelle classe d'équations algébriques résolubles, totalement différentes de celles auxquelles Abel a appliqué les méthodes de Gauss. » J'ai entrepris la présente recherche sur les équations du neuvième degré suite à cette suggestion [43]. [Hesse 1847, p. 202]

Les recherches mentionnées dans cette citation sont probablement celles qui avaient été publiées dans deux articles conjoints de 1844, [Hesse 1844a ; Hesse 1844b], où Hesse prouvait notamment que les points d'inflexion d'une courbe d'ordre n sont les intersections de cette courbe avec une autre de degré $3(n-2)$ — cette courbe sera appelée plus tard la *courbe hessienne* de la première courbe [44]. Dans le cas particulier où $n = 3$, il en déduisait le fait que toute courbe cubique possède neuf points d'inflexion. Toujours dans ces articles de 1844, Hesse avait également prouvé que les douze droites contenant les points d'inflexion [45] forment en tout quatre triangles contenant chacun les neuf points d'inflexion.

Revenons à l'article de Hesse du corpus. Pour étudier les équations qui en sont l'objet [46],

---

les racines s'expriment rationnellement en fonction de deux fixées d'entre elles.

43. « Aus einem vom Januar 1844 aus Rom datirten Schreiben des Herrn Professor Jacobi, dem ich die ersten Resultate meiner Untersuchung über die Wendepunkte mitgetheilt hatte, hebe ich folgende Stelle heraus. „Sie werden wahrscheinlich auch das allgemeine Problem lösen können: eine Gleichung neunten Grades aufzulösen, wenn eine gegebene rationale symmetrische Function $F(x, x')$ je zweier Wurzeln x, x' immer wieder eine dritte Wurzel giebt, in der Art, dass wenn $F(x, x') = x''$, auch $F(x', x'') = x$, $F(x'', x) = x'$ ist. Denn dieses ist hier bei den Gleichungen der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung der Fall. Es würde sich so eine neue Classe von auflösbaren algebraischen Gleichungen eröffnen, welche von denen, auf die Abel die Gauss'sche Methode ausgedehnt hat, total verschieden sind.“ Auf diese Andeutung hin habe ich die vorliegende Untersuchung der Gleichung neunten Grades unternommen. »

44. Rappelons que si une courbe a pour équation (en coordonnées homogènes) $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, sa courbe hessienne est la courbe d'équation $H(x_1, x_2, x_3) = 0$, où $H = \det\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. Les points d'inflexion de la courbe $f = 0$ sont alors les points d'intersection de la courbe avec sa courbe hessienne. D'après le chapitre de l'*Encyklopädie* sur les courbes cubiques et quartiques, le nom de « courbe hessienne » serait dû à Cremona, [Kohn 1908, p. 469].

45. L'alignement trois par trois des points d'inflexion était déjà connu. L'article de l'*Encyklopädie* sur les courbes cubiques et quartiques, [Kohn 1908], indique que ce résultat avait été prouvé déjà par Jean-Paul de Gua de Malves et par Colin Maclaurin au début du XVIIIe siècle.

46. Pour être tout à fait précis, je souligne qu'avant d'étudier les équations décrites dans le titre de son article, Hesse consacre un peu de place à d'autres équations de degré 9, ayant la propriété que trois de leurs racines sont liées par une relation de la forme $x_3 = \theta(x_1, x_2)$, mais où l'action de remplacer x_2 par une autre racine ne change pas la valeur de $\theta(x_1, x_2)$ — les équations décrites dans le titre correspondent au cas où cette action donne plusieurs valeurs de $\theta(x_1, x_2)$. Je me contenterai dorénavant de regarder les

Hesse commence par montrer que leurs neuf racines peuvent se grouper trois par trois, formant ainsi 12 triplets de racines qu'il qualifie de « conjuguées » — les racines d'un triplet sont des racines x_χ, x_λ, x_μ qui sont liées par des relations θ, c'est-à-dire que l'on a $x_\mu = \theta(x_\chi, x_\lambda)$, $x_\lambda = \theta(x_\mu, x_\chi)$ et $x_\chi = \theta(x_\lambda, x_\mu)$. Les douze triplets sont représentés par Hesse dans un tableau :

$$\begin{array}{ccc} x_1x_2x_3 & x_4x_5x_6 & x_7x_8x_9 \\ x_2x_4x_7 & x_3x_5x_8 & x_1x_6x_9 \\ x_5x_7x_1 & x_6x_8x_2 & x_4x_9x_3 \\ x_8x_1x_4 & x_9x_2x_5 & x_7x_3x_6. \end{array}$$

À partir de ces triplets de racines, Hesse construit ensuite des équations auxiliaires de degrés respectifs 3 et 4 dont il montre que ce sont des résolvantes des équations de degré 9 considérées. Cela lui permet de conclure quant à la résolubilité par radicaux de ces équations de degré 9.

Hesse se tourne alors vers l'équation aux points d'inflexion. Il définit celle-ci comme étant le résultat de l'élimination d'une variable entre l'équation de la courbe cubique et celle de sa hessienne. Pour montrer que l'équation ainsi obtenue est bien du type de celles qu'il a étudiées en amont, Hesse fait référence à un article de Jean-Victor Poncelet, [Poncelet 1832], pour rappeler que les neuf points d'inflexion sont alignés trois par trois. Cette propriété géométrique lui permet de prouver que les racines de l'équation aux neuf points d'inflexion vérifient la propriété décrite dans le titre de l'article : trois racines sont liées par des relations θ lorsque les points qu'elles représentent sont alignés. Finalement, puisque l'équation aux points d'inflexion appartient à la classe d'équations étudiées par Hesse, elle est résoluble par radicaux, et ce résultat conclut l'article de Hesse.

3.2.2 Deux articles de Kummer sur les surfaces quartiques, 1863-1864

Les deux références de Kummer qui apparaissent dans le corpus sont datées de 1863 et 1864. Ces années correspondent aux débuts de ce qui a été appelé « troisième période » de Kummer, placée sous le signe de la géométrie [47]. Au vu de ses *Collected papers*, les premiers travaux géométriques de Kummer ont été publiés en 1862 et 1863 (certains sont datés de 1860) ; ce sont des recherches sur les systèmes de rayons issus de la théorie des surfaces caustiques [48], mais aussi sur des modèles concrets de tels systèmes et de surfaces

équations du titre, qui occupent bien plus de place dans l'article et qui sont celles liées aux neuf points d'inflexion des cubiques.

47. Voir [Lampe 1892-93] et André Weil dans la préface de [Kummer *Œuvres*, vol. 2]. Les première et deuxième périodes correspondent respectivement à la théorie des fonctions et à la théorie des nombres. D'après Emil Lampe, Kummer avait trouvé ses idées de base sur la géométrie à partir des *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss, [Gauss 1828].

48. En lien avec l'optique géométrique, la théorie des caustiques consiste à étudier les enveloppes de rayons réfléchis ou réfractés par des surfaces données. Les enveloppes obtenues sont les *surfaces caustiques*, ou *Brennflächen* en allemand.

particulières [49]. On pourra noter qu'à cette époque, Kummer était très intéressé par le traité de géométrie à trois dimensions de George Salmon, qu'il étudiait « avec diligence et plaisir [50] ».

Les articles de Kummer du corpus sont consacrés à des surfaces quartiques particulières : certaines contenant des coniques et d'autres ayant seize points singuliers — ces dernières ont été appelées « surfaces de Kummer » peu de temps après. À l'instar des autres articles de géométrie des *Collected Papers* de Kummer, ceux du corpus ne visent pas un résultat particulier et sont plutôt des collections (plus ou moins cohérentes) de résultats comme l'étude de l'existence de singularités, celle des relations d'incidence existant entre divers éléments associés à la surface ou d'intersections particulières entre de tels éléments, ou encore la discussion de divers cas particuliers de surfaces. Un exemple typique est le suivant. Dans l'article sur les surfaces quartiques contenant des coniques, [Kummer 1863], Kummer prouve que si une surface quartique contient une section conique avec multiplicité 2 et exactement deux autres points doubles tels que la droite qui les joint ne rencontre pas la conique, alors tout plan contenant ces points doubles intersecte la surface quartique en deux coniques.

Vers la fin de ce même article, Kummer démontre qu'une surface quartique contenant une conique double est intersectée par tout plan tangent double en une paire de coniques. Il considère ensuite la forme générale de l'équation d'une telle surface, qui est $\phi^2 = 4p^2\psi$, où ϕ, ψ sont des formes quadratiques et p est une forme linéaire [51]. Cette équation est alors équivalente à $(\phi+2\lambda p^2)^2 = 4p^2(\psi+\lambda\phi+\lambda^2p^2)$ pour tout paramètre λ. Kummer en déduit que si $\psi + \lambda\phi + \lambda^2p^2 = 0$ est l'équation d'un cône, alors tout plan tangent à ce cône est tangent à la surface quartique en deux points de contact et l'intersecte en deux coniques supplémentaires. Il poursuit :

> La condition, aisément développable, que $\psi+\lambda\phi+\lambda^2p^2 = 0$ représente un cône conduit à une équation du cinquième degré pour la constante λ, dont les cinq racines donnent cinq cônes [52]. [Kummer 1863, p. 335]

Cette équation du cinquième degré en λ est la seule équation de la géométrie qui apparaît dans l'article de Kummer de 1863. Elle est donc prise en considération dans le but de trouver le nombre de cônes cherchés. La fin de l'article consiste ensuite en une discussion des racines de cette équation : par exemple, Kummer indique que si l'équation a des racines imaginaires, alors les plans tangents correspondants sont également imaginaires.

L'autre article de Kummer présent dans le corpus, [Kummer 1864], débute avec la preuve de l'existence de surfaces quartiques ayant seize points singuliers et la preuve que

49. Au sujet de modèles mathématiques, de Klein et de la surface dite de Kummer, voir [Rowe 2013].

50. Voir une lettre datée de juillet 1862 de Kummer à Kronecker, [Kummer *Œuvres*, vol. 1, p. 100].

51. L'intersection de la surface avec le plan d'équation $p = 0$ a donc pour équation $\phi^2 = 0$, ce qui représente une conique double (dans le plan $p = 0$).

52. « Die leicht zu entwickelnde Bedingung, dass $\phi + \lambda\phi + \lambda^2p^2 = 0$ eine Kegelfläche darstelle, führt auf eine Gleichung fünften Grades für die Constante λ, deren fünf Wurzeln fünf Kegelflächen geben ».

ce nombre est le nombre maximal de singularités que peut avoir une surface quartique [53]. Kummer démontre aussi que les seize points singuliers sont coplanaires six à six [54], qu'il y a 16 tels plans (dit *plans tangents singuliers*) et que ces seize plans se coupent six à six en chacun des points singuliers. Un paragraphe est également consacré à la description d'un modèle en fil de fer d'une surface avec seize singularités.

Kummer indique ensuite comment relier ces surfaces à la théorie des caustiques et montre le résultat suivant [55] :

> Le système de de rayons complet d'ordre 12 et de classe 28 qui a pour surface caustique une surface générale du quatrième ordre consiste, lorsque cette caustique possède seize points singuliers, d'abord en 16 systèmes de rayons, chacun ne consistant qu'en l'ensemble des droites d'un plan ; deuxièmement de quatre systèmes de rayons d'ordre 2 et de classe 2 ; et troisièmement en un système de rayons d'ordre 4 et classe 4. [Kummer 1864, p. 258]

Kummer explique alors que si le plan contenant les douze rayons des quatre systèmes de classe 2 et du système de classe 4 est un plan tangent à la surface, alors les 12 rayons coïncident deux à deux. Les six rayons ainsi obtenus deviennent des droites tangentes à la surface qui se rencontrent toutes en un autre point de la surface. Il en déduit immédiatement :

> L'équation de degré 6 avec laquelle sont déterminées, sur la surface du quatrième ordre la plus générale, les six tangentes ayant un point de contact commun et touchant la surface en un autre point se scinde, pour la surface avec seize points singuliers, en quatre facteurs de degré 1 et un facteur de degré 2 qui peuvent être exprimés rationnellement avec les coordonnées du point de contact commun [56]. [Kummer 1864, p. 259]

Il s'agit de l'unique équation de la géométrie dans l'article de Kummer. Cette équation n'est donc pas au cœur de la recherche. Elle apparaît plutôt comme une remarque incidente, suivant des propriétés géométriques : l'équation se scinde en quatre facteurs de degré 1 et un facteur de degré 2 parce que les six droites se groupent en quatre « systèmes » d'une droites et un « système » de deux droites. Le rôle secondaire de l'équation de la géométrie

53. Ces singularités sont des points coniques (ou points nœuds), c'est-à-dire si $F = 0$ est l'équation de la surface, alors la différentielle première de F s'annule en ces points, mais sa différentielle seconde est une forme non dégénérée.

54. Plus précisément, les seize points singuliers sont situés six à six sur une même conique.

55. « Das vollständige Strahlensystem 12ter Ordnung und 28ter Klasse, welches eine allgemeine Fläche vierten Grades zur Brennfläche hat, besteht, wenn diese Brennfläche vierten Grades 16 singuläre Punkte hat, erstens aus 16 Strahlensystemen, deren jedes nur aus allen in einer Ebene liegenden graden Linien besteht, zweitens aus vier Strahlensystemen zweiter Ordnung und zweiter Klasse, und drittens aus einem Strahlensysteme vierter Ordnung und vierter Klasse. »

56. « Die Gleichung sechsten Grades, durch welche auf der allgemeinsten Fläche vierten Grades die sechs Tangenten bestimmt werden, die einen Berührungspunkt gemein haben, und die Fläche außerdem jede noch einmal berühren, zerfällt für die Flächen vierten Grades mit 16 singulären Puntken in vier Faktoren ersten Grades und einen Faktor zweiten Grades, welche durch die Coordinaten des gemeinsamen Berührungspunktes rational ausgedrückt werden. »

dans cet article est d'ailleurs attesté par une lettre que Kummer écrit à Kronecker [57] : Kummer y commente de façon détaillée le résultat concernant les systèmes de rayons mais ne mentionne ni l'équation algébrique correspondante, ni *a fortiori* sa factorisation.

3.2.3 Clebsch et les surfaces quartiques à conique double, 1868

Le premier article du corpus écrit par Clebsch est consacré à des surfaces quartiques particulières, celles contenant une conique double, [Clebsch 1868]. D'après les auteurs de la notice nécrologique de Clebsch, cet article appartient au groupe de travaux concernant la théorie des représentations de surfaces [58]. De tels travaux avaient commencé en 1865 avec une publication dans laquelle Clebsch avait prouvé la possibilité de représenter une surface cubique sur un plan. Après cela, il avait traité d'autres exemples : la surface dite de Steiner, les surfaces cubiques réglées et enfin les surfaces quartiques à conique doubles, qui sont l'objet de l'article de Clebsch en jeu dans ce paragraphe [59]. Un des principaux objectifs principaux de la théorie des représentations de surfaces était l'étude de la « géométrie des surfaces [60] », c'est-à-dire la recherche et l'étude de points et courbes particuliers inclus dans les surfaces.

Afin d'établir les représentations des surfaces particulières qui viennent d'être énumérées, Clebsch s'appuyait sur des travaux déjà existants sur ces surfaces ; dans le cas des surfaces quartiques à conique double, la référence principale est l'article de Kummer qui a été décrit plus haut, [Kummer 1863]. Dans le premier paragraphe de l'article, Clebsch définit les surfaces quartiques qu'il est sur le point d'étudier, donne les formules de sa représentation sur un plan et affirme qu'il existe exactement 16 droites sur ces surfaces.

C'est justement l'équation aux seize droites des surfaces quartiques à conique double qui apparaît principalement dans l'article. Bien que la place qui lui est accordée soit quantitativement modeste, cette équation apparaît dès la conclusion du second paragraphe, après plusieurs résultats concernant les possibles groupements des seize droites. Cette équation de la géométrie semble ainsi être davantage un objet d'intérêt en lui-même, et explicitement relié aux groupements de droites. L'équation fait l'objet de deux autres paragraphes, l'un consacré à la preuve que le nombre de droites dans la surface est bien 16, l'autre à un raffinement de son processus de résolution.

La première apparition de l'équation aux seize droite survient donc à la fin du deuxième paragraphe. Juste avant cela, Clebsch étudie les relations d'incidence existant entre les seize droites et représente ces relations dans différents tableaux, le quatrième et dernier de ces

57. [Kummer *Œuvres*, vol. 1, p. 101].

58. [Brill, Gordan et al. 1873, p. 30-37]. Les autres groupes de travaux décrits dans cette notice sont associés respectivement à la physique mathématique, au calcul des variations, aux courbes et surfaces algébriques, à l'application des fonctions abéliennes à la géométrie et à la théorie des invariants.

59. Les représentations de surfaces cubiques et quartiques à conique double, utilisées par Geiser, ont été décrites au chapitre précédent.

60. [Brill, Gordan et al. 1873, p. 33].

tableaux étant le suivant :

2, 6;	3, 7;	4, 8;	5, 9.	1, 16;	10, 15;	11, 14;	12, 13.
1, 6;	3, 10;	4, 11;	5, 12.	2, 16;	7, 15;	8, 14;	9, 13.
1, 7;	2, 10;	4, 13;	5, 14.	3, 16;	6, 15;	8, 12;	9, 11.
1, 8;	2, 11;	3, 13;	5, 15.	4, 16;	6, 14;	7, 12;	9, 10.
1, 9;	2, 12;	3, 14;	4, 15.	5, 16;	6, 13;	7, 11;	8, 10.

Les entrées de ce tableau sont des couples de droites (parmi les seize) soumis aux règles suivantes. Deux droites forment un couple si et seulement si elles sont sécantes (par exemple, les droites notées 2 et 6 sont sécantes). À chaque couple en correspondent trois autres dont les droites ne coupent pas celles du premier couple (ainsi, les couples $(3,7)$, $(4,8)$ et $(5,9)$ sont associés à $(2,6)$ car les droites $3,7,\dots,9$ ne rencontrent pas 2 et 6). On obtient ainsi des quadruplets de couples, qui peuvent à leur tour être associés deux par deux (sur une ligne du tableau) de sorte que deux quadruplets associés contiennent chacun des seize droites.

Juste après ce tableau, Clebsch écrit :

> Ce tableau est important surtout parce qu'il apprend que *l'équation du seizième degré dont dépendent les seize droites de la surface se résout à l'aide d'une équation du cinquième degré.* Cette équation, qui délivre les cinq couples de groupes (IV.), n'est autre que celle à l'aide de laquelle Monsieur *Kummer* a obtenu les cinq cônes du second ordre dont les arêtes touchent doublement la surface en question, [Kummer 1863] [61]. [Clebsch 1868, p. 145]

Ce résultat, que Clebsch n'explique pas autrement que par le fait qu'il se déduit du tableau lui-même, termine le paragraphe concernant les groupements de droites et Clebsch n'évoque à nouveau l'équation aux seize droites que bien plus loin dans son article.

Comme écrit précédemment, l'apparition suivante de l'équation aux seize droites est liée à la preuve que 16 est bien le nombre de droites sur la surface. Pour cela, Clebsch cherche des équations de lieux géométriques entre lesquels faire une élimination conduit à l'équation des droites de la surface, et il montre que le résultat de cette élimination est bien de degré 16. Dans ces calculs, Clebsch se base en particulier sur des résultats de l'article de Kummer plusieurs fois cité, [Kummer 1863], comme celui donnant la forme générale de l'équation d'une surface quartique à conique double. Il explique ensuite comment l'équation aux seize droites peut être résolue :

61. « Diese Tafel ist vorzugsweise von Wichtigkeit, weil sie lehrt, *dass die Gleichung sechzehnten Grades, von welcher die sechzehn Geraden der Oberfläche abhängen, mit Hülfe einer Gleichung fünften Grades gelöst wird.* Diese Gleichung, welche die fünf Paare von Gruppen (IV.) liefert, ist keine andere, als diejenige mit deren Hülfe Herr *Kummer* die fünf Kegel zweiter Ordnung erhalten hat, deren Seiten die fragliche Fläche doppelt berühren (Sitzung der Berl. Acad. vom 16. Juli 1863). »

1. Recherche d'une racine de l'équation de degré 5 dont dépendent les cinq cônes.
2. Résolution d'une équation quadratique [par laquelle] se déduisent les deux familles de coniques.
3. Résolution complète de deux équations biquadratiques [...] qui donnent les 2.4 couples de droites des deux familles de coniques.
4. Résolution de huit équations quadratiques donnant les droites seules des huit couples [62]. [Clebsch 1868, p. 172-173]

Ces étapes font à chaque fois référence à des morceaux du raisonnement que Clebsch a mené pour trouver les équations conduisant à l'équation aux seize droites [63]. À chacune de ces étapes intervient une équation de la géométrie, comme « l'équation de degré 5 dont dépendent les cinq cônes », etc.

Clebsch revient encore une fois sur l'équation aux seize droites dans un paragraphe où il propose un raffinement du procédé de résolution de celle-ci. Essentiellement, Clebsch montre qu'en résolvant complètement l'équation des cinq cônes, seules quatre équations quadratiques supplémentaires sont nécessaires pour résoudre l'équation aux seize droites.

3.2.4 Le *Traité des substitutions et des équations algébriques*, 1870

Le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Jordan a déjà été présenté en détail au chapitre précédent, de même que la note concernant les ennéaèdres, [Jordan 1870a]. Rappelons que le chapitre des applications géométriques est divisé en six paragraphes, dévolus à autant de situations géométriques. Je vais ici décrire les paragraphes I, II et IV, qui sont ceux qui ne sont pas liés aux vingt-sept droites des surfaces cubiques et qui ne sont donc pas apparus au dernier chapitre — pour mémoire, les paragraphes III, V et VI sont consacrés respectivement aux seize droites des surfaces quartiques à conique double, aux vingt-sept droites des surfaces cubiques et à des problèmes de contact qui incluent les vingt-huit tangentes doubles des courbes quartiques.

Neuf points d'inflexion

Ce premier paragraphe des applications géométriques du *Traité* est intitulé « Équation de M. Hesse » et concerne les neuf points d'inflexion des courbes cubiques. Pour étudier

62. « 1. Aufsuchung einer Wurzel der Gleichung fünften Grades, von welcher die fünf Kegel abhängen. 2. Auflösung einer quadratischen Gleichung [...]. Durch diese quadratische Gleichung werden die beiden Kegelschnittschaaren [...] ermittelt. 3. Vollständige Auflösung zweier biquadratischen Gleichungen [...], welche die 2.4 Geradenpaare der beiden Kegelschnittschaaren liefern. 4. Auflösung der acht quadratischen Gleichungen, welche die einzelnen Geraden der acht Paare geben. »

63. Il est possible de lire ces étapes tout en regardant rétrospectivement le tableau des relations d'incidence reproduit précédemment. La recherche d'une racine de l'équation des cônes correspond à la sélection d'une des lignes du tableau ; la résolution de l'équation quadratique des familles de coniques correspond à la séparation des deux groupes de quadruplets de couples d'une ligne ; les équations biquadratiques permettent de trouver séparément les couples de ces quadruplets ; enfin, chaque tel couple est séparé en ses droites par une équation quadratique.

l'équation correspondante, Jordan se base sur les relations d'alignement des points d'inflexion pour créer une fonction φ :

> On sait que *les neuf points d'inflexion d'une courbe du troisième degré sont situés trois à trois sur douze droites, qui s'y coupent quatre à quatre.* Désignons ces points, ou les racines de l'équation X dont ils dépendent, par le symbole (xy), chacun des indices étant variable de 0 à 2 (mod 3) : et représentons par $(xy)(x'y')(x''y'')$ la droite qui passe par les points $(xy), (x'y'), (x''y'')$; il est aisé de voir que les douze droites correspondent aux douze termes de l'expression
>
> $$\varphi = (00)(01)(02) + (10)(11)(12) + \cdots + (02)(20)(11)$$
>
> formée par les produits tels que $(xy)(x'y')(x''y'')$ qui satisfont aux relations
>
> $$x + x' + x'' \equiv y + y' + y'' \equiv 0 \mod 3.$$
>
> [Jordan 1870b, p. 302]

Remarquer que Jordan ne donne ici aucune référence, que ce soit pour les résultats d'incidence des points d'inflexion ou pour l'utilisation de la notation (xy). Comme le paragraphe en question est intitulé « Équation de M. Hesse » et que la préface du *Traité* mentionne les « célèbres Mémoires de M. Hesse sur les points d'inflexion courbes du troisième ordre », [Jordan 1870b, p. VI], on peut raisonnablement penser que Jordan vise les travaux de Hesse que nous avons décrit précédemment, [Hesse 1844a ; Hesse 1844b ; Hesse 1847]. En ce qui concerne la notation (xy) et la condition d'alignement exprimée grâce à elle, on peut les trouver dans un mémoire de Clebsch, [Clebsch 1864b], consacré à l'utilisation des fonctions elliptiques en géométrie [64].

Après avoir introduit la fonction φ, Jordan en étudie le groupe [65] — forme des substitutions, cardinal, sous-groupes distingués — et en déduit que l'équation aux neuf points d'inflexion est résoluble par radicaux.

Ce résultat ne conclut pas le §I, car Jordan énonce ensuite :

> Théorème. — Si une équation du neuvième degré est irréductible, et telle, que deux quelconques de ses racines, a et b, étant données, on puisse en déduire une troisième c,

64. Dans ce mémoire, Clebsch montre que toute courbe cubique (lisse) peut être paramétrée par une fonction elliptique sn (notation de Jacobi). Il montre en particulier que trois points M_1, M_2, M_3 de cette courbe, de paramètres respectifs u_1, u_2, u_3, sont alignés si et seulement si $\mathrm{sn}(u_1 + u_2 + u_3) = 0$. Dans le cas où $M_1 = M_2 = M_3$, il s'agit d'un point d'inflexion, et l'unique paramètre u_1 vérifie alors $\mathrm{sn}(3u_1) = 0$. Cette dernière condition équivaut à dire que u_1 est de la forme $u_1 = \frac{p\omega+q\omega'}{3}$, où p, q sont des entiers et ω, ω' sont les périodes de la fonction sn. Clebsch retrouve ainsi autant de points d'inflexion que de couples (p, q) d'entiers modulo 3. Tout cela coïncide donc avec ce qui est présenté par Jordan. Avec un point de vue actuel, il s'agit de réaliser une loi de groupe sur une cubique par les fonctions elliptiques, les points d'inflexion étant les éléments d'ordre 3 de ce groupe. Au sujet de la loi de groupe sur les cubiques, voir [Schappacher 1991], dans lequel l'article de Clebsch décrit ici n'apparaît d'ailleurs pas.

65. En termes actuels, il montre que c'est le groupe affine $\mathrm{GA}_2(\mathbf{F}_3)$.

> liée à a et b par les relations suivantes :
>
> $$c = \psi(a,b), \quad b = \psi(b,a), \quad a = \psi(b,c)$$
>
> (où ψ désigne une fonction rationnelle, symétrique par rapport aux deux variables qu'elle contient), le groupe de cette équation sera contenu dans [le groupe de la fonction φ]. [Jordan 1870b, p. 304]

Les équations dont il s'agit ici ne sont pas géométriques. Au contraire, la façon qu'a Jordan de présenter les choses donne plutôt l'impression qu'il désincarne géométriquement l'équation aux neuf points pour énoncer ce théorème. Vu sous cet angle, la démarche est inversée par rapport à Hesse qui avait d'abord étudié l'équation non géométrique avant de montrer que l'équation aux neuf points en était une réalisation.

Jordan propose enfin une sorte de généralisation du théorème précédent, toujours sans lien avec une quelconque configuration géométrique. Il considère en effet les équations du huitième degré telles que si trois de leurs racines a, b, c sont données, il en existe une quatrième d telle que

$$d = \psi(a,b,c), \quad c = \psi(d,a,b), \quad b = \psi(c,d,a), \quad a = \psi(b,c,d),$$

où ψ est à nouveau une fonction rationnelle et symétrique. Jordan indique alors que ces équations « ont été considérées par M. Mathieu [et] se traitent exactement par les mêmes principes [que ce qui précède dans le *Traité*] », [Jordan 1870b]. Encore une fois, Jordan ne donne pas de référence ; il s'agit très probablement d'un mémoire de 1861 dans lequel ces équations sont étudiées parmi d'autres, [Mathieu 1861], et qui est d'ailleurs cité dans l'article de Noether de notre corpus.

« Équations de M. Clebsch »

Le deuxième paragraphe des applications géométriques s'appelle « Équations de M. Clebsch ». En guise d'ouverture, Jordan cite le mémoire de Clebsch sur l'application des fonctions abéliennes à la géométrie, [Clebsch 1864a], pour énoncer : « Le problème de déterminer une courbe du troisième ordre dont les points d'intersection avec une courbe donnée C du quatrième ordre coïncident quatre à quatre conduit à une équation X du degré 4^6 », [Jordan 1870b, p. 305] — je souligne que dans le mémoire cité, Clebsch montre qu'il existe 4^6 courbes du troisième ordre solutions de ce problème, mais il ne parle à aucun moment d'équation algébrique associée.

Jordan procède ensuite comme pour les neuf points d'inflexion : il introduit une notation adéquate des racines de cette équation de degré 4^6 et s'en sert pour créer une fonction φ, en s'aidant de relations de congruences. Il consacre ensuite plusieurs pages à la recherche de l'ordre du groupe de φ, de ses facteurs de composition, etc.

Dans la fin du paragraphe II, Jordan énumère un certain nombre d'autres équations de la géométrie associées à d'autres problèmes traités par Clebsch dans le mémoire cité précédemment, comme par exemple l'« équation du degré 3^{20} qui détermine les courbes du cinquième ordre dont les points d'intersection avec une courbe donnée du sixième ordre coïncident trois à trois », [Jordan 1870b, p. 308]. Sans détailler les calculs, Jordan indique que toutes les équations énumérées se traitent comme ce qu'il a fait plus haut, et donne la forme des substitutions de leur groupe.

Seize points singuliers

Les seize points singuliers de la surface de Kummer font l'objet du quatrième paragraphe des applications géométriques du *Traité*; ce chapitre est reproduit presque tel quel dans un des articles de Jordan du corpus, [Jordan 1869d]. Jordan y cite le mémoire de Kummer sur ce sujet et décrit *supra*, [Kummer 1864].

Là encore, le mode opératoire consiste à utiliser des relations d'incidence pour créer une fonction φ en conséquence. Ces relations sont, dans cette situation, que les seize points singuliers de la surface de Kummer sont situés six à six sur seize plans, et que réciproquement ces seize plans s'intersectent six à six en chacun des seize points singuliers. Après investigation du groupe de la fonction φ, le résultat auquel aboutit Jordan est que l'équation aux seize points singuliers se résout par la résolution d'une équation générale de degré 6 puis par l'adjonction de quatre racines carrées.

Jordan conclut son paragraphe par une généralisation : il indique ainsi que les équations de degré 2^{2n} dont le groupe a la même structure que celui de l'équation aux seize points se résolvent par une équation de degré $2^{2n-1} - 2^n$ et par $2n$ équations du second degré. Ces équations de degré 2^{2n} ne sont pas géométriques, comme c'était le cas pour les équations que Jordan avait présenté après l'équation aux neuf points d'inflexion.

3.2.5 Théorie des complexes linéaires : Klein, 1870

L'article de Klein de 1870 qui est présent dans notre corpus est la première publication de celui-ci, [Klein 1870]. Il s'agit d'un travail reprenant et approfondissant des éléments de sa thèse qu'il avait faite auprès de Plücker et qu'il avait présentée en 1868, [Klein 1868]. Dans ses *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Klein indique que les différences entre sa thèse et cet article sont des conséquences de l'atmosphère qui régnait à l'époque à Göttingen :

> En comparaison avec la thèse, on reconnaîtra l'influence stimulante que l'environnement de Göttingen a eue sur moi. Je choisis cette expression quelque peu vague car à côté de Clebsch lui-même, les étudiants, en nombre alors encore faible, qui s'étaient réunis autour de lui avaient eu la plus grande influence sur moi [66]. [Klein *Œuvres 1*,

66. « Beim Vergleich mit der Dissertation wird man den anregenden Einfluß erkennen, den die Göttinger Umgebung auf mich ausgeübt hat. Ich wähle diesen etwas unbestimmten Ausdruck, weil neben Clebsch selbst die vorab noch kleine Zahl von Spezialschülern, die er um sich versammelt hatte, regsten Einflußauf

p. 50]

Le thème de l'article en question ici est l'étude de complexes linéaires de degré 2, c'est-à-dire d'ensembles de droites de l'espace vérifiant certaines conditions. Ces complexes linéaires avaient commencé à être étudiés un peu auparavant (en 1865) par Plücker, auprès de qui Klein avait préparé sa thèse [67]. L'idée principale de ces travaux est qu'une droite de l'espace peut être décrite par six coordonnées homogènes satisfaisant une équation quadratique homogène [68] ; un complexe linéaire de degré 2 est l'ensemble de toutes les droites dont les coordonnées vérifient une équation quadratique homogène supplémentaire. Dans cette publication de Klein, une attention particulière est portée sur le lien entre les complexes linéaires et la surface quartique de Kummer. Les équations de la géométrie apparaissent de façon répétée en fin de petits paragraphes et ne sont pas les objets centraux de recherche. Regardons cette structure-type sur un exemple.

Klein note $a_1, a_2, \ldots, a_6$ les six coordonnées homogènes des droites de l'espace. Il montre que l'on peut supposer que l'identité quadratique les liant est $\sum a_i^2 = 0$, qui est invariante si l'on change de signe les a_i. Klein en conclut que les droites de l'espace peuvent être groupées 32 par 32 : étant donné un sextuplet $a_1, \ldots, a_6$, les 32 droites d'un groupe sont celles de coordonnées $\pm a_1, \ldots, \pm a_6$. Il indique ensuite que chaque groupe de 32 droites se sépare en deux groupes de 16 selon la parité de coordonnées affectées d'un signe négatif [69]. Enfin, si l'une des droites d'un groupe de 16 est donnée, Klein démontre que les droites de l'autre groupe de 16 se séparent en deux groupes : celles qui sont les polaires conjuguées à la droite donnée par rapport aux six complexes fondamentaux, resp. par rapport aux dix surfaces fondamentales [70]. Il écrit alors immédiatement :

> L'équation du 32e degré par laquelle est déterminée un tel système de droites n'exige, après que les six complexes fondamentaux ont été trouvés par une équation du 6e degré, que la résolution d'équations du second degré [71]. [Klein 1870, p. 210]

Ce résultat n'est ni expliqué, ni commenté, ni même utilisé dans la suite : il s'agit juste d'une remarque couronnant un petit paragraphe. D'autres exemples de telles propriétés

mich gewann. » J'ai déjà donné cette référence lors de la description des liens entre les auteurs du corpus. Je rappelle que ce commentaire de Klein provient de ses œuvres complètes, dont le premier volume est paru en 1921, et qu'à cette époque, Klein avait bâti l'idéologie de Göttingen décrite dans [Rowe 1989a].

67. [Rowe 1989b, p. 212-217].

68. J'ai expliqué ce point mathématique au chapitre précédent. La droite passant par deux points x, y de coordonnées respectives $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ et $(y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$ est caractérisée par les six coordonnées $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ avec $i < j$. Ces six quantités sont reliées par la relation $p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{12}p_{03} = 0$.

69. Ces coordonnées étant des nombres complexes, on ne peut pas parler de nombres positifs ou négatifs, alors que l'on peut parler de leur signe par rapport à un sextuplet de référence. Klein n'indique pas comment gérer le cas de coordonnées nulles.

70. Les six complexes fondamentaux sont les ensembles de droites définis chacun comme étant le lieux d'annulation d'une des six coordonnées. Les dix surfaces fondamentales sont les ensembles de droites définis par des équations du type $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$.

71. « Die Gleichung 32ten Grades, durch welche ein deratiges System von geraden Linien [...] bestimmt wird, verlangt, nachdem die sechs Fundamentalcomplexe durch eine Gleichung des 6ten Grades gefunden worden sind, nur noch die Auflösung von Gleichungen des zweiten Grades. »

de résolution d'équations suivant des groupements géométriques sont éparpillées dans l'article. En particulier, Klein retrouve avec ce genre de raisonnement un résultat que Jordan avait démontré dans son article sur l'équation aux seize points singuliers de la surface de Kummer, [Jordan 1869d], à savoir que cette équation dépend d'une équation de degré 6 et d'équations quadratiques supplémentaires.

Tous ces résultats de résolubilité d'équations de la géométrie suivant des résultats d'existence de groupements particuliers de droites sont une des différences entre l'article en question ici et la thèse de Klein : cette dernière ne contient aucune équation de la géométrie. On peut donc voir ces résultats comme des artéfacts de la stimulation de Göttingen évoquée dans la première citation de ce paragraphe ; mais ils font également penser à l'équation de la géométrie présentée dans l'article de Kummer de 1864, correspondant justement à des systèmes de rayons en liaison avec les surfaces quartiques.

3.2.6 Interprétation géométrique de l'équation du cinquième degré : Clebsch, 1871.

Le texte de Clebsch de 1871 du corpus, [Clebsch 1871b], n'est pas une référence directe de l'*Encyklopädie*, mais est cité par Klein dans un article de la même année, [Klein 1871b]. Le but de Clebsch dans ce mémoire est de donner une interprétation géométrique à la théorie de l'équation générale du cinquième degré [72] :

> L'objet du présent article se trouve principalement dans les différentes formes qu'une équation du cinquième degré peut prendre par une transformation supérieure. [...] On obtient ainsi [...] un aperçu géométrique complet des relations existant entre les équations de degré 5 et leurs résolvantes, et en particulier des relations avec la forme de Jerrard et l'équation modulaire [73]. [Clebsch 1871b, p. 284-285]

Comme l'attestent ses références dans la suite de l'article, Clebsch vise ici deux approches de l'équation du cinquième degré, datant des années 1850. La première est celle de Hermite [74], qui consistait à se baser sur la forme dite de Jerrard de $x^5 - x - a = 0$ pour la résoudre grâce aux fonctions elliptiques, et en particulier l'équation modulaire de degré 6. La seconde est celle de Kronecker [75], utilisant d'une autre façon la théorie des fonctions elliptiques de sorte à ramener la résolution de l'équation du cinquième degré à celle d'une équation pure $x^5 - A = 0$.

72. Sur cette équation générale de degré 5, voir le chapitre VII de [Houzel 2002] et le chapitre IV de [Gray 2000].

73. « Der vorliegende Aufsatz hat vorzugsweise die verschiedenen Formen zum Gegenstande, welche einer Gleichungen 5^{ten} Grades durch höhere Transformation gegeben werden können. [...] So erhält man [...] eine vollständige geometrische Uebersicht über die Zusammenhänge, welche zwischen den Gleichungen 5^{ten} und ihren Resolventen bestehen, insbesondere über den Zusammenhang mit der Jerrard'schen Form und der Modulargleichung. »

74. Voir [Goldstein 2011a].

75. Voir [Petri & Schappacher 2004].

Noter que ces travaux de Hermite et de Kronecker faisaient partie d'une série de recherches liées à celles de Galois au sujet des équations modulaires, et dont les historiens sus-cités ont montré qu'ils ont constitué une des voies par lesquelles les recherches de Galois ont été retravaillées dans les années 1850-1860.

L'interprétation géométrique de Clebsch de la théorie de la quintique consiste à considérer les coefficients des différentes transformations de l'équation comme des coordonnées de l'espace. Par exemple, une transformation quadratique $\xi = \frac{y_1+y_2\lambda+y_3\lambda^2}{x_1+x_2\lambda+x_3\lambda^2}$ supposée agir sur une équation algébrique $f(\lambda) = 0$ est représentée comme la droite du plan reliant les points de coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3. Un des points principaux de la méthode de Clebsch est de trouver des transformations qui annulent des invariants associés à l'équation. Cela lui permet ensuite d'appliquer à l'équation transformée des résultats (connus) énonçant des propriétés de résolution, vraies lorsque lesdits invariants sont nuls [76]. Par exemple, lorsque un certain invariant C de l'équation du cinquième degré est nul, il est possible de la ramener avec uniquement des procédés rationnels à la forme dite de Jerrard $\xi^5 - \xi - a = 0$; il s'agit alors pour Clebsch de voir comment trouver géométriquement (au sens de son interprétation) une transformation annulant cet invariant C.

Clebsch interprète aussi la transformation de Tschirnhaus [77] $\xi = a\lambda^4+b\lambda^3+c\lambda^2+d\lambda+e$. Pour que l'équation transformée soit de la forme $\xi^5+A\xi+B = 0$, Clebsch montre que les coefficients $a, b, \dots, e$ doivent satisfaire trois conditions $\Phi(a, b, c, d, e) = 0$, $\Psi(a, b, c, d, e) = 0$ et $\mathrm{X}(a, b, c, d, e) = 0$, où Φ, Ψ et X sont des polynômes homogènes de degrés respectifs 1, 2 et 3. L'identité linéaire $\Phi(a, b, c, d, e) = 0$ permet à Clebsch d'interpréter $a, \dots, e$ comme des coordonnées pentaédriques de l'espace, c'est-à-dire qu'elle permet d'exprimer une des cinq quantités $a, \dots, e$ en fonction des autres ; il n'en reste alors que 4, vues comme autant de coordonnées homogènes de l'espace. L'égalité $\Psi = 0$ devient par ce biais l'équation d'une surface quadrique et $\mathrm{X} = 0$ celle d'une surface cubique. Ainsi, pour déterminer une transformation de Tschirnhaus convenable, il faut trouver un point sur la courbe (d'ordre 6) qui est l'intersection de ces surfaces.

Des équations de la géométrie apparaissent incidemment, en tant que moyens de contrôler les irrationalités impliquées dans le processus de trouver un point sur la courbe d'ordre 6. En effet, puisqu'une transformation de Tschirnhaus n'implique pas de radical supérieur au quatrième, le processus géométrique doit faire de même. Clebsch résume sa méthode comme suit :

76. L'exemple simple de l'équation du second degré (qui n'est pas traité par Clebsch) peut éclairer cela : le discriminant bien connu $\Delta = a_1^2 - a_0a_2$ de l'équation $a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = 0$ en est un invariant, et son annulation signifie que l'équation possède une racine double. Ce type de recherches liant théorie des invariants et équations algébriques faisait aussi partie du programme de Hermite, voir [Goldstein 2011a, p. 248-249].

77. George Birch Jerrard avait montré que pour l'équation générale du cinquième degré donnée, il est possible de trouver une telle transformation qui donne à l'équation la forme $x^5 - x - a = 0$. Un point clé était que la détermination des coefficients de la transformation n'implique que des racines carrées et cubiques des coefficients de l'équation de départ.

> On a juste à déterminer n'importe quel point de la courbe gauche d'ordre six, ce qui se fait en intersectant une génératrice de la surface $\Psi = 0$ avec [la surface cubique $\mathrm{X} = 0$]. Pour cela, une équation quadratique et une équation cubique doivent être résolues : d'abord pour trouver une génératrice de la surface du second ordre ; ensuite pour déterminer l'intersection de cette génératrice avec la surface [cubique] [78]. [Clebsch 1871b, p. 341]

D'autres passages de l'article de Clebsch contiennent des équations de la géométrie. Par exemple, Clebsch interprète encore la méthode de Kronecker de résolution de la quintique. Dans ce cas, l'interprétation géométrique identifie l'équation modulaire associée à la transformation d'ordre 5 des fonctions elliptiques à l'équation de degré 6 qui « sépare » six tangentes doubles à une certaine courbe. Notons d'ailleurs que l'équation aux vingt-sept droites (de la surface $\mathrm{X} = 0$) intervient également au cours des calculs menés par Clebsch.

3.2.7 Représentation géométrique des résolvantes, Klein, 1871

J'en viens maintenant au deuxième article de Klein du corpus, [Klein 1871b]. Dans l'introduction de cet article, Klein met en avant le côté intuitif des équations de la géométrie :

> La théorie générale des équations algébriques est illustrée de la plus belle des façons par un certain nombre d'exemples géométriques particuliers ; je pense seulement (voir Camille Jordan, *Traité des substitutions*, p. 301 etc.) au problème des points d'inflexion des courbes du troisième ordre, aux vingt-huit tangentes doubles des courbes du quatrième ordre, aux vingt-sept droites sur les surfaces du troisième degré, etc., mais aussi à la cyclotomie [79].
>
> Le grand avantage de ces exemples est qu'ils présentent de façon intuitive les idées abstraites en elles-mêmes si particulières de la théorie des substitutions. Il se rapportent la plupart du temps à des équations de caractère très particulier, entre les racines desquelles ont lieu des groupements particuliers, laissant ainsi voir comment de telles équations peuvent se comporter [80]. [Klein 1871b, p. 346]

78. « Man hat dann nur einen beliebigen Punkt der Raumcurve 6^{ten} Ordnung zu ermitteln, was geschieht, indem man eine Erzeugende der Fläche $\Psi = 0$ mit der Diagonalfläche schneidet. Dazu ist eine quadratische und eine cubische Gleichung zu lösen ; erstere, um eine Erzeugende der Fläche 2^{ten} Ordnung zu finden; die andere, um die Durchschnitte derselben mit der Diagonalfläche zu bestimment. »

79. Ce passage est le seul endroit du corpus où est mentionnée la cyclotomie. Comme pressenti par les différences de définition avec les équations de la géométrie, il semble donc bien que l'équation cyclotomique ne fasse pas partie de cette famille, même si elle en est ici rapprochée par Klein.

80. « Die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen wird in schönster Weise durch eine Anzahl besonderer geometrischer Beispiele illustrirt; ich erinnere nur (Vergl. Camille Jordan. Traité des Substitutions. 1, p. 301 ff.) an das Problem der Wendepunkte der Curven 3^{ter} Ordnung, an die 28 Doppeltangenten der Curven 4^{ter} Ordnung, an die 27 Linien auf den Flächen 3^{ten} Grades etc., dann aber namentlich auch an die Kreistheilung. Der hohe Nutzen dieser Beispiele liegt darin, daß sie die an und für sich so eigenartig abstrakten Vorstellungen der Substitutionstheorie in anschaulicher Weise dem Auge vorführen. Sie beziehen sich zumeist auf Gleichungen von sehr partikulärem Character, zwischen deren Wurzeln besondere Gruppierungen statthaben, und lassen also übersehen, wieso derartige besondere Gleichungen auftreten können. »

Klein annonce alors vouloir concevoir toute équation algébrique comme une équation de la géométrie en incarnant les racines d'une équation générale en des objets géométriques et en remplaçant les substitutions des racines par des transformations de l'espace. Avec la citation précédente, cette articulation entre algèbre et géométrie révèle un thème kleinien par excellence : mettre la géométrie en avant pour son côté intuitif et souligner l'importance des groupes de transformations.

À la fin de l'introduction, Klein révèle que Clebsch et Lie ont tous deux aidé à la formation des idées de l'article. Le premier par les « considérations géométriques » qu'il a utilisées dans son mémoire où il a interprété géométriquement théorie de la quintique, [Clebsch 1871b], et qu'il « eut la gentillesse de partager avec [Klein] lors de conversations personnelles récurrentes [81] » ; le second à cause des recherches communes sur les transformations linéaires d'objets géométriques publiées dans un article de 1871, [Klein & Lie 1871] [82].

Dans la première partie de son article, Klein donne des explications plus précises sur son principe général de représentation géométrique. Ainsi, si une équation algébrique est générale et de degré n, un élément de l'espace prend en général $n!$ positions différentes lorsque les $n!$ transformations correspondant aux $n!$ substitutions agissent sur lui. Selon Klein, ce système de $n!$ éléments de l'espace est l'image de la résolvante de Galois de l'équation. De plus, Klein fait remarquer qu'il y a des éléments particuliers de l'espace tels que certains des $n!$ éléments transformés coïncident. Dans ce cas, « la résolvante de Galois devient une puissance d'une expression qui est appelée résolvante particulière [83] ».

Dans la deuxième partie de l'article, Klein relie la théorie des équations avec la théorie des covariants : les groupes de $n!$ éléments obtenus en général sont des covariants du système formé des n éléments donnés correspondant aux n racines [84].

La troisième partie s'occupe brièvement d'équations particulières comme l'équation aux neuf points d'inflexion, mais aussi l'équation cyclotomique. Klein met à nouveau en valeur l'importance des transformations de l'espace :

> Comme image géométrique pour l'équation du 9e degré, nous ne considérons pas la courbe du troisième ordre qui contient les points d'inflexion, mais plutôt *les points d'inflexion eux-mêmes et les cycles-transformations par lesquels ils sont permutés entre eux* [85]. [Klein 1871b, p. 354]

81. « Die nächste Veranlassung zu den hiermit angedeuteten Dingen sind mir die geometrische Betrachtungen gewesen, die Herr Clebsch in dem vorstehenden Aufsatze behufs Discussion der Gleichungen 5ten Grades angewandt hat, und welche mir derselbe in wiederholten persönlichen Unterhaltungen mitzutheilen die Güte hatte. » [Klein 1871b, p. 347].

82. Ces travaux sont discutés dans [Rowe 1989b ; Hawkins 2000].

83. « Die Galoissche Resolvente wird dann eine Potenz eines Ausdrucks, der als eine besondere Resolvente bezeichnet wird. » [Klein 1871b, p. 348].

84. Cela signifie que si une transformation linéaire agit sur les n éléments donnés, alors les groupes de $n!$ éléments associés se transforment entre eux pas la même transformation linéaire.

85. « Als geometrisches Bild für die Gleichung 9ten Grades betrachten wir nun nicht die Curve 3ter Ordnung, welche die Wendepunkte besitzt, sondern *die Wendepunkte selbst und den Transformationscyclus, durch welche diese untereinander vertauscht werden.* »

Enfin, dans la quatrième et dernière partie, Klein en vient à l'équation générale de degré 6. Il applique sa théorie des complexes linéaires en référant à son article sur le sujet (qui fait partie du corpus), [Klein 1870]. Les substitutions des racines correspondent aux transformations des coordonnées de droites (de l'espace) et des résolvantes sont trouvées directement grâce à des propriétés géométriques. Par exemple, Klein trouve 15 paires de directrices, chacune étant associée à une paire de complexes fondamentaux, et il en déduit immédiatement [86] :

> *Les* 15 *paires de directrices sont l'image d'une résolvante de degré* 15.
>
> Les 15 paires de directrices forment les arêtes de 15 tétraèdres (au sens où l'on peut, de 15 façons différentes, diviser six éléments en 3 groupes de 2).
>
> *Ces* 15 *tétraèdres représentent une deuxième résolvante de degré* 15.
>
> De ces 15 tétraèdres, on peut maintenant en choisir cinq qui ont pour arêtes les 30 directrices, et ceci de 6 façons.
>
> *Ces groupes de cinq tétraèdres représentent une résolvante de degré* 6. [Klein 1871b, p. 357]

À la toute fin de l'article, Klein explique encore très rapidement (et très vaguement) comment, dans sa représentation géométrique, on peut trouver une transformation rationnelle d'une équation générale de degré 6 qui fait s'annuler un invariant prescrit. En particulier, il fait référence au mémoire de Clebsch sur l'interprétation géométrique de la théorie de l'équation du cinquième degré, [Clebsch 1871b], où ce type de transformations était au cœur des préoccupations. S'inspirant de ces recherches de Clebsch, l'idée de Klein est d'abord de voir qu'on peut faire correspondre, aux six complexes associés aux racines de l'équation du sixième degré, six points d'un plan quelconque de l'espace. Il s'agit ensuite de constater que les propriétés d'invariants de l'équation se retrouvent dans les propriétés d'invariants de ces six points. Enfin, Klein indique qu'il est possible de choisir le plan qui définit ces points de sorte à contrôler leurs propriétés d'invariants, et donc celles de l'équation du sixième degré.

3.2.8 Commentaires de Lie, 1872

L'article de Lie auquel fait référence l'*Encyklopädie* est une version augmentée et traduite en allemand de sa thèse de doctorat [87]. Il s'agit d'un article assez long (plus de

86. « *Die* 15 *Directricenpaaren sind das Bild einer Resolvente* 15^{ten} *Grades.* Die 15 Directricenpaaren bilden nun die Kanten von 15 Tetraedern (dem entsprechend, dass man 6 Elemente auf 15 Weisen in 3 Gruppen von 2 theilen kann). *Diese* 15 *Tetraedern stellen eine zweite Resolvente* 15^{ten} *Grades dar.* Aus den 15 Tetraedern nun kann man auf 6 Weisen solche 5 aussuchen, die zusammen alle 30 Directricen zu Kanten haben. *Diese Gruppen von* 5 *Tetraedern repräsentieren eine Resolvente des* 6^{ten} *Grades.* »

87. [Engel 1900, p. 36]. Voir [Hawkins 2000] pour une histoire de la constitution de la théorie des groupes de Lie.

cent pages) mais l'*Encyklopädie* pointe un passage précis où apparaissent des commentaires concernant des équations de la géométrie. Ces commentaires sont situés à la fin de l'article, alors que Lie s'apprête à étudier certaines surfaces quartiques.

> Parmi les surfaces du quatrième ordre, j'en considérerai ici deux, étudiées en premier par M. Kummer : celle avec seize points nœuds, f_4, et celle avec une conique double, F_4. Chacune de ces surfaces donnent lieu à une équation du seizième degré ; l'une par ses points nœuds, l'autre par les droites qu'elle contient. Cette dernière a conduit M. Clebsch à une équation du cinquième degré déjà considérée par M. Kummer (Journal de Borchardt vol. 67 [88]). D'un autre côté, M. Jordan a trouvé que la première se ramène à une équation du sixième degré [Jordan 1869d]. Les bases géométriques de cela se trouvent dans les recherches de M. Klein relatives à cette surface [Klein 1870] [89]. [Lie 1872, p. 250-251]

Cette citation ne contient aucun fait mathématique nouveau, mais il est intéressant de voir que Lie réfère à tout ce qui concerne les surfaces quartiques dans le corpus. Lie est ainsi familier non seulement avec les recherches géométriques concernant les surfaces quartiques, mais aussi avec les équations de la géométrie correspondantes. La fin de l'article ne mentionne plus d'équations de la géométrie, et les résultats rappelés par Lie ne sont pas non plus utilisés.

Si Lie ne propose donc ici aucun développement sur les équations de la géométrie, ses commentaires mettent en valeur le fait que ces équations font partie de ses connaissances mathématiques.

3.2.9 Équation du huitième degré et vingt-huit tangentes doubles : Noether, 1879

L'article de Noether présent dans le corpus, [Noether 1879], porte sur l'équation générale du huitième degré et ses liens avec la théorie des courbes du quatrième ordre [90]. Noether annonce dès le début comment les deux sont liées :

> Dès que l'on adjoint à une courbe du quatrième ordre *une* racine de d'équation du 36^e degré qui détermine les 36 faisceaux de courbes de contact du troisième ordre, l'équa-

88. Ce volume ne contient aucun article écrit par Kummer, et ceux écrits par Clebsch n'ont rien à voir avec des surfaces quartiques à conique double. Lie fait probablement référence à [Kummer 1863] ou à [Clebsch 1868].

89. « Unter den Flächen vierter Ordnung, giebt es zwei, zuerst von Herrn Kummer untersuchte, welche ich hier betrachten will: die mit 16 Knotenpunkten, f_4, und die mit einem Doppelkegelschnitt, F_4. Beide Flächen geben Anlass zu einer Gleichung sechzehnten Grades; die eine durch ihre Knotenpunkte, die andere durch die auf ihr gelegenen geraden Linien. Die letzere führte Herr Clebsch auf eine schon von Herrn Kummer aufgestellte Gleichung fünften Grades zurück. (Borchardt's Journal Bd. 67.) Andererseits fand Herr Jordan, dass die erstere Gleichung auf eine solche vom sechsten Grade zurückkommt (Borchardt's Journal Bd. 70). Es fand dies seine geometrische Begründung in den auf diese Fläche bezüglichen Untersuchungen des Herrn Klein (Math. Ann. Bd. 2). »

90. Dans sa notice nécrologique de Noether, Brill n'évoque cet article que pour dire qu'il ne concerne « aucune question fondamentalement importante », [Brill 1923, p. 223]. Dans cette notice, Brill met surtout en avant les travaux de géométrie algébrique de Noether ainsi que ses écrits d'ordre biographique.

> tion pour les 28 tangentes doubles se réduit à une équation générale du huitième degré. Dans la suite sont exposées de nouvelles propriétés géométriques de la *courbe* qui sont liées aux recherches sur les équations du 8e degré [91]. [Noether 1879, p. 89]

Noether précise également que de telles recherches sur l'équation de degré 8 ont déjà été faites mais avec d'autres points de vue, en particulier par l'équation modulaire de degré 8 pour laquelle il cite des mémoires de Enrico Betti, Leopold Kronecker et Charles Hermite, [Betti 1853 ; Kronecker 1858a ; Hermite 1859]. Pour Noether, la résolvante de degré 7 de cette dernière possède la propriété « essentielle » que ses racines s'associent en sept triplets (il appelle cette propriété *Tripeleigenschaft*), mais il déplore que cette propriété n'a pas été clairement utilisée, en particulier dans le *Traité* de Jordan. Noether veut justement trouver dans la théorie des courbes quartiques des objets à ordonner sept par sept pour faire le parallèle avec la *Tripeleigenschaft*.

Dans une grande première moitié de l'article, Noether manipule des fonctions créées à partir de huit grandeurs et prenant des nombres de valeurs particuliers, correspondant ainsi à des résolvantes de l'équation générale du huitième degré. Par ce moyen, il en vient à montrer que pour l'équation générale de degré 8, il existe une résolvante de degré 30 réduisant le groupe de l'équation à un groupe d'ordre [92] $8 \cdot 168$.

Dans un second temps, Noether passe aux courbes quartiques. En accord avec ce qu'il a fait précédemment, il met ainsi à jour 30 systèmes formés de sept coniques associées à une courbe quartique : ces trente systèmes correspondent alors à la résolvante de degré 30 de l'équation du huitième degré. C'est dans la dernière section de l'article qu'apparaissent des équations de la géométrie, en tant que résolvantes de l'équation aux vingt-huit tangentes doubles :

> Pour déterminer les tangentes doubles de la courbe du quatrième ordre à l'aide des systèmes mis ici en évidence, on devra d'abord rechercher une quelconque des 36 familles de première espèce de courbes de contact du troisième ordre [...], puis un des 30 *Tripelsysteme* de 7 coniques qui sont associés à la famille trouvée ; ensuite les coniques isolées de ce système très spécial elles-mêmes. Enfin, on détermine les tangentes doubles elles-mêmes par 3 équations quadratiques [93]. [Noether 1879, p. 109]

---

91. « Sobald man bei einer Curve vierter Ordnung *eine* Wurzel der Gleichung 36ten Grades adjungirt, welche die 36 Schaaren von Berühungscurven dritter Ordnung bestimmt, so reducirt sich die Gleichung für die 28 Doppeltangenten auf eine allgemeine Gleichung vom achten Grade. Es sollen nun im Folgenden neue geometrische Eigenschaften der *Curve* dargelegt werden, die sich an die Untersuchung der Gleichungen vom 8ten Grade knüpfen. »

92. Les recherches de Noether se lient ainsi à celles de Klein sur l'équation du septième degré et la quartique portant son nom, dont le groupe d'automorphismes est le groupe simple d'ordre 168. Voir [Gray 2000, ch. 5] et [de Saint-Gervais 2010, ch. 5] pour une présentation mathématique de ces travaux.

93. « Um nun mit Hülfe der hier nachgewiesenen Systeme die Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung zu bestimment, wird man zunächst irgend eine der 36 Schaaren von Berührungscurven dritter Ordnung erster Art, (0), aufzusuchen haben, sodann eines der 30 Tripelsysteme von 7 Kegelschnitten, welche der gefundenen Schaar zugeordnet sind; weiter die einzelnen Kegelschnitte dieses sehr speciellen Systems Σ selbst. Endlich bestimmt man die Doppeltangenten selbst durch 3 quadratische Gleichungen. »

Les équations de la géométrie se présentent donc ici dans un processus de résolution de l'équation aux vingt-huit tangentes doubles, elle-même reliée à l'équation générale du huitième degré.

Les références aux mémoires de Betti, Hermite et Kronecker cités précédemment inscrivent le texte de Noether dans un contexte pointant vers les lectures des travaux de Galois autour des équations modulaires, comme c'était également le cas du texte de Clebsch de 1871.

3.2.10 Le *Substitutionentheorie* de Netto, 1882

Le livre *Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra* a été publié en 1882, [Netto 1882]. Il s'agit d'un ouvrage ayant connu un certain succès après sa sortie, et présentant une théorie de Galois inspirée des points de vue de Kronecker ; le *Traité des substitutions* de Jordan, s'il est cité dans son introduction, « ne joue qu'un rôle utilitaire », [Ehrhardt 2012, p. 213-221].

C'est pour une partie de son douzième chapitre, intitulé « Équations pour lesquelles existent des relations rationnelles entre trois racines [94] », que le livre de Netto est pris en compte dans le corpus. Ce chapitre se trouve dans la section des applications de la théorie des substitutions aux équations algébriques : il est entouré par des chapitres consacrés aux équations de degré 2, 3 et 4, aux équations cyclotomiques et abéliennes, ainsi qu'à la résolubilité algébrique des équations en général. Plusieurs exemples forment le corps de ce douzième chapitre : les équations de Galois, les équations binomiales [95] et les *Tripelgleichungen*, qui sont la raison pour laquelle le livre de Netto est cité par l'*Encyklopädie*.

Netto renvoie au mémoire de Noether de notre corpus, [Noether 1879], lorsqu'il définit les *Tripelgleichungen* :

> Nous disons d'une équation qu'elle possède un *Tripelcharakter*, ou bien nous l'appelons une *Tripelgleichung* (cf. [Noether 1879]), quand ses racines peuvent s'arranger en triplets $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma$ de sorte que deux éléments [quelconques] d'un triplet déterminent de façon univoque le troisième élément par une relation rationnelle [96]. [Netto 1882, p. 220]

Netto étudie le groupe de telles équations ; notamment dans le cas où elles sont irréductibles et de degré 9, il montre qu'elles sont résolubles algébriquement. À la toute fin du chapitre, Netto fait le lien avec les équations étudiées par Hesse dans son article concernant l'équation aux neuf points d'inflexion, [Hesse 1847]. Il indique ensuite, en référant à [Hesse 1844a ; Hesse 1847 ; Salmon 1850], que les points d'inflexion d'une courbe cubique

94. « Gleichungen, bei denen rationale Beziehungen zwischen drei Wurzeln herrschen », [Netto 1882, p. 216].

95. Les équations binomiales sont les équations de la forme $x^n - A = 0$.

96. « Wir sagen von einer Gleichung, sie besitze *Tripelcharakter*, oder wir nennen sie kurz *Tripelgleichung* (Noether: Math. Ann XV, p. 89) wenn ihre Wurzeln zu Tripeln $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma$ derart angeordnet werden können, dass zwei Elemente eines Tripels durch eine rationale Beziehung eindeutig das dritte Element bestimmen ».

sont alignés trois à trois selon douze droites, et en conclut sans démonstration que « les abscisses ou les ordonnées des neuf points d'inflexion sont donc les racines d'une équation du neuvième degré avec *Tripelcharakter*, et l'équation est résoluble algébriquement [97] ».

L'équation aux neuf points d'inflexion occupe ici une place extrêmement réduite : à peine quelques lignes sur la vingtaine de pages du chapitre. C'est avant tout la classe d'équations que Hesse avait étudiée qui est mise en avant, et pas son représentant donnée par la situation géométrique des neuf points d'inflexion.

3.2.11 Retour par Klein sur les vingt-sept droites et les fonctions hyperelliptiques, 1888

Le dernier article de Klein du corpus, [Klein 1888], est un extrait d'une lettre écrite à Jordan. Klein y propose de revenir sur une méthode de résolution de l'équation aux vingt-sept droites par les fonctions hyperelliptiques :

> Lors de mon dernier séjour à Paris, je vous ai raconté que je venais de résoudre affirmativement une questions que vous m'aviez autrefois posée à plusieurs reprises. L'équation des 27 droites d'une surface cubique et la trisection des fonctions hyperelliptiques du premier ordre ayant même groupe, il s'agissait de réduire, s'il était possible, le premier problème au second. J'ai donné là-dessus déjà quelques développements dans une séance de la Société mathématique de France (13 avril 1887). Permettez-moi d'y revenir aujourd'hui, et d'exposer mes raisonnements de manière plus complète. Sans doute, les explications que je vais donner paraîtront encore un peu vagues, comme je n'écris pas les formules détaillées, mais j'espère pourtant qu'elles pourront avoir quelque intérêt. [Klein 1888, p. 169]

Klein explique qu'il souhaite transposer sa méthode de résolution de l'équation du cinquième degré par les fonctions elliptiques (et l'icosaèdre [98]) au cas de l'équation aux vingt-sept droites. Comme lui, je resterai ici très allusif dans la description de cette démarche [99].

Klein commence par rappeler les deux points principaux de sa méthode de résolution de l'équation générale du cinquième degré. Il s'agit d'abord de considérer la « forme normale » (ou « icosaédrique ») de l'équation modulaire associée à la transformation du cinquième

97. « Die Abscissen oder die Ordinaten der neun Inflexionspunkte sind demnach die Wurzeln einer Gleichung neunten Grades mit Tripelcharakter, und die Gleichung ist algebraisch lösbar », [Netto 1882, p. 235]. L'expression « équation avec *Tripelcharakter* » est synonyme de *Tripelgleichung*, cf. [Netto 1882, p. 220].

98. Ces travaux ont culminé avec la publication du livre *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, [Klein 1884]. Pour des explications à ce sujet, voir [Gray 2000] ; un point de vue plus actuel est donné dans [Serre 1979-80]. Par ailleurs, soulignons que dans [Klein 1884], Klein avait en fait évacué au maximum les fonctions elliptiques, écartant par là-même les travaux de Hermite sur le sujet. Voir [Goldstein 2011a].

99. Les quelques pages de l'article de Klein esquissent une méthode qui a ensuite été complètement mise en œuvre dans trois articles — très techniques — de Heinrich Burkhardt, [Burkhardt 1890 ; Burkhardt 1891 ; Burkhardt 1893]. Voir [Hunt 1994] pour des explications mathématiques plus détaillées.

ordre des fonctions elliptiques. Pour cela, Klein pose

$$\rho z_1 = e^{\frac{i\pi\tau}{5}}\vartheta_1(\tau, 5\tau) \qquad \text{et} \qquad \rho z_2 = e^{\frac{i\pi\tau}{5}}\vartheta_1(2\tau, 5\tau),$$

où ϑ_1 est une fonction thêta elliptique, τ le quotient de ses périodes et ρ un coefficient indéterminé. Lorsque les substitutions du groupe de l'équation modulaire d'ordre 5 agissent sur τ, le quotient $z_1 : z_2$ est transformé par substitutions linéaires. Or, le quotient $z_1 : z_2$ dépend de « l'équation icosaédrique »

$$\frac{H(z_1, z_2)^3}{1728 f(z_1, z_2)^5} = u,$$

où f, H sont deux covariants de z_1, z_2 (sous les substitutions du groupe de l'équation modulaire) et u une quantité s'exprimant en fonction de diverses quantités associées à la fonction θ_1. Cette équation est la « forme normale » de l'équation de transformation des fonctions elliptiques.

La seconde partie de la méthode consiste à lier l'équation générale de degré 5 à cette équation icosaédrique. Pour cela, le point clé de Klein est que le groupe de cette équation, après adjonction d'un élément de degré 2, est isomorphe au groupe de l'icosaèdre [100]. Il interprète $z_1 : z_2$ comme des coordonnées du plan [101], puis $f(z_1, z_2)$ et $H(z_1, z_2)$ comme des covariants associés à des points remarquables de l'icosaèdre. Des manipulations assez complexes permettent alors de lier l'équation quintique à la forme icosaédrique.

Après avoir rappelé ces étapes, Klein écrit :

> Ceci étant bien conçu, pour venir au but que je me suis proposé ici, j'aurai à faire des considérations tout à fait analogues sur les fonctions hyperelliptiques (du premier ordre) et les équations du vingt-septième degré. [Klein 1888, p. 171]

La première étape de l'analogie consiste à trouver une forme normale de l'équation de transformation du troisième ordre des fonctions hyperelliptiques. Klein indique que cela a été fait dans les travaux d'un de ses élèves, Alexander Witting [102], en partant des fonctions

$$\rho z_{\alpha\beta} = e^{\frac{i\pi}{3}}\vartheta(\alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12}, \alpha\tau_{21} + \beta\tau_{22}; 3\tau_{11}, 3\tau_{12}, 3\tau_{22}),$$

avec $\alpha, \beta = 0, 1$ et ϑ est une fonction thêta hyperelliptique. Ici, comme dans le cas des fonctions elliptiques, le quadruplet des $z_{\alpha\beta}$ est transformé par substitutions linéaires lorsque le groupe de l'équation de transformation des fonctions hyperelliptiques agit sur les τ_{ij}. Il existe alors également une forme normale pour cette équation.

100. C'est-à-dire, le groupe des transformations de l'espace laissant un icosaèdre régulier invariant. Ces groupes sont isomorphes à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_5)$, ou encore au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$.

101. Par projection depuis son sommet, l'icosaèdre peut être mis en correspondance biunivoque avec le plan complexe complété par ∞, c'est-à-dire $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

102. [Witting 1887b]. Klein mentionne aussi des travaux de Maschke, encore en cours de réalisation.

Il s'agit alors de relier l'équation aux vingt-sept droites à cette forme normale. Comme précédemment, Klein donne les grandes lignes d'une méthode « géométrique », se basant sur l'interprétation des $z_{\alpha\beta}$ comme des coordonnées projectives de l'espace projectif.

Je n'entrerai pas davantage dans les détails, mais on pourra remarquer que l'interprétation géométrique de Klein n'a aucun rapport avec les droites des surfaces cubiques. Il s'occupe en effet plus généralement des équations ayant le même groupe :

> Considérons maintenant l'équation du vingt-septième degré des droites d'une surface cubique. Comme vous l'avez prouvé dans votre *Traité*, le groupe de cette équation, après l'adjonction d'une racine carrée [...], se trouve isomorphe sans mériédrie [103] au groupe des 25 920 substitutions fractionnaires des quotients des z. Or je ne considérerai pas quelques autres qualités spéciales de cette équation, mais je m'occuperai, dans ce qui suit, de toutes les équations du vingt-septième degré ayant le même groupe. [Klein 1888, p. 174]

Il y a donc un déplacement d'attention de l'équation aux vingt-sept droites vers son groupe, lequel est en particulier débarrassé de la géométrie provenant de la configuration des vingt-sept droites [104] — l'aspect géométrique mis ici en avant par Klein consiste à interpréter les $z_{\alpha\beta}$ comme des coordonnées de l'espace.

3.2.12 Un article de Maschke, 1889

L'article de Maschke présent dans le corpus, [Maschke 1889], concerne indirectement le lien entre les fonctions hyperelliptiques et les vingt-sept droites des surfaces cubiques. Plus précisément, Maschke rappelle comment, par analogie avec la théorie des fonctions elliptiques, Klein puis son élève Witting ont développé une théorie de fonctions hyperelliptiques donnant lieu à un groupe quaternaire formé de 51 840 substitutions linéaires [105]. Ce groupe, isomorphe au groupe de la trisection des périodes des fonctions hyperelliptiques (réduit par adjonction d'une racine carrée) est également isomorphe au groupe de l'équation aux vingt-sept droites d'une surface cubique.

Pour Maschke, la présentation par Jordan de cet isomorphisme est toutefois superficiel et c'est Klein qui a commencé à l'expliquer plus en profondeur :

> [Le groupe de la trisection des fonctions hyperelliptiques du premier ordre est], comme l'a également remarqué Monsieur C. Jordan, isomorphe au *groupe de l'équation du 27e degré dont dépendent les 27 droites d'une surface du troisième ordre*, bien qu'il ne semble exister entre ces deux groupes aucun rapport profond. (Entre temps, Monsieur F. Klein a entrepris de réduire ces deux problèmes l'un à l'autre [106].) [Maschke 1889, p. 319]

103. En langage plus actuel, cela signifie isomorphe (tout court).
104. Je reviendrai sur ce déplacement d'attention dans le dernier chapitre de cette thèse.
105. L'épithète « quaternaire » signifie que les substitutions du groupe en question agissent sur quatre variables.
106. « [Die Gruppe der Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung ist], wie ebenfalls Herr C. Jordan bemerkt hat, isomorph mit der *Gruppe der Gleichung 27ten Grades, von der die 27 Geraden*

Les travaux de Maschke sont donc ceux auxquels faisait référence Klein dans son article de 1888. Il s'agit donc de recherches destinés (au moins en partie) à être utilisés pour réaliser la démarche générale décrite par Klein.

L'article de Maschke est tourné essentiellement vers la théorie des formes, puisqu'il s'agit de trouver un système complet de représentants de formes pour le groupe G de 51 840 substitutions associé aux fonctions hyperelliptiques. Cela signifie que Maschke exhibe un nombre fini de formes algébriques dont les combinaisons entre elles permettent de retrouver toute forme algébrique invariante par l'action de G.

La seule équation de la géométrie qui y apparaît dans cet article [107] se situe dans le commentaire de Maschke sur le lien entre vingt-sept droites et fonctions hyperelliptiques qui vient d'être signalé. Elle ne fait l'objet d'aucun travail mathématique mais permet de situer explicitement l'article de Maschke dans une série de travaux concernant le lien entre les vingt-sept droites et les fonctions hyperelliptiques.

Le problème de trouver certaines formes algébriques invariantes permet ici de relier l'article de Maschke aux travaux de Hermite et de Clebsch (en particulier) sur le même sujet [108].

3.2.13 Le *Lehrbuch* de Weber, 1896

Le *Lehrbuch der Algebra* de Weber, [Weber 1896], fait partie du corpus car il est donné en référence par l'*Encyklopädie* pour l'équation aux neuf points d'inflexion [109]. C'est plus exactement le deuxième tome du *Lehrbuch* qui fait partie du corpus. Ce tome est divisé en quatre livres : groupes, groupes linéaires, applications de la théorie des groupes, nombres algébriques. Celui des applications comporte un chapitre intitulé « Les points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre », à côté duquel se trouvent d'autres chapitres, consacrés à la théorie des équations métacycliques [110], aux tangentes doubles des courbes quartiques, à la théorie de l'équation générale de degré 5, aux groupes de substitutions linéaires ternaires et enfin à la théorie des équations du septième degré et au problème des formes du groupe simple d'ordre 168.

Dans le chapitre sur les neuf points d'inflexion, Weber commence par faire des rappels de géométrie : définition des points d'inflexion d'une courbe algébrique de degré quelconque,

einer Fläche dritter Ordnung abhängen, obwohl zwischen diesen beiden Gruppen durchaus kein innerer Zusammenhang zu existiren scheint. (Inzwischen hat Herr F. Klein es unternommen, beide Probleme auf einander zu reduciren, [Klein 1888]. »

107. Noter que quelques formes et invariants sont interprétées géométriquement *a posteriori* : voir [Maschke 1889, p. 328-330].

108. Sur la théorie des invariants, voir [Fisher 1966 ; Parshall 1989].

109. Voir [Corry 2004, p. 33-43] pour une présentation générale et sa place dans le développement de l'algèbre moderne, et [Ehrhardt 2012, p. 213-221] pour le rôle du *Lehrbuch* dans les réélaborations de la théorie de Galois.

110. Une équation métacyclique est une équation dont la résolution complète se fait par résolutions d'équations cycliques. Les équations métacycliques coïncident donc avec les équations résolubles par radicaux. Voir [Weber 1895, p. 597].

courbe hessienne puis cas d'une courbe cubique avec en particulier les relations d'alignement existant entre les neuf points d'inflexion. Weber part ensuite de ces relations pour dire que l'équation aux neuf points d'inflexion possède la propriété que ses racines sont liées trois par trois par des relations rationnelles. Cela lui permet d'introduire la notion de *Tripelgleichung*, qu'il définit de la même façon que Netto. À ce moment, il fait référence à deux articles de notre corpus : celui de Hesse, [Hesse 1847], en tant que première étude des *Tripelgleichungen* et celui de Noether, [Noether 1879], car c'est là que sont étudiées des *Tripelgleichungen* qui ne sont pas associées aux neuf points d'inflexion. Weber montre ensuite que la notation et les groupements qu'il a mis en évidence pour les points d'inflexion s'appliquent aux racines de *Tripelgleichungen* de degré 9. À partir de là, il étudie le groupe de ces équations et ni la géométrie ni l'équation aux neuf points ne réapparaissent.

La situation diffère donc de [Netto 1882] : la géométrie occupe une place plus importante en ce sens qu'elle est le prétexte à Weber pour introduire les *Tripelgleichungen* ; il utilise ensuite des résultats sur les neuf points d'inflexion comme base d'étude du groupe des *Tripelgleichungen* de degré 9.

3.3 Première vue d'ensemble sur les équations de la géométrie

Après avoir décrit les textes du corpus un à un, je propose maintenant de commencer à présenter quelques informations globales dans le but d'obtenir un premier regard transversal sur le corpus. Ces informations concernent trois points indépendants, mais dont la mise en conjonction apporte un éclairage intéressant sur la situation : la contribution aux équations de la géométrie des différents auteurs, les différents statuts de ces équations vis-à-vis des textes dans lesquels elles apparaissent et des précisions sur les situations géométriques qui leurs sont associées.

Pour cela, j'ai effectué un relevé systématique de toutes les occurrences d'équations de la géométrie dans les textes du corpus. Un tableau listant toutes ces occurrences est donné en annexe D. Le dépouillement du corpus donne ainsi 111 occurrences d'équations de la géométrie, ou 96 si l'on ne tient pas compte des quatre publications de Jordan qui se retrouvent presque telles quelles dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques*.

3.3.1 Un petit noyau

Commençons par regarder la distribution numérique des équations de la géométrie auteur par auteur. Les chiffres sont présentés dans le tableau 3.3. Y sont figurés les nombres absolus d'occurrences d'équations de la géométrie pour chaque acteur du corpus, ainsi que le pourcentage que cela représente par rapport au nombre total d'occurrences. J'ai aussi fait figuré les moyennes obtenues en rapportant les nombres absolus au nombre de textes des auteurs dans le corpus : par exemple, il y a deux textes de Clebsch dans le corpus pour 30 occurrences d'équations, ce qui représente une moyenne de 15 équations par texte. Ce nombre permet ainsi d'évaluer la densité d'apparition d'équations de la géométrie pour chacun des auteurs.

	Tous textes			Sans [Jordan 1869a,b,c,d]		
	Nbres abs.	%	Moy. par txt.	Nbres abs.	%	Moy. par txt.
Hesse	2	1,8 %	2	2	2,1 %	2
Kummer	3	2,7 %	3	3	3,1 %	1,5
Clebsch	30	27,0 %	15	30	31,3 %	15
Jordan	42	37,8 %	7	27	28,1 %	13,5
Klein	22	19,8 %	7,3	22	22,9 %	7,3
Lie	2	1,8 %	2	2	2,1 %	2
Noether	7	6,3 %	7	7	7,3 %	7
Netto	1	0,9 %	1	1	1,0 %	1
Maschke	1	0,9 %	1	1	1,0 %	1
Weber	1	0,9 %	1	1	1,0 %	1
Total	111	99,9%	5,8	96	99,9 %	6,4

TABLE 3.3 – Nombre d'occurrences d'équations de la géométrie pour les différents auteurs du corpus.

Un premier constat est que Clebsch, Jordan et Klein arrivent largement en tête, que ce soit au niveau des nombres absolus ou des nombres relatifs. On voit d'ailleurs que ne pas prendre en compte les publications extraites du *Traité* a pour effet d'équilibrer la répartition entre ces trois mathématiciens, au vu de ces nombres. En regardant les moyennes par texte, la situation change un petit peu si l'on choisit d'inclure ou d'exclure ces publications. En effet, dans le premier cas, Clebsch se démarque nettement, et Jordan, Klein ainsi que Noether suivent avec une contribution moitié ; dans le second cas, la contribution de Jordan grimpe jusqu'au niveau de celle de Clebsch [111]. En comparaison avec Clebsch, Jordan, Klein et Noether, les autres auteurs ne participent que très modestement aux équations de la géométrie, sous cet angle quantitatif.

Il y a donc un noyau d'auteurs formé de Clebsch, Jordan, Klein et Noether, dans les textes desquels se trouvent la grande majorité des équations de la géométrie. Or, nous avons déjà vu que ce groupe de personnes est également fortement lié à la fois personnellement et mathématiquement. Cela indique donc une circulation intense d'idées sur les équations de la géométrie, ce que renforce encore le constat d'intrication de leurs textes en regard

111. À partir de maintenant, je ne présenterai des données quantitatives que sur la base du corpus restreint, c'est-à-dire sans les références [Jordan 1869a ; Jordan 1869b ; Jordan 1869c ; Jordan 1869d].

des relations de citations fait plus haut.

Si ces quatre mathématiciens concentrent de cette façon l'activité mathématique des équations de la géométrie, cela ne signifie pas non plus qu'il faille exclure les autres de l'analyse. Par exemple, la description faite dans la section précédente a montré que les textes de Kummer sont cités par Clebsch, Jordan et Klein pour divers résultats sur les surfaces quartiques, utilisés comme base de travail ou pris en compte pour les comparer à leurs propres théorèmes. Kummer apparaît ainsi en tant que référence commune pour les premiers travaux sur les surfaces quartiques. Quantitativement, Hesse fait lui aussi partie des contributeurs modestes. Son statut de professeur de Clebsch et la place de son article dans le corpus indique toutefois qu'il est un auteur important pour les équations de la géométrie.

En ce sens, la situation générationnelle est ici un peu différente de celle des mathématiciens engagés en théorie des nombres au début XIX^e siècle. Rappelons à ce sujet que l'historiographie usuelle réduisait la théorie des nombres aux apports plutôt isolés de quelques mathématiciens, environ un par génération. Mais C. Goldstein et N. Schappacher ont montré qu'une description plus juste demandait d'abord de prendre en compte plus d'un mathématicien par génération. Ils ont également souligné que les différentes générations n'étaient pas étanches, mais avaient au contraire largement interagi dans la recherche mathématique, réagissant (de façon parfois contrastée mais toujours liée) aux mêmes questions [112]. Pour ce qui est des équations de la géométrie, ce que j'ai expliqué plus haut montre assez peu d'interaction directe entre la génération de Hesse et de Kummer et la suivante : si les sujets et résultats mathématiques de la première génération sont connus et repris par celle qui lui succède, il n'y a pas de discussion ou de travail commun sur les questions relatives aux équations de la géométrie.

3.3.2 Plusieurs statuts pour les équations de la géométrie

Pour décrire maintenant le statut de chaque occurrence d'équation de la géométrie par rapport au texte qui la contient, j'ai dégagé cinq catégories permettant de classifier ces occurrences.

La première catégorie est formée des équations de la géométrie qui sont l'objet d'étude d'un texte qui leur est clairement consacré ou dont elles sont la motivation première. C'est par exemple le cas de l'équation aux vingt-sept droites dans l'article « Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré », [Jordan 1869b], ou pour les équations de la géométrie auxquels sont dévolus les différents paragraphes du chapitre des applications géométriques du *Traité* de Jordan. J'ai aussi classé dans cette catégorie l'équation aux neuf points d'inflexion qui apparaît dans l'article de Hesse, [Hesse 1847]. En effet, si le titre de cet article laisse penser qu'il se rapporte principalement à des équations qui ne sont pas issues

112. Voir [Goldstein & Schappacher 2007].

de la géométrie : « Résolubilité algébrique des équations du 9e degré dont les racines ont la propriété qu'une fonction rationnelle et symétrique donnée $\theta(x_\lambda, x_\mu)$ de deux racines x_λ, x_μ donne une troisième racine[113] x_χ de sorte que l'on ait simultanément $x_\chi = \theta(x_\lambda, x_\mu)$, $x_\lambda = \theta(x_\mu, x_\chi)$, $x_\mu = \theta(x_\chi, x_\lambda)$ », les recherches contenues dans cet article ont été inspirées par des résultats sur les points d'inflexion, et plus de la moitié est consacré à l'équation aux neuf points d'inflexion.

Une deuxième catégorie pour les équations de la géométrie englobe celles qui sont étudiées pour elles-mêmes, mais dans un texte qui ne leur est pas principalement consacré. Autrement dit, les résultats qui s'y rapportent sont développés dans leur texte mais ne sont utilisés à aucun moment. L'équation aux seize droites des surfaces quartiques à coniques doubles dans l'article de Clebsch de 1868, [Clebsch 1868], illustre cette catégorie. Cet article porte effectivement sur la géométrie de ces surfaces (représentation sur un plan, étude des courbes tracées, etc.), et si l'équation aux seize droites y est étudiée, les résultats de résolubilité qui sont établis ne jouent aucun rôle dans les autres démonstrations de l'article. D'autres exemples se trouvent dans le premier article de Klein, [Klein 1870], dans lequel plusieurs équations de la géométrie surviennent, accompagnées de propriétés de résolubilité, bien qu'elles ne soient jamais mobilisées après coup.

Pour la troisième catégorie, j'ai considéré les équations de la géométrie qui apparaissent dans leur texte en tant que réduites ou résolvantes d'autres équations de la géométrie (généralement issues des deux catégories précédentes). L'exemple suivant, déjà mentionné au chapitre précédent, concerne les quarante-cinq plans contenant trois à trois les vingt-sept droites des surfaces cubiques :

> Prenons, par exemple, pour inconnue de la question le plan du triangle formé par trois droites qui se coupent : ces triangles étant au nombre de quarante-cinq, on aura une équation du quarante-cinquième degré, équivalente à [l'équation aux vingt-sept droites]. [Jordan 1870b, p. 319]

Ici, l'équation aux quarante-cinq plans n'est pas étudiée en tant que telle : elle survient dans le paragraphe du *Traité* consacré à l'équation aux vingt-sept droites en tant que réduite particulière de cette dernière. On peut encore citer l'exemple de l'équation aux cinq cônes présentée par Clebsch comme résolvante de l'équation aux seize droites dans l'article de 1868, [Clebsch 1868], ou toutes les résolvantes qui étaient données dans l'article de Klein de 1871, [Klein 1871b]. Un point particulier est que pour tous ces exemples, la propriété d'être des réduites d'une autre équation n'est jamais expliquée (explicitement en tout cas) autrement que par le fait de l'existence même des groupements d'objets géométriques. Les processus mathématiques permettant d'expliquer pourquoi ce que j'avais appelé les « réduites géométriques » du *Traité* étaient bien équivalentes à l'équation aux vingt-sept droites ne sont donc pas encore élucidés ; mais nous voyons apparaître dans le corpus des équations de la géométrie des cas tout à fait similaires à ces réduites géométriques.

113. Coquille dans le titre de l'article original, où est écrit x_k à cet endroit.

La quatrième catégorie que je souhaite mettre en évidence est composée d'équations dont les propriétés sont utilisées à d'autres fins que l'étude propre des équations de la géométrie. On peut trouver dans cette catégorie des équations servant à déterminer le nombre d'objets vérifiant certaines conditions — dans les catégories précédentes, le nombre d'objets est toujours connu *a priori*. Par exemple, dans l'article de Kummer sur les surfaces quartiques contenant des coniques, [Kummer 1863], nous avons vu que la propriété de l'équation donnant les cônes recherchée par Kummer est d'être de degré 5, ce qui lui permet d'en déduire que les cônes correspondants sont au nombre de cinq [114]. Un autre exemple illustrant cette quatrième catégorie est issu de l'article de Clebsch sur l'interprétation géométrique de la théorie de l'équation du cinquième degré [115] :

> Pour mettre l'équation du cinquième degré sous [la forme d'une équation pure], il faut résoudre une équation quadratique qui sépare sur leur tangente les deux points d'inflexion de la courbe C ; ces points sont à prendre pour base pour donner à l'équation la forme $z_1^5 - z_2^5 = 0$. [Clebsch 1871b, p. 341]

Là encore, les équations de la géométrie sont utilisées à un autre dessein que leur propre étude : dans cet exemple, le fait que l'équation considérée est quadratique indique à Clebsch que la transformation correspondant aux deux points d'inflexion aura des coefficients faisant intervenir des racines carrées ; il s'agit ainsi pour Clebsch de contrôler les irrationalités impliquées dans les transformations de l'équation du cinquième degré.

Enfin, la cinquième et dernière catégorie est faite d'équations de la géométrie qui sont seulement évoquées, que ce soit dans ces commentaires ou de vagues suggestions sans être impliquées dans un travail mathématique. C'est par exemple le cas dans le texte de Lie, qui évoque l'équation aux seize droites et celle aux seize points singuliers dans son paragraphe de commentaires. C'est aussi le cas dans le second paragraphe du chapitre des applications géométriques du *Traité des substitutions et des équations algébriques*, où Jordan donne à titre d'exemples des équations pouvant être étudiées de façon analogue à ce qu'il a fait en amont.

La répartition des différents statuts auteur par auteur est donnée dans le tableau 3.4, où la différence entre nombre total de statuts et celui d'équations de la géométrie s'explique par le fait que certaines équations possèdent plusieurs statuts : par exemple, l'objet même de la note [Jordan 1870a] est de trouver une certaine réduite de l'équation aux vingt-sept droites. Cette réduite possède donc à la fois les statuts 1 et 3.

On peut déjà voir que les quatre premiers statuts se distribuent à peu près équitablement sur l'ensemble des occurrences d'équations de la géométrie. Le dernier statut ne

114. Cet exemple montre que des équations de la géométrie peuvent avoir des statuts différents selon le texte auquel elles appartiennent, et donc selon le travail dans lequel l'auteur du texte la mobilise.

115. « Nur ist zuvor, um die Gleichung 5^{ten} Grades auf diese Form zu bringen, eine quadratische Gleichung zu lösen, welche die beiden Wendepunkte von C auf dieser Tangente trennt ; diese muss man zu Grunde legen, um der Gleichung die Form $z_1^5 - z_2^5 = 0$ zu geben. »

	Statut 1	Statut 2	Statut 3	Statut 4	Statut 5	Total
Hesse	2					2
Kummer		3		1		4
Clebsch		7	7	18	1	33
Jordan	14	2	9		3	28
Klein	4	9	6	2	1	27
Lie					2	2
Noether	3	3	2	2		10
Netto	1					1
Maschke					1	1
Weber	1					1
Total	25	24	24	23	8	104

Table 3.4 – Répartition des statuts des équations de la géométrie.

représente quant à lui qu'une petite portion de l'ensemble : cela signifie que les équations de la géométrie sont majoritairement impliquées dans des démonstrations mathématiques, que ce soit pour leur propre étude ou pour d'autres buts. En outre, comme les descriptions précédentes l'ont montré, ces démonstrations relèvent de façons de faire partagées, précisément identifiables, et que l'on retrouve de façon récurrente dans le corpus.

Il est intéressant de constater une différence de répartition entre deux des contributeurs principaux du corpus que sont Jordan et Clebsch. Chez Jordan, il y a une majorité d'équations ayant le statut 1, ce qui reflète que ses publications qui apparaissent dans le corpus sont toutes dédiées à l'étude d'équations de la géométrie. En revanche, chez Clebsch, ce statut est totalement absent, illustrant les apparitions sporadiques des équations de la géométrie dans ses travaux décrite par les auteurs de sa notice nécrologique :

> La théorie générale des équations algébriques, comme elle a été fondée par Lagrange, développée par Gauss et Abel puis érigée par Galois dans son actuelle généralité, a grandement intéressé Clebsch. Il n'a toutefois engagé aucune véritable recherche propre dans cette direction, mais il a été utile à ces questions en ne laissant passer aucune occasion, lorsqu'un problème algébrique ou géométrique conduisait à des équations de caractère particulier, d'attirer l'attention sur ces équations en elles-mêmes dignes d'intérêt [116]. [Brill, Gordan et al. 1873, p. 47]

En outre, la prédominance du statut 4 chez Clebsch s'explique par le fait que l'essentiel des

116. « Die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen, wie sie durch Lagrange begründet, durch Gauss und Abel weiter entwickelt, durch Galois zu ihrer jetztigen Allgemeinheit erhoben worden ist, hat Clebsch in hohem Masse interessirt. Er hat freilich in dieser Richtung nicht eigentlich eigene Untersuchungen angestellt, aber er hat indirect diesen Fragen genützt, indem er keine Gelegenheit vorübergehen liess, wenn ein geometrisches oder algebraisches Problem zu Gleichungen besonderen Charakters hinleitete, auf eben diese Gleichungen als an und für sich beachtenswerth hinzuweisen. »

équations ayant ce statut proviennent de son mémoire sur l'interprétation géométrique de la théorie de l'équation du cinquième degré : presque toutes servent à cette interprétation, et pas à des études d'équations de la géométrie.

Chez les autres contributeurs principaux que sont Klein et Noether, la répartition se fait sans trop de différence entre les quatre premiers statuts, à l'image de la répartition globale. Enfin, les statuts qui sont comptés pour les auteurs restants reflètent ce qui ressortait de la description de leurs textes. Ainsi, l'équation aux neuf points était considérée en elle-même dans les textes de Hesse, Netto et Weber ; les équations de la géométrie de Kummer apparaissaient ça et là dans des articles dévolus à l'étude des surfaces quartiques ; elles ne faisaient que l'objet de commentaires dans les textes de Lie et de Maschke.

3.3.3 Équations célèbres, équations anonymes

Regardons maintenant les situations géométriques auxquelles sont associées les différentes occurrences d'équations de la géométrie.

Environ deux tiers de ces occurrences concernent des équations de la géométrie associées à des situations géométriques qu'on ne trouve qu'une ou deux fois dans tout le corpus. À titre d'exemple, on peut mentionner l'équation aux quarante-cinq triangles formés à partir des vingt-sept droites, rencontrée en tout à deux endroits, ou encore l'équation associée aux systèmes de trente-deux droites mis en évidence dans l'article de Klein de 1870, [Klein 1870]. Toutes ces équations surviennent donc de façon tout à fait ponctuelles, et sont rarement travaillées par plus d'un auteur du corpus.

Le tiers restant des occurrences d'équations de la géométrie est distribué entre les cinq situations que sont les vingt-sept droites, les neuf points d'inflexion, les seize droites des quartiques à conique double, les vingt-huit tangentes doubles et les seize points singuliers des surfaces de Kummer. Leur fréquence d'apparition ne sont pas toutes identiques : les vingt-sept droites et les neuf points d'inflexion reviennent un peu plus souvent que les autres. La plupart des équations correspondant à ces cinq situations entrent dans la catégorie du statut 1 au sens précédent, mais ce n'est pas systématique. Par exemple, l'équation aux seize droites est dans toutes les catégories sauf la 3, selon le texte auquel elle appartient.

Les équations de ces cinq situations géométriques sont celles qui étaient explicitement listées dans l'*Encyklopädie* et qui formaient les sujets de cinq des six paragraphes du chapitre des applications géométriques du *Traité*, ce qui explique peut-être en partie les forts nombres d'occurrences associés. Mais il faut remarquer que ces équations sont retrouvent chez différents auteurs ; elles circulent, elles sont reprises, retravaillées ou commentées selon les cas.

Remarquons à ce propos que les sous-réseaux que le graphe des citations du corpus avait mis en évidence ne coïncident pas tout à fait avec des groupes de textes centrés sur les mêmes équations de la géométrie. C'est le cas pour le sous-réseau formé de [Klein 1888 ;

Maschke 1889] (auxquels on peut d'ailleurs ajouter la note [Jordan 1870a]), correspondant au problème du lien entre les vingt-sept droites et les fonctions hyperelliptiques. Mais dans le texte du sous-réseau [Kummer 1863 ; Kummer 1864 ; Clebsch 1868 ; Klein 1870 ; Clebsch 1871b ; Klein 1871b ; Lie 1872], on trouve les équations aux seize droites ainsi que celle aux seize points singuliers. Enfin, le troisième sous-réseau [Hesse 1847 ; Noether 1879 ; Netto 1882 ; Weber 1896] fait apparaître à la fois l'équation aux neuf points d'inflexion et celle aux vingt-huit tangentes doubles.

Cette intrication souligne le fait que les auteurs du corpus, même s'ils consacrent parfois des textes principalement à une seule de ces équations, ne les considèrent souvent pas individuellement. Elles sont partie d'un tout, étiqueté « équations de la géométrie », et sont liées entre elles dans les textes. Ainsi, les équations aux vingt-sept droites, aux vingt-huit tangentes doubles et aux seize droites étaient reliées dans les travaux de Jordan ; les équations aux seize points et aux seize droites sont présentées ensemble dans les commentaires de Lie ; l'équation aux vingt-huit tangentes doubles donne lieu aux *Tripelgleichungen*, qui sont en retour reliées à l'équation aux neuf points d'inflexion.

L'équation aux neuf points

Cette dernière équation tient un rôle un peu particulier car c'est elle qui fait l'objet d'un chapitre dans chacun des deux livres que sont le *Substitutionentheorie* de Netto et le *Lehrbuch* de Weber. Or, et c'est l'occasion de revenir sur un point que j'avais laissé de côté jusqu'à présent, elle fait également l'objet d'un chapitre dans le célèbre *Cours d'algèbre supérieure* de Serret. Ce chapitre est d'abord apparu sous la forme d'une note supplémentaire dans la deuxième édition de ce manuel, [Serret 1854], intitulée « Sur la résolution algébrique de l'équation du neuvième degré à laquelle conduit la recherche des points d'inflexion des courbes du troisième degré ». L'objet de la note était, selon l'aveu de Serret lui-même, de « reproduire » les recherches de Hesse concernant l'équation associée aux neuf points d'inflexion des courbes cubiques :

> La démonstration que M. Hesse a donnée dans son second mémoire, pour établir la résolubilité de l'équation du neuvième degré dont il s'agit, suppose également le théorème de Maclaurin [sur l'alignement trois à trois des points d'inflexion]. M. Hesse fait voir qu'il existe certaines relations entre les racines, et il démontre généralement que toute équation du neuvième degré dont les racines ont cette même propriété, est résoluble par radicaux. L'analyse de M. Hesse est assez remarquable pour que je croie devoir la reproduire ici. [Serret 1854, p. 539]

Il s'agissait effectivement d'une reproduction, dans le sens où Serret reprenait alors pas à pas les travaux de Hesse, notations comprises [117].

117. Dans la troisième édition du *Cours d'algèbre*, un supplément apparaissait : Serret montrait en plus l'existence de vingt-sept (!) points particuliers sur une courbe cubique et prouvait que l'équation correspondante était résoluble par radicaux. Il renvoyait à un article de Steiner, [Steiner 1846b] dans la même

La présence de l'équation aux neuf points d'inflexion dans les éditions du manuel de Serret postérieures à 1854 — ainsi que l'édition allemande, [Serret 1868] — montre qu'elle devait probablement être un exemple destiné à être connu des étudiants et qu'elle a donc fait partie des connaissances communes des mathématiciens de la seconde moitié du XIXe siècle (et même au-delà, avec sa présence dans les livres de Netto et de Weber). Rejoignant ainsi les équations d'Abel, celles de Galois [118], etc., l'équation aux neuf points se présente finalement comme un exemple commun de la théorie des équations à cette époque.

Du reste, jamais cité par les auteurs du corpus pour ce chapitre sur les points d'inflexion, le *Cours d'algèbre* confirme son statut de manuel destiné à un public plus étudiant : il n'intervient pas en tant que référence dans les textes de recherche du corpus.

L'équation aux vingt-sept droites

Ajoutons encore un mot sur l'équation associée à l'objet principal de cette thèse : les vingt-sept droites. Comme on l'a vu lors de la description du corpus, outre les travaux de Jordan examinés au chapitre précédent, elle intervient en tant que sujet de motivation du texte de Klein de 1888, consacré au lien entre les fonctions hyperelliptiques et les vingt-sept droites. L'équation aux vingt-sept droites était aussi présente dans le mémoire de Clebsch de 1871, intervenant dans le processus d'interprétation géométrique de l'équation quintique. Enfin, elle était listée dans le texte de Klein de 1871, aux côtés d'autres équations de la géométrie, en tant qu'exemple intuitif pour la théorie des équations.

La présentation que j'ai faite de ces travaux a montré qu'ils étaient liés par une certaine thématique, autre que celle des vingt-sept droites : la volonté par Clebsch et Klein de géométriser certaines parties de la théorie des équations. À ce titre, je les analyserai plus finement, mais dans un chapitre ultérieur, continuant pour le moment à examiner le corpus entier des équations de la géométrie.

3.4 Des éléments de cultures en contact

Comme les descriptions effectuées dans la section 3.2 le suggèrent, le corpus des équations de la géométrie se présente comme un ensemble de textes dans lesquels s'opèrent des rapprochements entre une certaine partie de l'algèbre (théorie des équations, théorie des substitutions) et une certaine partie de la géométrie (liée aux configurations finies d'objets associés à des courbes et surfaces de petit degré). Je souhaite considérer sous l'angle de la notion de culture les deux côtés mis ensemble par ces équations de la géométrie.

équation apparaissait. De ce point de vue, il existe donc au moins une équation de la géométrie antérieure au mémoire de Hesse de 1847. Mais dans tout le corpus constitué dans ce chapitre, je n'ai trouvé aucune mention à ces travaux de Steiner : l'équation de la géométrie qui s'y trouve n'a pas circulé entre les auteurs du corpus.

118. Je rappelle qu'une équation de Galois est une équation irréductible telle qu'il existe deux de ses racines qui permettent d'exprimer rationnellement toutes les autres.

Cela me servira de socle pour analyser par la suite plus précisément comment s'exprime l'entremêlement des deux dans les textes du corpus.

La définition de culture que j'ai ici en tête est celle des anthropologues Alfred Louis Kroeber et Clyde Kluckhohn :

> La culture consiste en des *patterns* explicites et implicites du et pour le comportement, acquis et transmis par symboles, constituant les réalisations distinctives des groupes humains, incluant leur incarnation en artéfacts ; le cœur essentiel de la culture consiste en des idées traditionnelles (c'est-à-dire dérivées et sélectionnées historiquement) et en particulier leurs valeurs attachées ; les systèmes culturels peuvent d'une part être considérés comme des produits de l'action et d'autre part comme des éléments de conditionnement pour l'action future [119]. [Kroeber & Kluckhohn 1952, p. 118]

C'est dans l'idée de *pattern* que réside une caractéristique forte de cette notion de culture. Lorsque des individus sont empreints d'une certaine culture, leur action, leur comportement et leurs idées sont guidées par des modèles préexistants. Réciproquement, parce qu'ils se soumettent à ces modèles, les individus participent à la consolidation (mais aussi à des modifications continues et subreptices) de la culture. Déceler des conformités comportementales à des *patterns* permet ainsi à l'observateur de deviner une culture en place dans laquelle les comportements en question sont valorisés en tant que comportements normaux. Il s'agit donc d'observer une organisation particulière des manières de faire et de penser d'un certain groupe social, et c'est cette organisation que l'on décrit en tant que culture du groupe.

Dans le cas des mathématiques du XIXe siècle, l'action à laquelle l'historien a accès est principalement incarnée dans les textes, publiés ou non [120], sous forme de théorèmes, de démonstrations, ou de commentaires mélioratifs ou dépréciatifs sur tel objet et telle approche. Ainsi, pour déterminer s'il existe par exemple une culture de la géométrie au XIXe siècle, il faudrait en principe examiner tous les textes se rapportant à la géométrie [121] durant cette période et examiner si des régularités de comportement s'y trouvent. Pour cela, plusieurs aspects seraient à prendre en compte : les sujets mathématiques eux-mêmes ou les techniques de démonstration, mais aussi les façons de formuler des théorèmes, les notations adoptées, les résultats supposés connus, les savoirs tacites [122], etc. Il faudrait aussi prendre en compte les auteurs eux-mêmes, voir s'ils sont engagés sur plusieurs fronts (on peut penser à ce que nous appelons aujourd'hui la géométrie algébrique et la géométrie différentielle), si leurs affiliations institutionnelles jouent un rôle dans la façon qu'ils ont

119. « Culture consists of patterns, explicit and implicit, of and for behaviour acquired and transmitted by symbols, constituting the distinctive achievements of human groups, including their embodiment in artifacts; the essential core of culture consists of traditional (i.e. historically derived and selected) ideas and especially their attached values; culture systems may, on the one hand, be considered as products of action, on the other, as conditional elements of future action. »

120. Elle peut aussi s'incarner en des artéfacts tels que les instruments de calcul ou, ce qui est plus proche de notre sujet, des modèles en fil de fer ou en plâtre de surfaces.

121. Cela poserait bien sûr la question de savoir déterminer ce qui relève de la géométrie ou non.

122. Au sujet des savoirs et connaissances tacites en mathématiques, voir [Archibald et al. 2012].

de produire des mathématiques, et étudier de façon précise les processus de transmission du savoir entre eux, en particulier de génération en génération.

Je voudrais ici donner des indices allant dans le sens d'une culture de la théorie des équations en lien avec les travaux de Galois d'une part, et d'une culture des configurations géométriques d'une part. Dans les deux cas, le point de départ sera la reconnaissance de certains points mathématiques qui sont apparus de façon récurrente dans la description du corpus des équations de la géométrie, et que j'interpréterai comme des traces des cultures en question.

Remarquons que la situation n'est pas symétrique entre ces deux morceaux algébrique et géométrique, pour deux raisons. D'abord, un certain nombre de recherches historiques récentes [123] ont étudié la circulation, les lectures et les sédimentations des travaux de Galois au cours du XIXe siècle. Ces recherches permettent maintenant de situer assez efficacement les différentes traces des travaux associés à Galois dans le cadre de l'époque, offrant ainsi une bonne base pour examiner la question d'une culture. À l'inverse, les recherches historiques sur le sujet des configurations géométriques sont, me semble-t-il, encore trop peu développées pour pouvoir m'y baser [124]. À cette asymétrie historiographique s'ajoute ensuite une asymétrie concernant les auteurs du corpus des équations de la géométrie eux-mêmes : parmi les auteurs les plus actifs, seul Jordan est spécialisé en théorie des équations et des substitutions, alors que Hesse, Clebsch, Klein et Noether sont plutôt des géomètres de formation. Je souhaite en fait exploiter cette différence, et tenter de saisir le côté géométrique de l'affaire par les géomètres eux-mêmes. En raison des lacunes historiographiques évoquées plus haut, les compétences (sur les configurations géométriques) qu'ils mobilisent dans le corpus seront confrontées à l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.* Pour suggérer une culture des configurations géométriques, j'utiliserai ainsi une présentation de ces compétences faite à la fin du XIXe siècle par des mathématiciens auteurs de l'*Encyklopädie* (et par là-même proches des points de vue de Klein).

3.4.1 Vers une culture de la théorie des équations en lien avec les travaux de Galois

Le premier élément allant dans le sens d'une culture de la théorie des équations et que l'on peut mettre en évidence à partir du corpus est celui du problème même de la résolubilité d'équations algébriques particulières. En effet, dans presque tous les textes du corpus, les équations de la géométrie sont étudiées dans le but de déterminer des propriétés de résolution — par radicaux, par la mise en évidence de réduites particulières ou par des fonctions transcendantes. Or, cette question de résolubilité des équations était une

123. J'ai déjà donné les références suivantes au fur et à mesure de ce chapitre et du précédent, [Brechenmacher 2006 ; Brechenmacher 2011 ; Ehrhardt 2011 ; Goldstein 2011a ; Ehrhardt 2012].

124. Pour les courbes cubiques et quartiques, voir [Gray 2000 ; Gray 2010]. Pour quelques éléments sur les surfaces de Kummer, voir [Rowe 2013].

question centrale de la théorie des équations, déjà avant le début du XIXe siècle. C'est sous cet angle qu'avait par exemple été traitée l'équation cyclotomique dans les *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss. Le théorème de résolubilité de cette équation fut un résultat qui intégra rapidement les traités d'algèbre du début du XIXe siècle tout en nourrissant la recherche sur les équations algébriques à cette époque [125].

Abel lui-même avait mené des recherches en s'inspirant de la cyclotomie, s'intéressant aux équations dont les racines sont liées par certaines relations, [O. Neumann 2007, p. 120], et c'est justement dans la lignée de ces recherches que Hesse plaçait son mémoire de 1847. On peut d'ailleurs remarquer que l'inscription dans ces thématiques de recherche se lit aussi dans des formulations typiques, allant jusqu'à reprendre des notations caractéristiques. Ainsi, rappelons que Hesse avait étudié les équations de degré 9, dont les racines $x_1, \ldots, x_9$ sont liées trois par trois par des relations rationnelles et symétriques avec la propriété que si une telle relation est $x_\mu = \theta(x_\chi, x_\lambda)$, alors on a aussi $x_\lambda = \theta(x_\mu, x_\chi)$ et $x_\chi = \theta(x_\lambda, x_\mu)$. Hesse avait montré que de telles équations sont résolubles par radicaux, et mis ce résultat en relation avec une conjecture d'Abel de 1830 : si une équation irréductible de degré premier possède la propriété que parmi trois quelconques de ses racines, l'une est toujours fonction rationnelle des deux autres, alors cette équation est résoluble par radicaux.

Ce type d'énoncé concernant des équations de degré donné et dont les racines sont liées par des relations était typique dans la théorie des équations du début du XIXe siècle. Il en existait des semblables chez Abel lui-même : « Si les racines d'une équation d'un degré quelconque sont liées entre-elles de sorte, que toutes ces racines peuvent être exprimées rationnellement au moyen de l'une d'elles, que nous désignerons pas x ; si, de plus, en désignant par $\theta x, \theta_1 x$ deux autres quelconques racines en question, on a $\theta\theta_1 x = \theta_1\theta x$, l'équation dont il s'agit sera toujours résoluble algébriquement. » [Abel 1829, p. 132]. On trouve encore des énoncés ressemblants chez Galois : « Pour qu'une équation de degré premier soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que deux quelconques de ses racines étant connues, les autres s'en déduisent rationnellement. » [Galois 1846, p. 395]. Enfin, on pourra encore penser aux équations étudiées par Mathieu et que Jordan avait placées dans le *Traité*. Ce sont des équations de degré 8 telles que si trois de leurs racines a, b, c sont données, il en existe une quatrième d telle que $d = \psi(a, b, c)$, $c = \psi(d, a, b)$, $b = \psi(c, d, a)$ et $a = \psi(b, c, d)$, où ψ est à nouveau une fonction rationnelle et symétrique.

L'existence de formulations semblables et se retrouvant de façon répétée dans les travaux de mathématiciens différents est ainsi une marque indiquant une certaine culture de la théorie des équations au début du XIXe siècle. Le fait qu'on en retrouve encore des traces dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques*, plus tardif, montre ainsi que Jordan est encore imprégné de cette culture lorsqu'il écrit son ouvrage.

Si l'équation cyclotomique, les équations d'Abel et celles de Galois ne sont apparues que de façon très ténue dans le corpus des équations de la géométrie, des travaux concernant

125. [Goldstein & Schappacher 2007 ; O. Neumann 2007].

d'autres équations particulières y ont été explicitement mis en avant : ceux sur l'équation du cinquième degré et sur les équations modulaires. C'était ainsi une partie de ces travaux que Jordan visait lorsqu'il écrivait : « Tous les géomètres connaissent le fait le l'abaissement des équations modulaires pour les transformations des degrés 5, 7 et 11, et les importantes conséquences qu'en a déduites M. Hermite », [Jordan 1869a, p. 865]. Plus précisément, l'abaissement des équations modulaires était un résultat qui avait été énoncé sans démonstration par Galois en 1832 ; il avait par la suite été prouvé par Betti ainsi que par Hermite dans les années 1850. Ce dernier avait alors lié l'équation modulaire pour la transformation d'ordre 5 à l'équation générale du cinquième degré ; un des résultats de base sur lesquels il s'était appuyé était que la quintique pouvait se mettre sous la forme dite de Jerrard $x^5 - x - a = 0$ au moyen d'une transformation de Tschirnhaus [126]. Hermite en avait alors déduit qu'il était possible de résoudre l'équation du cinquième degré au moyen des fonctions elliptiques — l'impossibilité de résolubilité par radicaux avait été démontrée par Abel quelques années plus tôt, en 1826-1828. À la même époque que Hermite, Kronecker et Brioschi avaient eux aussi proposé une façon de résoudre l'équation du cinquième degré à l'aide des fonctions elliptiques [127]. Comme j'ai pu le décrire précédemment, Klein avait également exposé son point de vue sur le sujet, à travers ses recherches sur l'icosaèdre des années 1870-1880.

Tous ces résultats sur les équations modulaires et l'équation du cinquième degré se sont vus dans notre corpus, en tant que connaissances usuelles [128], mais aussi en tant que modèles de la marche à suivre pour d'autres travaux. Par exemple, Jordan situait explicitement son résultat d'abaissement de l'équation de trisection des fonctions hyperelliptiques dans la lignée de ses prédécesseurs et avait aussi cherché (dans le *Traité*) à résoudre les équations de degré quelconque à l'aide des fonctions hyperelliptiques. De même, Noether présentait les résultats connus à ce sujet [129] avant de proposer son approche, consistant à introduire l'équation aux vingt-huit tangentes doubles. Or, ces travaux de Betti, Hermite et Kronecker représentent une des voies par lesquelles les recherches de Galois ont été lues et diffusées dans les années 1850-1860 [130]. Dans notre corpus, on les voit en toile de fond, raccordées aux équations de la géométrie par plusieurs des auteurs eux-mêmes ; c'est ainsi un deuxième élément allant dans le sens d'une culture de la théorie des équations, dont

126. [Houzel 2002, p. 73-74 ; Goldstein 2011a].
127. [Houzel 2002, p. 77-79 ; Petri & Schappacher 2004]. L'entremêlement entre théorie des équations et fonctions elliptiques chez Hermite et Kronecker est lié au champ de recherches qui a été baptisé « analyse algébrique arithmétique » dans [Goldstein & Schappacher 2007].
128. Ou en tout cas présentées comme telles : « Tous les géomètres connaissent... ». Voir aussi le mémoire de Clebsch de 1871, consistant à interpréter géométriquement tous les éléments relatifs à l'équation du cinquième degré. Le fait qu'il mentionne une « théorie de l'équation du cinquième degré » laisse d'ailleurs supposer qu'il considère ces éléments comme un tout, édifié en théorie.
129. Pour Noether, il s'agit plutôt de l'équation modulaire de degré 8 et son lien à l'équation du septième degré, mais comme nous l'avons vu, les références données sont les mêmes travaux de Betti, Kronecker et Hermite.
130. [Brechenmacher 2011 ; Goldstein 2011a ; Ehrhardt 2012].

fait partie tout ce qui se rattache aux équations modulaires, y compris leur lien avec la résolubilité des équations générales.

Le troisième élément permettant de deviner une telle culture est que ces travaux sur les équations modulaires et l'équation du cinquième degré font intervenir un certain nombre de techniques qui se retrouvent également dans le traitement des équations de la géométrie, et qui sont en partie héritées de générations antérieures. Parmi ces techniques, l'usage de résolvantes ou de fonctions de racines est central : nous l'avons vu (sous différentes formes) en particulier chez Hesse, Clebsch, Jordan, Klein et Noether. Ainsi, dans l'article de Hesse, il s'agissait de créer des résolvantes de l'équation aux neuf points d'inflexion, en s'aidant de relations entre les racines, ce qui s'apparente à ce qui pouvait être fait dans les travaux sur les équations de l'époque d'Abel. L'emploi de fonctions de racines prenant un nombre particulier de valeurs (éventuellement pour en déduire des résolvantes) chez Jordan et chez Noether est particulièrement marquant. Il renvoie d'abord au problème de recherche de résolvantes développé par Lagrange, Vandermonde et Waring à la fin du XVIII^e siècle [131]. Mais il se situe aussi dans des développements (liés aux précédents) plus proches de Jordan, consistant à déterminer le nombre de valeurs que peuvent prendre des fonctions algébriques données [132]. Or, créer des résolvantes à partir de fonctions explicites de racines et prenant le bon nombre de valeurs était un des points cruciaux des travaux de Hermite et de Kronecker évoqués précédemment.

Remarquons également que l'utilisation par Clebsch d'un tableau (de couples de droites) pour en déduire des propriétés de résolubilité de l'équation aux seize droites rappelle l'usage de Betti d'un tableau pour décrire les (permutations associées aux) substitutions du groupe de l'équation modulaire d'ordre 5 et en déduire [133] l'existence d'une réduite de degré 5.

Le cas de l'utilisation de groupes de substitutions mérite aussi qu'on s'y arrête. Les textes du corpus qui ne les utilisent pas sont ceux de Hesse, Kummer, Clebsch et celui de Klein de 1870. Dans les autres, les groupes sont au moins évoqués, sinon étudiés et utilisés pour répondre aux questions de résolubilité des équations de la géométrie. Ils avaient aussi joué un rôle important pour les équations modulaires, en particulier pour Galois et Betti. Changeant légèrement de point de vue sur cette question, Hermite ne s'était pas arrêté aux décompositions du groupe de l'équation modulaire et avait cherché à mettre en avant les résolvantes correspondantes, ce qui exprimait son attachement aux aspects effectifs des calculs [134]. Le point de vue de Kronecker sur les méthodes de Galois était plus tranché : ces dernières étaient pour lui « plus propres à cacher la vraie nature des équations résolubles qu'à la découvrir [135] ». Au contraire, Jordan qualifiait les travaux de Galois de

131. [O. Neumann 2007, p. 108]. Par ailleurs, remarquer que ces objets et leur utilisation dans la théorie des équations étaient par exemple présentées dans le *Cours d'algèbre supérieure* de Serret, dès sa première édition de 1849.
132. [Ehrhardt 2012, p. 160].
133. [Goldstein 2011a, p. 236].
134. [Goldstein 2011a, p. 243].
135. Cité à partir de [Ehrhardt 2012, p. 119]. Au sujet des préférences de Kronecker pour les formules et

« base définitive » de la théorie des équations, [Jordan 1870b, p. I], et son *Traité* en fait évidemment grand usage, notamment pour les équations de la géométrie.

L'usage (ou non) des groupes dans le corpus des équations de la géométrie et dans les travaux adjacents met en évidence deux des difficultés de la question de culture. L'une est liée à l'aspect chronologique et dynamique des savoirs qui y sont en jeu : situé chronologiquement au milieu du corpus, le *Traité* de Jordan fait évoluer les savoirs algébriques des uns et des autres, et construit petit à petit une théorie des groupes en devenir [136]. Ainsi, au contraire d'héritages plus anciens comme les résolvantes ou les fonctions de racines, il ne faut pas oublier de considérer que dans les années 1870, les savoirs relatifs aux groupes de substitutions sont toujours en constitution ; examiner le rôle des équations de la géométrie dans cette constitution est justement un des enjeux de la présente thèse.

L'autre difficulté est liée à celle de l'existence de points de vue parfois conflictuels sur des objets ou des approches. L'exemple de ceux de Kronecker et de Jordan sur ce qu'est la nature d'une équation pourrait faire penser qu'il n'y a pas une culture, mais des cultures de la théorie des équations. Toutefois, il me semble plus juste de voir cela comme les parts d'interprétations personnelles qui existent dans toute culture, et qui peuvent elles-mêmes provenir de l'intrication des auteurs dans d'autres cultures. Ainsi, comme le suggère C. Ehrhardt, les points de vue de Kronecker sur la théorie des équations pourraient être liés à une culture institutionnelle liée à l'université de Berlin [137]. Par ailleurs, il faut souligner que tous ces points de vue parfois antagonistes sont exprimés sur des objets, résultats ou théories qui sont sinon reconnues par, au moins connues de tous les auteurs : il ne peut y avoir conflit que sur un terrain partagé.

Pour résumer, c'est ce terrain partagé, constitué des différents éléments que j'ai mis en évidence (questions communes de résolubilité des équations, travaux sur les équations modulaires et l'équation du cinquième degré, utilisation de techniques répandues), qui suggère une certaine culture de la théorie des équations autour du milieu du XIXe siècle, associée en particulier aux travaux de Galois.

Enfin, je précise encore que les indices mis en évidence dans les paragraphes précédents sont loin d'épuiser tout ce qui relèverait de la théorie des équations au XIXe siècle. On pourrait ainsi penser aux approximations de racines, à la séparation des racines et en particulier au théorème de Sturm, autant de thèmes liés à l'équation dite séculaire [138].

---

les calculs, voir [Edwards 1989 ; Edwards 2005 ; Edwards 2009].

136. [Wussing 1969].

137. « Au moment où Kronecker y fait ses études, Berlin est un centre de recherches particulièrement dynamique. La constitution de l'identité et de la spécificité des mathématiques berlinoises passe par le privilège accordé à certains types de recherches, lié à une conception particulière des mathématiques. L'adhésion à ces schémas de pensée constitue donc, pour un débutant comme Kronecker, tout autant une affaire d'héritage intellectuel inculqué à travers l'enseignement, c'est-à-dire une façon "naturelle" de pratiquer et de concevoir la discipline, qu'un moyen de voir ses efforts récompensés par la reconnaissance des maîtres. » [Ehrhardt 2012, p. 124-125].

138. Sur ces deux derniers points, voir [Sinaceur 1991 ; Brechenmacher 2007b]. Comme écrit en introduction de thèse, F. Brechenmacher a plus récemment discuté de la situation de l'équation séculaire à la

3.4.2 Vers une culture des configurations géométriques

Pour examiner à présent le côté géométrique de la situation, je vais me concentrer sur les cinq configurations principales qui sont associées aux équations de la géométrie et qui ont été dégagées à la section 3.3 : les neuf points d'inflexion des courbes cubiques, les seize droites des surfaces quartiques à conique double, les seize points singuliers des surfaces de Kummer, les vingt-sept droites des surfaces cubiques et les vingt-huit tangentes doubles des courbes quartiques. Des indices allant dans le sens d'une culture de ces configurations seront donnés par des problèmes et des résultats que l'on retrouve de façon récurrente pour chacune d'elles, et souvent traités par les mêmes mathématiciens.

Pour cela, je me baserai sur la liste de problèmes mathématiques associés aux vingt-sept droites et qui ont été décrits au chapitre 1 : existence des vingt-sept droites et de divers objets incarnant certaines de leurs relations d'incidence (les quarante-cinq triangles, les trente-six doubles-six, etc.) ; problème de notation ; recherche des cas de réalité pour les vingt-sept droites et les quarante-cinq triangles ; utilisation des droites dans la détermination des formes des surfaces cubiques ; liens avec d'autres configurations [139].

Comme je l'ai écrit plus haut, les recherches historiques sur le sujet des configurations géométriques sont pour le moment encore trop peu développées pour pouvoir s'y baser. Je voudrais toutefois mentionner quelques travaux récents qui, bien que n'étant pas en relation directe avec les auteurs de notre corpus, mettent en évidence des difficultés de la question d'une culture des configurations. Au milieu du XIX^{e} siècle en effet, les britanniques Cayley, Sylvester et Kirkman étaient engagés dans la « tactique », un domaine des mathématiques rattaché aux notions d'ordre et d'arrangement, et lié aux problèmes récréatifs, [Ehrhardt 2015]. La tactique faisait typiquement intervenir des problèmes combinatoires, comme celui des quinze écolières [140]. Or, d'après Dick Tahta, de tels problèmes combinatoires auraient influé sur les intérêts et les façons de faire de Cayley vis à vis des configurations géométriques, [Tahta 2006]. C. Ehrhardt insiste sur le fait que la tactique ne s'est pas transportée en Allemagne, dont sont issus la plupart des auteurs du corpus des équations de la géométrie. On ne peut toutefois pas exclure que ce contexte particulier pour les mathématiciens britanniques n'ait pas influé sur les auteurs du corpus de façon indirecte : par exemple, nous avons vu que Clebsch avait commencé à étudier les surfaces de petit degré à partir des travaux de Cayley et de Salmon. Ces considérations dévoilent ainsi

---

lumière de la notion de culture, [Brechenmacher 201 ?].

139. Dans cette liste, je n'ai donc pas pris en compte les questions relatives aux façons d'engendrer les surfaces cubiques (par faisceaux et autres gerbes), qui, comme on l'a vu, se rattachent davantage aux surfaces elles-mêmes qu'à leurs droites — du reste, les problèmes analogues de savoir engendrer les courbes cubiques et quartiques, ainsi que les surfaces quartiques de Kummer ou à conique double existent. Je n'ai pas non plus tenu compte ici de l'approche des configurations par la théorie des groupes, puisqu'elles partagent cela en commun par définition même du corpus.

140. Le problème est le suivant : quinze jeunes filles sortant trois par trois de leur école sur sept jours consécutifs, il s'agit de trouver la façon dont elles peuvent se disposer par trois, de sorte que sur les sept jours, il n'y en ait jamais deux qui marchent côte à côte.

la complexité de la question de la culture : on voit sur l'exemple donné ici qu'il faudrait tenir compte de domaines moins directement reliés à la géométrie, comme la combinatoire des mathématiques récréatives, mais influant potentiellement sur les façons de faire des auteurs du corpus.

Cela étant dit, j'utiliserai maintenant l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, pour les raisons décrites plus haut. Dans cet ouvrage, les courbes cubiques et quartiques sont traitées dans un chapitre particulier écrit par Gustav Kohn, [Kohn 1908], et les surfaces quartiques de Kummer et à conique double dans un chapitre de Wilhelm Franz Meyer, [Meyer 1930]. Noter que ces deux auteurs étaient des proches de Klein. Meyer avait en effet fait lui-même partie du noyau dur du projet encyclopédique initié par Klein [141]. Kohn était quant à lui un mathématiciens autrichien ; il enseigna la géométrie (et en particulier le sujet des courbes algébriques) à l'université de Vienne, présentant notamment les points de vue de Klein sur le sujet [142].

Commençons avec les neuf points d'inflexion des courbes cubiques planes. L'*Encyklopädie* indique que Newton avait déjà considéré des points d'inflexion des courbes cubiques dans son *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1704) et qu'à la même époque, De Gua et Maclaurin avaient chacun démontré que la droite qui joint deux points d'inflexion d'une courbe cubique recoupe cette courbe en un troisième points d'inflexion. C'est à Plücker que sont attribués les premiers approfondissements généraux sur le sujet des points d'inflexion, [Plücker 1835]. Plücker avait ainsi montré qu'il existe exactement (pour les cubiques lisses) neuf points d'inflexion et douze droites les contenant trois à trois [143], et avait établi les distributions possibles des points sur les droites. Plücker avait aussi montré que parmi les neuf points d'inflexion, il y en a toujours trois qui sont réels et six qui sont imaginaires et proposé une classification des cubiques en fonction de leur forme.

Kohn fait remonter aux travaux de Hesse (que nous avons déjà rencontrés) l'existence des quatre triangles formés à partir des douze droites [144], que nous avons déjà rencontrés, [Hesse 1844a ; Hesse 1844b]. Parmi d'autres objets pouvant être construits à partir des neuf points d'inflexion, Kohn présente les « polaires harmoniques » des points d'inflexion, qui sont des lieux définis de la façon suivante. Étant donné un point d'inflexion, on regarde toutes les droites qui passent par ce point : elles coupent donc la cubique en le point d'inflexion et deux autres points. Sur chacune de ces droites, il alors existe un unique point qui forme avec les trois premier une division harmonique. La polaire harmonique est le lieu formé de tous ces quatrièmes points. Une propriété est que ce lieu est une droite,

141. [Tobies 1994].
142. « Some lectures by Gustav Kohn on projective geometry, algebraic curves, and continuous groups were "strong and clear", and introduced the unifying work of Felix Klein on group theory. » [W. Moore 1989].
143. Kohn ne mentionne pas Poncelet, lequel est cité par [Hesse 1847] pour ces droites (cf. *supra*).
144. Kohn ajoute d'ailleurs que parmi les côté d'un tel triangle, il y en a toujours un qui est réel, les deux autres étant complexes conjugués. Aucune référence n'est donnée à cet endroit, et je n'ai pas vu ce résultat apparaître dans les travaux de Hesse que j'ai pu consulter.

et il y a donc neuf polaires harmoniques (associées aux neuf points d'inflexion). Toujours d'après Kohn, ces polaires ont été étudiées par Plücker, Hesse et Steiner, [Plücker 1835 ; Steiner 1846a ; Hesse 1849]. Un exemple (simple) de théorème associé à ces polaires est que les trois polaires harmoniques associées à trois points d'inflexion alignés sont concourantes.

Enfin, remarquons que Kohn fait mention de la notation des neuf points d'inflexion au moyen de couples (xy) d'entiers modulo 3, avec la propriété que trois points sont alignés si et seulement si la somme des premiers indices et celle des seconds indices sont toutes deux congrues à 0 modulo 3. À ce sujet, il renvoie en particulier à [Clebsch 1876].

En ce qui concerne les vingt-huit tangentes doubles, leur existence est attribuée à Plücker, [Plücker 1839]. L'*Ecnyklopädie* présente une classification des courbes quartiques en fonction de leurs singularités et précise dans chaque cas le nombre de tangentes doubles. Toujours en 1839, Plücker avait affirmé que les points de contact de quatre tangentes doubles quelconques appartenaient tous à une même conique, mais Hesse avait vu que ce résultat n'était pas vrai pour toutes les tangentes doubles [145]. D'après Kohn, le résultat le plus important au sujet des tangentes doubles des quartiques est l'existence des « groupes de Steiner », démontrée par ce dernier dans un article de 1855, [Steiner 1855]. Ces groupes sont formés de six couples de tangentes doubles de la façon suivante : étant donné un couple de tangentes doubles, il en existe cinq autres tels que la propriété pressentie par Plücker est vraie, c'est-à-dire que les huit points de contact associés d'une part au couple donné et d'autre part à un des cinq autres sont situés sur une même conique. Plusieurs théorèmes avaient alors été démontrés au sujet de ces groupes de Steiner, comme par exemple le fait que les douze tangentes doubles d'un groupe sont tangentes à une même courbe de classe 3. Il existait par ailleurs de nombreux autres objets mis en valeur à partir des vingt-huit tangentes doubles, comme 63 systèmes de coniques tangentes à six des tangentes doubles, etc. En relation avec ces systèmes de coniques, Kohn mentionne Geiser, qui les avait retrouvés grâce à son lien entre courbes quartiques et surfaces cubiques, [Geiser 1869b].

Kohn mentionne également un problème de notation pour les vingt-huit tangentes doubles, que Hesse aurait été le premier à résoudre grâce à un système désignant ces tangentes par des couples de chiffres compris entre 1 et 8, [Hesse 1855b]. Cette notation avait entre autres été commentée et utilisée par Cayley puis par Noether, dans le but de voir comment elle permettait de retrouver les différents groupements des tangentes doubles, [Cayley 1868b ; Noether 1879].

Enfin, Kohn indique qu'en 1839, Plücker s'était déjà intéressé à la détermination du nombre de tangentes doubles réelles parmi les vingt-huit. Il renvoie toutefois à un article plus tardif de Zeuthen pour la réponse définitive à ce problème, [Zeuthen 1874]. Ces travaux de Zeuthen ont déjà été décrits au chapitre 1 : déduites de celles pour les vingt-sept droites

145. Voir une remarque ajoutée par Hesse dans un article de Jacobi sur le nombre de tangentes doubles à une courbe de degré quelconque, [Jacobi 1850, p. 260].

par la projection de Geiser, les possibilités pour le nombre de tangentes réelles sont 28, 16, 8 et 4. Comme on l'a décrit plus haut, l'article de Zeuthen faisait aussi le lien entre la réalité des tangentes doubles et les formes possibles des courbes quartiques.

Je passe aux seize droites des surfaces quartiques à conique double. Dans son chapitre de l'*Encyklopädie*, Meyer indique que ces surfaces étaient apparues dans des travaux de Kummer, [Kummer 1863], mais que leur étude plus approfondie avait été faite par Clebsch en 1868, [Clebsch 1868] — ces deux articles de Kummer et de Clebsch sont ceux qui sont issus de notre corpus. Clebsch avait ainsi démontré l'existence des seize droites sur ces quartiques et en avait étudié les relations d'incidence, les plus basiques étant que chaque droite en rencontre exactement cinq autres. À partir de ces relations, des objets avaient été crées, comme certains quadrilatères (au nombre de quarante) qui sont formés de quatre droites sécantes deux à deux, ou cinq cônes quadratiques, ayant la propriété qu'ils possèdent exactement quatre plans tangents qui coupent la surface quartique en une paire de droites. Clebsch avait aussi mis en évidence des « doubles-quatre », qui sont des ensemble de huit droites, notées

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{matrix}$$

telles que chaque droite coupe celles qui ne sont ni sur la même ligne, ni sur la même colonne, et seulement celles-là (par exemple a coupe β, γ, δ et pas les autres du tableau). Clebsch avait dénombré 20 doubles-quatre, et avait explicitement écrit qu'il étaient l'analogue des doubles-six de Schläfli pour les vingt-sept droites des surfaces cubiques [146].

Au sujet de la notation des seize droites, Clebsch avait utilisé les nombres de 1 à 16, mais l'*Encyklopädie* en présente une autre, utilisant les symboles a_i, b_j, c_{ij}. À ce sujet, Meyer ne donne pas de référence, mais comme on l'a vu, une telle notation avait été utilisée par Geiser dans ses travaux sur le lien entre les vingt-sept droites et les seize droites, [Geiser 1869c], et fait écho à la notation proposée par Schläfli pour les vingt-sept droites.

Enfin, Meyer attribue à Zeuthen le mérite d'avoir réglé la question de réalité des seize droites et des cinq cônes [147]. Pour cela, Zeuthen avait utilisé une projection analogue à celle de Geiser pour les surfaces cubiques, et s'était ramené aux vingt-huit tangentes doubles des courbes quartiques planes.

Enfin, regardons les seize points singuliers des surfaces de Kummer. L'*Encyklopädie* confirme ce qui a été écrit *supra* : c'est Kummer, en 1864, qui avait considéré des surfaces quartiques possédant exactement seize points singuliers, soit le maximum pour des surfaces de ce degré, [Kummer 1864]. Il avait montré que ces points sont contenus six à six sur des coniques, et les plans de ces coniques sont des plans tangents singuliers à la surface quar-

146. [Clebsch 1868, p. 157].
147. [Zeuthen 1879], traduit en italien par Gino Loria, [Loria 1887].

tique, au sens où ils lui sont tangents le long des coniques. Cela donnait ainsi seize plans tangents singuliers qui contiennent six à six les points singuliers, et qui sont réciproquement six à six concourants en chacun des points singuliers. Des objets particuliers étaient encore une fois liés aux seize points et seize plans, comme des tétraèdres ayant pour sommets quatre des seize points singuliers, et pour faces quatre des plans tangents singuliers. Meyer indique que ces tétraèdres pouvaient se grouper par quadruplets qui contenaient en tout les seize points, et par d'autres quadruplets qui contenaient en tout les seize plans ; des systèmes de deux tels quadruplets sont appelés « quatre-quatre » (en allemand : « Viervier ») par Meyer, mais ce dernier ne donne pas de référence quant à cette dénomination.

Par ailleurs, une notation des seize points avait été proposée en 1878 par Weber, en conséquence de la représentation des surfaces de Kummer au moyen des fonctions thêta à deux variables [148]. La notation consistait à désigner les seize points singuliers et les seize plans singuliers par des couples (ij) ou des triplets (ijk), et les relations d'incidence étaient encore une fois retrouvées grâce à cette notation.

Pour finir, d'après Meyer, la question de la réalité des points et des plans singuliers avait été traitée par Karl Rohn, [Rohn 1881]. Il est d'ailleurs intéressant de noter que Rohn avait explicitement fait l'analogie avec le problème de réalité pour les surfaces cubiques (et les quadriques également), lié à la question de leur forme :

> Quand on parle du comportement d'une sorte de surface par rapport à sa forme, on entend usuellement par là toutes les différentes formes qui sont données soit par spécialisation du cas général, soit par changement du comportement de réalité. Ainsi parle-t-on pour les surfaces du second degré d'une surface imaginaire et de surfaces réelles avec des génératrices réelles ou imaginaires, mais aussi de sphères et de couples de plans comme spécialisation du cas général. De même, on distingue pour les surfaces du troisième degré, en fonction de la réalité de leurs droites, les surfaces avec 27, 15, 7 droites, et deux surfaces avec 3 droites ; par spécialisation, on obtient les surfaces avec des points nœuds usuels, ou biplanaires, ou uniplanaires. On peut aussi, pour la surface de Kummer, soumettre avec succès ce double changement de la forme à des recherches plus poussées [149]. [Rohn 1881, p. 99]

Cette dernière citation est un exemple qui montre l'entremêlement des recherches qui concernent les surfaces de petit degré : sont liés entre eux, et utilisés comme modèles pour les quartiques, les résultats et méthodes développées pour les surfaces quadriques et

148. [Weber 1878]. Cette représentation avait été déjà été développée par Cayley et Borchardt, [Borchardt 1877 ; Cayley 1877].

149. « Wenn man von den gestaltlichen Verhältnissen einer Flächengattung spricht, so versteht man darunter gewöhnlich alle diejenigen verschiedenen Gestalten, welche sich entweder durch Specialisirung des allgemeinen Falles, oder durch Aenderung der Realitätsverhältnisse ergeben. So spricht man bei den Flächen 2. Grades von einer imaginären Fläche und von reellen Flächen mit reellen oder imaginären Erzeugenden, weiter aber auch von Kegel und Ebenenpaar als Specialisirung des allgemeines Falles. Ebenso unterscheidet man bei Flächen 3. Grades, nach der Realität ihrer Geraden, Flächen mit 27, 15, 7, und zwei Flächen mit 3 Geraden; durch Specialisirung erhält man die Flächen mit gewöhnlichen, oder biplanaren, oder uniplanaren Knotenpunkten. Auch bei der Kummer-schen Fläche kann man diese doppelte Aenderung der Gestalt mit Erfolg einer näheren Untersuchung unterwerfen. »

cubiques quant à leur forme, que ce soit au moyen de la réalité des droites qui y sont incluses ou au moyen de leurs singularités.

Les problèmes mathématiques associés aux vingt-sept droites se retrouvent donc dans les quatre autres principales configurations de droites et de points. En particulier, on pourra remarquer que la recherche des relations d'incidence entre ces droites ou points est constamment mise en valeur, et associée à la création de nouveaux objets comme des triangles, des quadrilatères, des tétraèdres, etc. Ce type de recherches est donc commun pour les configurations géométriques. Mais il est frappant que cette « normalité » se renforce d'emprunts de méthodes ou même de noms entre les configurations : pensons ainsi par exemple aux « doubles-quatre » des seize droites, explicitement mis en parallèle avec les « doubles-six » des vingt-sept droites. En outre, la cohésion entre les différentes configurations est encore renforcée par l'établissement de liens mathématiques entre elles, comme celui de Geiser entre les vingt-sept droites et les vingt-huit tangentes doubles.

Au niveau des chronologies, on a pu voir (en tout cas au XIXe siècle) que ces recherches de relations d'incidence survenaient dès les premiers travaux consacrés aux courbes ou surfaces en question. Chercher des objets particuliers associés aux courbes et surfaces de petit degré semble ainsi être une question « naturelle » pour les mathématiciens engagés dans ces travaux. Tout cela suggère donc une culture des configurations géométriques, disons dans le deuxième tiers du XIXe siècle, dans laquelle un des *patterns* consiste à considérer des points ou droites sur des courbes et surfaces, à explorer les relations qui les lient et éventuellement les utiliser pour comprendre ces courbes et surfaces.

Les éléments suggérant deux cultures en contact dans le corpus des équations de la géométrie ayant été maintenant présentés, je vais analyser la façon dont y ils sont entremêlés. Cela me permettra d'éclaircir un problème encore laissé en suspend : celui des « réduites géométriques » de l'équation aux vingt-sept droites dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Jordan.

Chapitre 4

Les équations de la géométrie : un système culturel

Avec le chapitre 3, nous avons vu qu'il existe une étiquette « équations de la géométrie », plutôt floue mais recouvrant une gamme d'objets qui sont partagés par plusieurs mathématiciens. À ces objets partagés s'associent en outre des manières de faire mathématiques assez précises mais qui disparaissent rapidement dans le temps : l'essentiel des activités en question est concentré entre les années 1868 et 1872. Il s'agit maintenant de décrire la façon dont s'organise ce savoir lié aux équations de la géométrie. Une catégorie d'analyse qui, de premier abord, semble naturelle pour la situation est celle de « discipline ».

4.1 Une discipline des équations de la géométrie ?

Plusieurs sens et plusieurs approches ont été proposés au sujet de la notion de « discipline » en histoire des sciences [1]. Dans cette section, j'en sélectionnerai trois.

Commençons avec la notion de discipline dans un sens tiré des travaux de M. Guntau et H. Laitko. Comme expliqué au chapitre 2, il s'agit de « caractériser une discipline mathématique par une liste d'éléments *internes* [2] comme son sujet d'étude, ses concepts et théorèmes clés, sa systématisation, son système de preuves, les valeurs mathématiques préconisées pour l'évaluation de ses résultats, etc. », [Goldstein & Schappacher 2007, p. 54]. La description du corpus a montré que les activités liées aux équations de la géométrie rencontrent en partie ces caractéristiques internes, puisque nous y avons vu des énoncés et démonstrations typiques s'en dégager [3]. Il est en revanche plus difficile de parler d'un sujet d'étude systématisé, pour trois raisons. La première de ces raisons est que, comme

1. Voir [Gauthier 2007, p. 20-23].

2. Par définition même, cette notion de discipline exclut donc les facteurs sociaux que « culture » incite à prendre en compte.

3. Nous verrons aussi dans la suite du présent chapitre que ces énoncés et démonstrations sont parfois associés à des « valeurs préconisées ».

nous l'avons vu, il n'y a pas de définition claire de ce que sont les « équations de la géométrie » ; le sujet lui-même n'est donc pas bien défini. La deuxième raison est qu'à part dans l'*Encyklopädie*, il n'y a pas d'apparition de rubrique « équations de la géométrie » dans les classifications de la fin du XIX^{e} siècle — même dans le *Répertoire bibliographique*, l'entrée que j'avais utilisée mêlait certains exemples d'équations issus de la géométrie avec les équations modulaires. Enfin, nous avons vu que les équations aux vingt-sept droites, aux neuf points, etc., sont loin d'être toutes des objets d'étude propres de textes. De ce point de vue, un des contributeurs les plus importants du corpus, Clebsch, est même un cas extrême puisqu'il ne propose aucune publication dont le but principal est d'étudier l'une ou l'autre de ces équations. Celles-ci n'ont donc pas toutes ce statut central que l'on pourrait attendre dans une discipline qu'elles définiraient.

Nulle trace non plus de livres entièrement consacrés aux équations de la géométrie : cette absence disqualifie donc également les équations de la géométrie en tant que discipline académique[4]. Ceci est d'ailleurs conforté par ce que j'ai pu trouver sur les enseignements donnés dans la seconde moitié du XIX^{e} siècle à Göttingen. En effet, parmi les manuscrits de cours ou de séminaires de Clebsch et de Klein que j'ai pu consulter aux archives de Göttingen, aucun n'est complètement dévolu aux équations de la géométrie. On trouve en revanche, de façon sporadique, certaines de ces équations dans des cours de géométrie ou d'algèbre, ce qui entre en écho avec la présence d'équations de la géométrie en tant que sujets de chapitres spécifiques dans les livres d'algèbre de l'époque. Comme je l'ai déjà souligné, cet aspect indique que les équations de la géométrie font partie des exemples censés être classiques d'équations algébriques.

L'existence de ces chapitres spécifiques pourrait faire spontanément penser à la notion de « spécialité scientifique », ce qui m'amène à la troisième notion de discipline. Cette notion a été proposée et théorisée par Nicholas C. Mullins lors de son étude de la formation de la biologie moléculaire en tant que discipline, [Mullins 1972]. Dans sa démarche, Mullins prend en compte les facteurs intellectuels tout autant que sociaux, et structure la constitution d'une discipline en quatre étapes[5].

La première de ces étapes est celle du « groupe paradigmatique ». Il s'agit au départ d'un certain nombre d'individus qui ne se connaissent pas nécessairement (ni personnellement, ni scientifiquement) mais qui s'intéressent à des problèmes similaires — il n'y a ni méthode partagée, ni même d'objet d'étude clairement identifié. Par groupes de deux ou trois, ces individus commencent à entrer en contact *via* leurs intérêts communs. En travaillant ensemble, ils systématisent ainsi peu à peu leurs interactions en développant un vocabulaire

4. Voir [Goldstein & Schappacher 2007, p. 55] et [Gauthier 2007, chap. 6].

5. Un texte de Michel Grossetti intitulé « Sur l'émergence des collectifs », et qui sera prochainement publié dans un ouvrage collectif sur le sociologue Andrew Abbott, m'a été très éclairant sur ce sujet. La description des quatre étapes qui suit s'en inspire en partie.

commun et des fragments de paradigme. Ceci conduit à la deuxième étape, celle du « réseau de communication ».

Ce développement s'intensifie encore jusqu'à la troisième étape, qui est celle du « groupement » (*cluster*). À ce stade, « les scientifiques deviennent conscients de leurs modèles de communication et commencent à établir des frontières autour de ceux qui travaillent sur leur problème commun. [...] Ces groupements sont souvent identifiés par un nom à la fois par ceux qui sont à l'intérieur et par ceux qui sont à l'extérieur du groupement [6] ». Il y a donc la mise en place de lignes situant les uns et les autres en tant que participants ou non aux activités scientifiques en question. Dans les termes de M. Grossetti : « On passe du collectif latent et du réseau, structures analytiques seulement observables de l'extérieur, à une entité collective reconnue et constituée comme telle par ses membres. »

La quatrième et dernière phase est celle de la « spécialité » : il s'agit de doter le groupement de l'étape précédente d'un structure institutionnelle. Cette structure facilite la diffusion des travaux des scientifiques, qui ont donc connaissance des recherches d'autres, même s'ils ne sont pas en contact personnel. La structure joue également un rôle d'organisation, consistant à développer des procédures de recrutement, à soutenir des revues spécialisées, etc.

Deux remarques principales me semblent émerger d'une confrontation du cas des équations de la géométrie avec ces quatre étapes de développement d'une discipline. La première est que la description de Mullins semble convenir à première vue si l'on regarde seulement la seconde étape, celle de « réseau de communication ». Comme cela a en effet été mis en évidence et répété, il y a bien une communication scientifique entre les différents mathématiciens engagés dans les travaux concernant les équations de la géométrie, qui sont eux-mêmes pour la plupart liés de façon personnelle ou institutionnelle. Mais si l'on regarde le passage de l'étape 1 à l'étape 2 de Mullins, ce sont les intérêts communs pour le sujet scientifique qui font entrer en contact les individus. Autrement dit, le sujet de la discipline en constitution est ce qui engendre la sociabilisation. Or, pour les équations de la géométrie, il semble que le phénomène soit en général l'inverse de cela : les relations personnelles, mathématiques ou institutionnelles préexistantes favorisent la circulation de et l'attrait pour ces équations.

Souvenons-nous par exemple des liens entre Clebsch et Jordan :

> [L]es relations multiples [que Clebsch] avait nouées avec Camille Jordan ramenèrent son attention vers tout ce qui se rattache aux groupements remarquables des racines d'une équation. Réciproquement, c'est principalement à lui qu'on est redevable d'avoir mis Camille Jordan en état de consacrer aux « équations de la géométrie » un chapitre spécial dans son grand ouvrage [7]. [Brill, Gordan et al. 1873, p. 47]

6. « A cluster forms when scientists become self-conscious about their patterns of communication and begin to set boundaries around those who are working on their common problem. [...] These clusters are often identified by a name by those inside and outside the cluster », [Mullins 1972, p. 69].

7. « [S]päter wurde seine Aufmerksamkeit durch die vielfachen Beziehungen, in die er mit Camille

Cette citation laisse bien entendre que Clebsch et Jordan étaient entrés en contact avant que les équations de la géométrie deviennent entre eux un sujet particulier. De même, Clebsch et Klein s'étaient rencontrés d'abord pour gérer des affaires relatives au décès de Plücker — j'ai justement mis en évidence précédemment que Klein avait commencé à s'intéresser aux équations de la géométrie après cette rencontre. En revanche, il est plus difficile de trancher dans le cas du lien entre Klein et Jordan. Lorsqu'il le décrit, Klein associe fortement son voyage à Paris (avec Lie) et sa rencontre avec Jordan au *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Il est donc possible qu'il ait voulu faire cette rencontre en raison même de son intérêt pour le chapitre des applications géométriques [8].

La confrontation de notre cas des équations de la géométrie avec la constitution de l'étape 2 de Mullins permet ainsi de revenir sur la chronologie des événements et de penser plus finement aux phénomènes de sociabilisation qui y sont à l'œuvre. Ainsi, les équations de la géométrie ne sont pas des objets qui rassemblent des mathématiciens déconnectés ; la situation est plutôt que la diffusion des problèmes et façons de faire qui y sont associés est favorisée par des relations qui les précèdent. Cela étant dit, ajoutons qu'il n'est pas exclu que l'intérêt commun pour ce sujet agisse comme un vecteur renforçant *a posteriori* les liens sociaux préexistants.

La seconde remarque sur la structuration décrite par Mullins concerne sa troisième étape, qu'il appelle « groupement ». Là, la description cesse d'être valable pour le corpus des équations de la géométrie. En effet, les auteurs de ce corpus ne se donnent pas de nom collectif ou n'établissent pas de critère d'appartenance au groupe ; bref, ils ne créent pas, à partir des équations de la géométrie, de frontière entre eux-mêmes et un extérieur. Il n'y a donc pas de délimitation sociale et scientifique construite en ce sens-là, et cela montre qu'il n'y a pas de discipline des équations de la géométrie au sens de Mullins [9].

L'utilisation de la notion de « discipline » n'étant ainsi pas adéquate pour décrire l'organisation du savoir lié aux équations de la géométrie, je propose d'exploiter celle de « culture ». Comme je l'ai souligné dans l'introduction de la thèse, trois caractéristiques ressortent principalement de la multitude de définitions que les anthropologues et sociologues ont donné de « culture » : il s'agit d'un ensemble de traits (incluant valeurs et symboles) formant un système cohérent, partagé par une pluralité de personnes et se transmettant par

Jordan getreten war, immer wieder auf Alles, was mit merkwürdigen Gruppirungen von Wurzeln einer Gleichung im Zusammenhange steht, hingelenkt. Umgekehrt hat man es ihm hauptsächlich zu verdanken, wenn Camille Jordan im Stande war, in seinem grossen Werke (Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris, Gauthier-Villars 1870) ein besonderes Capitel den „Gleichungen der Geometrie" zu widmen. » La traduction est celle de [Jordan 1881, p. 33].

8. Les travaux historiques cités plus haut à ce sujet ne permettent pas d'élucider ce point avec précision.

9. Mullins fait remarquer qu'en général, « beaucoup de réseaux de communication s'éteignent avant qu'ils aient la chance de former des groupements », [Mullins 1972, p. 78]. Parmi les facteurs qu'il propose pour expliquer cette instabilité, Mullins met en avant l'importance d'un leader charismatique pour le groupe, en défaut duquel le réseau peut justement disparaître. La fin de la forte concentration des activités des équations de la géométrie se situant vers 1872, une hypothèse est de relier cela à la mort de Clebsch, survenue en novembre 1872.

apprentissage. Ces caractéristiques se trouvent présentes dans la définition du sociologue Guy Rocher sur laquelle je me baserai ici :

> La culture [est] un ensemble lié de manières de penser, de sentir et d'agir plus ou moins formalisées qui, étant apprises et partagées par une pluralité de personnes, servent, d'une manière à la fois objective et symbolique, à constituer ces personnes en une collectivité particulière et distincte. [Rocher 1968, p. 111]

Remarquons d'emblée que la dernière partie de cette définition, qui donne une fonction constitutive à une culture, ne fait pas partie des caractéristiques faisant l'objet d'un consensus parmi les anthropologues et les sociologues. J'en discuterai autour des équations de la géométrie à la fin du chapitre.

Comme l'explique G. Rocher lui-même, la formule « manières de penser, de sentir et d'agir » est empruntée à Émile Durkheim. Elle « présente l'avantage de souligner que les modèles, valeurs, symboles qui composent la culture incluent les connaissances, les idées, la pensée [... et] que la culture est action, qu'elle est d'abord et avant tout vécue par des personnes ; c'est à partir de l'observation de cette action que l'on peut inférer l'existence de la culture et en tracer les contours », [Rocher 1968, p. 112]. Pour notre propos d'histoire des mathématiques, il est bien entendu impossible d'observer cette action *in situ*, à la manière d'un ethnologue. L'étude se fait donc à partir des traces matérielles de cette action qui ont survécu au temps — textes publiés ou non, dessins, instruments de mesure ou de calculs, modèles de surfaces, etc. — et qui informent d'une manière ou d'une autre sur les idées mathématiques elles-mêmes, les façons de faire des mathématiciens, leurs sources, leurs influences ou encore leurs valeurs. Pour le corpus des équations de la géométrie, seuls des textes écrits sont à disposition. Il s'agit donc d'en mener un examen précis afin d'en dégager des traits caractéristiques qui permettent « d'observer l'action » et d'en « inférer l'existence de la culture ».

Pour cela, je vais soumettre les textes du corpus à une analyse consistant en la dissection des équations de la géométrie selon des composantes techniques précises, relevant des processus de reconnaissance d'une part et de résolution de ces équations d'autre part. Cette démarche analytique, nécessaire pour pouvoir décrire le savoir en jeu, aura pour effet de donner une image disloquée de la situation. Je ferai ainsi apparaître d'abord séparément des procédés techniques, que l'on pourrait qualifier de « pratiques ». Mais comme je l'ai expliqué dans l'introduction de la thèse, les pratiques ne sont qu'un des aspects qui sont à prendre en compte dans une culture. Je vais en effet montrer qu'elles sont empreintes de valeurs et qu'elles font partie d'un ensemble intriqué et cohérent de traits caractéristiques dont l'organisation est celle d'un *système culturel*.

4.2 Reconnaître les équations de la géométrie

Dans cette section sont mis en évidence les processus de reconnaissance identitaire des équations de la géométrie par les auteurs du corpus. Pour cela, trois points sont étudiés : les désignations de ces équations, la nature de leurs racines et les identifications faites entre différentes équations.

4.2.1 Désignations

En regroupant par familles lexicales les façons qu'ont les auteurs du corpus de désigner les équations de la géométrie, neuf types de désignations apparaissent [10].

Quatre familles de désignations se distinguent quantitativement parmi les neuf. La première est celle utilisant le verbe « déterminer » ou le nom « détermination » (en allemand, *bestimmen* et *Bestimmung* [11]), comme dans « l'équation du sixième degré par laquelle sont déterminées les six tangentes [12] », [Kummer 1864] ou l'« équation du quatrième degré de détermination des groupes de six triangles associés [13] », [Klein 1871b, p. 355]. Cette série représente 22% de l'ensemble des désignations relevées. Avec 16% du total pour chacune, viennent ensuite à égalité d'une part la famille liant syntaxiquement équations et objets géométriques par la préposition « à », se manifestant dans les faits par l'article contracté « aux [14] », comme dans « l'équation aux vingt-sept droites », [Jordan 1870b, p. 317] et d'autre part celle centrée autour du verbe « dépendre » (*abhängen*), comme dans « l'équation du seizième degré dont dépendent les seize droites de la surface [15] », [Clebsch 1868, p. 145]. Arrive enfin, avec 13% du tout, la famille employant le verbe « séparer » (*trennen*) avec par exemple « l'équation du sixième degré [...] par laquelle les six tangentes doubles [...] sont séparées les unes des autres [16] », [Clebsch 1871b, p. 341].

Les cinq autres familles de désignations contribuent chacune à moins de 10% du total. Il y a ainsi celles qui lient directement les racines d'une équation à des objets géométriques, comme dans « la réduite du quarantième degré qui a pour racines nos ennéaèdres », [Jor-

10. Pour toutes les statistiques qui viennent, j'ai exclu de mon relevé toutes les désignations qui provenaient des publications ayant tout juste précédé le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Jordan, [Jordan 1869a ; Jordan 1869b ; Jordan 1869c ; Jordan 1869d].

11. Sauf ceux de Jordan et [Klein 1888] qui sont écrits en français, tous les textes du corpus sont en langue allemande. L'utilisation par Jordan d'un certain nombre de désignations différentes (cf. *infra*, figure 4.1) m'a été utile pour les traductions.

12. « Die Gleichung sechsten Grades, durch welche [...] die sechs Tangenten bestimmt werden ».

13. « [Die] Gleichung vom 4$^{\text{ten}}$ Grade zur Bestimmung der Gruppen von je 6 zusammengehörigen Dreiecken ».

14. C'est par ce biais que j'ai traduit les expressions comme « die Doppeltangentengleichung » : « l'équation aux tangentes doubles », [Weber 1896, p. 380].

15. « Die Gleichung sechzehnten Grades, von welcher die sechzehn Geraden der Oberfläche abhängen. » Remarquer que certaines des désignations peuvent appartenir à deux des familles présentées ici, comme : « Die Gleichung sechzehnten Grades, von der die Bestimmung der Singularitäten der Kummerschen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten abhängt », [Klein 1871b, p. 357]. Dans de tels cas, j'ai compté une occurrence dans chaque famille correspondante.

16. « Die Gleichung 6$^{\text{ten}}$ [...], durch welche die 6 Doppeltangenten [...] von einander getrennt werden. »

dan 1870a, p. 328], ce qui représente 9% de l'ensemble. Ensuite, des désignations utilisant le verbe « donner » (*geben*) forment 8% du total, avec par exemple « une équation du cinquième degré dont les racines donnent cinq cônes [17] », [Kummer 1863, p. 335]. Pour 6% du tout, d'autres désignations sont des périphrases impliquant des « problèmes » : « Le problème des points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre conduit [...] à une équation du neuvième degré [18] », [Hesse 1847, p. 202]. Avec la même proportion de 6%, certaines désignations se utilisent le verbe « trouver » (*finden*), comme pour : « les tangentes communes [...] sont trouvées par des équations résolubles algébriquement [19] », [Clebsch 1871b, p. 303]. Pour finir, quelques équations de la géométrie se distinguent par une désignation les présentant en tant que « résolvantes », sans pour autant faire appel aux verbes ou noms listés ci-dessus, et comptent pour 4% du total. Pour illustrer cette dernière famille : « les 15 [droites] sont l'image d'une résolvante du quinzième degré [20] », [Klein 1871b, p. 357].

Ces familles étant établies, des statistiques auteur par auteur peuvent donner une idée de la diversité lexicale dans leurs textes respectifs. Je présente en figure 4.1 les diagrammes correspondants pour les trois contributeurs que sont Clebsch, Jordan et Klein ; les chiffres pour les autres se trouvent dans la table 4.1.

	Dét.	Dép.	Don.	Trouv.	Sép.	Aux	Prob.	Rac.	Résolv.	Total
Hesse							2			2
Kummer	2		1							3
Clebsch	1	4	5	6	12		1	1		30
Jordan	4	7	2		1	9		5		28
Klein	11	3				5		2	4	25
Lie							2			2
Noether	4					2	1			5
Netto								1		1
Maschke		1								1
Weber		1								1
Total	22	16	8	6	13	16	6	9	4	100

Table 4.1 – Les intitulés des colonnes sont respectivement : Déterminer, Dépendre, Donner, Trouver, Séparer, Aux, Problèmes, Racines et Résolvantes.

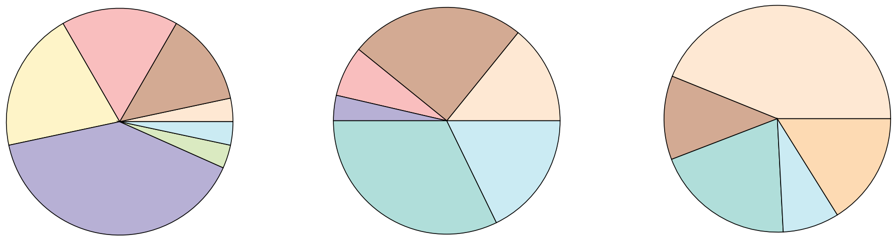
Sans entrer dans une description détaillée de ces diagrammes, on pourra remarquer le

17. « Eine Gleichung fünften Grades [...], deren fünf Wurzeln fünf Kegelflächen geben. » J'ai ajouté à cette famille les quelques désignations utilisant des verbes comme « délivrer » (*liefern*).

18. « Das Problem der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung [...] führt, wenn man eine Variable eliminirt, auf eine Gleichung neunten Grades mit einer Unbekannten, deren Wurzeln dieselbe Eigenschaft haben, welche ich zwischen den Wurzeln der im Vorhergehenden behandelten Gleichung [...] annahm. »

19. « Die gemeinschaftlichen Tangenten [...] werden durch alebraisch lösbare Gleichungen gefunden. »

20. « Die 15 Directricenpaare sind das Bild einer Resolvente 15^{ten} Grades. »

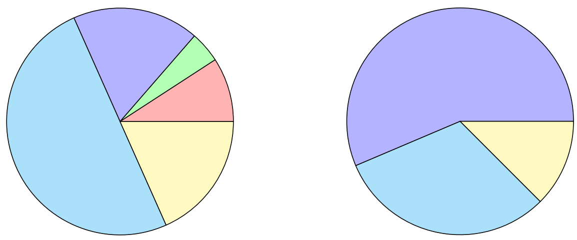


(a) Clebsch (b) Jordan (c) Klein

FIGURE 4.1 – Répartition des désignations chez Clebsch, Jordan et Klein.
Légende : Déterminer – Dépendre – Donner – Trouver – Séparer – Aux – Problème – Racines – Résolvantes.

relatif éclectisme dont Clebsch, Jordan et Klein font preuve, signe possible que les différentes désignations sont équivalentes pour chacun d'eux, et donc que leur variété reflète davantage des variations du langage naturel plutôt que des différences mathématiques propres.

Il est également possible de regarder comment se répartissent les auteurs pour chacune des familles de désignations qui ont été décrites précédemment. Ainsi, pour les deux principales, on obtient les diagrammes de la figure 4.2. Les répartitions sont ici peu homogènes,



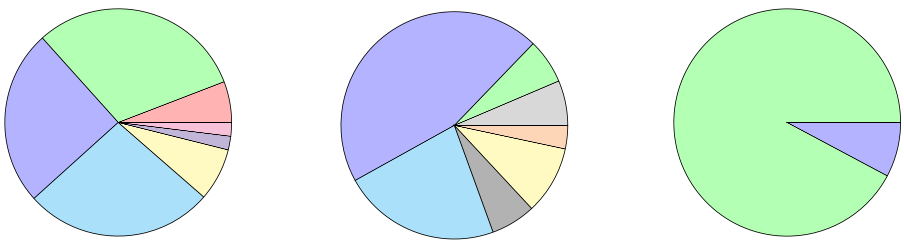
(a) Déterminer (b) Aux

FIGURE 4.2 – Répartition des auteurs pour les deux familles « Déterminer » et « Aux ».
Légende : Kummer – Clebsch – Jordan – Klein – Lie – Maschke – Noether – Weber.

même en tenant compte de la forte participation globale de Clebsch, Jordan et Klein : par exemple, Clebsch et Jordan utilisent les désignations « déterminer » à peu près autant de fois (en nombres absolus) que Kummer et Noether. À l'opposé, Clebsch n'utilise jamais de désignation « aux », et apparaît de ce fait assez peu dans ces deux diagrammes.

Pour pallier aux effets de petit nombre, mais aussi prendre en compte leur possible synonymie, j'ai enfin créé des grandes catégories de désignations en réunissant les familles lexicales qui me semblaient les plus apparentées. J'ai ainsi réuni les familles « Déterminer », « Dépendre », « Donner » et « Trouver », qui regroupent des désignations indiquant un processus d'obtention de la connaissance des objets associés : il s'agit de telle équation dont la résolution « détermine » tels objets, ou permet de les trouver « trouver », etc. Noter que j'y ai pas joint la famille « Séparer » car les désignations de cette famille-là me paraissaient davantage renvoyer à une sélection d'un des objets associés à une équation de la géométrie plutôt qu'à la connaissance de tous ces objets dans leur ensemble — ne s'accordant d'ailleurs pas avec les autres familles, celle-ci est restée seule à l'issue de ma création de grandes catégories [21]. En revanche, j'ai regroupé les familles « Aux » et « Racines », desquelles sont issues des désignations mettant l'accent sur les objets géométriques eux-mêmes, sans utilisation de verbe particulier.

Les trois principales catégories obtenues sont « Déterminer / Dépendre / Donner / Trouver », « Aux / Racines » et « Séparer » ; elles représentent respectivement 49%, 24% et 14% du total. Les résultats se trouvent sur la figure 4.3. On remarque une utilisation



(a) Déterminer / Dépendre / Donner / Trouver

(b) Aux / Racines

(c) Séparer

FIGURE 4.3 – Répartition des auteurs pour les trois catégories « Déterminer / Dépendre / Donner / Trouver », « Aux / Racines » et « Séparer ».
Légende : Hesse – Kummer – Clebsch – Jordan – Klein – Lie – Maschke – Netto – Noether – Weber.

partagée des deux premières catégories de désignations, pour lesquelles tous les auteurs du corpus apparaissent. Compte tenu de la forte prédominance en terme de nombres absolus d'occurrences pour Clebsch, Jordan et Klein, on voit même que, au niveau des proportions, tous les auteurs se répartissent à peu près équitablement dans la première catégorie. Au contraire, la troisième catégorie est une spécificité clebschienne : Jordan y apparaît car son utilisation du verbe « séparer » a été relevée dans une traduction qu'il fait de Clebsch dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques*, [Jordan 1870b, p. 309].

Il est intéressant de noter que, bien qu'étant donc largement partagées, presque toutes les désignations sont mathématiquement flottantes, au sens où les significations précises des verbes et noms utilisés ne sont jamais données. Pourtant, l'usage très majoritaire d'articles définis dans ces désignations suggère une compréhension et une reconnaissance identitaire des équations loin d'être ambiguës. Autrement dit, tout se passe comme si tous les auteurs savent bien ce que sont « *l*'équation aux vingt-sept droites », « *l*'équation dont dépendent les cinq cônes », « *la* réduite qui a pour racines nos ennéaèdres », etc.

21. De même, je n'ai joint les familles « Problème » et « Résolvantes » à aucune autre.

On pourrait alors imaginer que toutes les expressions utilisées font implicitement référence au seul procédé général de formation des équations de la géométrie présent dans le corpus — c'est celui décrit dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques* et que j'ai présenté au début du chapitre précédent —, dont la dernière phrase peut s'interpréter comme une définition de « déterminer » :

> L'un des problèmes les plus fréquents de la géométrie analytique est de déterminer quels sont les points, ou bien les lignes ou surfaces d'une espèce donnée, qui satisfont à certaines conditions. Lorsque le nombre des solutions est limité, les coordonnées du point cherché (ou les paramètres que renferme l'équation des lignes ou des surfaces cherchées) sont déterminées par un système d'équations algébriques $A, B, \ldots$ en nombre égal à celui des inconnues $x, y, \ldots$ Éliminons toutes les inconnues, sauf une seule, x : on sait que le degré de l'équation finale X indiquera le nombre des solutions du problème : et si les racines de cette équation sont inégales, soit x_0 l'une d'elles : on aura les valeurs correspondantes de $y_0, \ldots$ exprimées en fonction rationnelle de x_0, en substituant x_0 à la place de x dans les équations $A, B, \ldots$, et en cherchant le système des solutions communes à ces équations.
>
> Les points, lignes ou surfaces cherchés sont donc déterminés lorsqu'on a résolu l'équation X, et correspondent respectivement à ses diverses racines $x_0, x_1, \ldots$ [Jordan 1870b, p. 301]

« Déterminer » des objets géométriques signifierait donc résoudre l'équation de la géométrie correspondante. Mais je vais à présent montrer que ces équations ne sont elles-mêmes presque jamais bien définies : cela implique que la remarque de Jordan ne peut pas être considérée comme une explication tout à fait précise du sens de « déterminer ».

4.2.2 Racines et objets correspondants ; (non) formation des équations

Parmi les équations de la géométrie du corpus, un petit nombre seulement a pour caractéristique d'avoir des racines clairement identifiées, que ce soit dans leur désignation ou plus généralement dans le texte environnant. On trouve notamment l'équation dont les racines sont les abscisses ou les ordonnées des points d'inflexion des courbes cubiques (« l'équation dont dépendent les points d'inflexion, qui a par exemple les abscisses de ces points comme racines », [Weber 1896, p. 342]) ou l'équation dont les racines sont des paramètres particuliers d'un certain faisceau de surfaces (voir la citation de Kummer donnée plus bas). Si dans ces exemples, les racines sont des grandeurs scalaires paramétrant des objets géométriques, il existe d'autres exemples pour lesquels les racines sont, dans la désignation même de l'équation, les objets eux-mêmes, comme c'est de la cas pour « la réduite du quarantième degré qui a pour racines [les quarante] ennéaèdres », [Jordan 1870a, p. 328].

Cette incarnation directe des racines en objets géométriques évite donc toute explicitation, toute mention des grandeurs pouvant éventuellement paramétrer ces objets. Ces lacunes sont en fait caractéristiques des équations de la géométrie : aussi variés que soient les objets régis par ces équations, seule la poignée de cas évoquée à l'instant indique ce que doivent être les racines. Or, ces objets peuvent être des points, des courbes, des surfaces, des systèmes de points, de courbes ou de surfaces — donnons quelques exemples en vrac pour illustrer cette variété : points d'inflexion, tangentes doubles, droites incluses dans des surfaces, tétraèdres et hyperboloïdes, systèmes de triangles, systèmes de douze droites ayant des relations d'incidence prescrites, triplets de couples de tétraèdres, etc. Les grandeurs pouvant paramétrer ces divers objets ne sont jamais précisées, ni même évoquées par les auteurs du corpus. L'attention n'est donc pas du tout portée sur la réalisation concrète des racines des équations de la géométrie ; les racines *sont* les triangles, les ennéaèdres, etc.

Ce flottement en rejoint un autre, concernant la formation des équations. Rares sont en effet les équations de la géométrie pour lesquelles un procédé de formation est décrit. Lorsque cela arrive, ces procédés peuvent être de deux types : ceux faisant appel à une élimination d'inconnues dans un système d'équations polynomiales, et ceux consistant à exprimer des conditions de dégénérescence de faisceaux de courbes ou de surfaces.

En ce qui concerne les éliminations, on notera qu'elles ne sont jamais mises en œuvre explicitement. Ainsi, dans le mémoire de Hesse lié aux courbes cubiques, [Hesse 1847], celui-ci indique que l'équation aux neuf points d'inflexion d'une cubique s'obtient par élimination d'une variable entre l'équation de la cubique et celle de ce qu'on appelle aujourd'hui sa courbe hessienne. Mais il se contente de donner une notation $w = 0$ pour l'équation résultante, sans en proposer une écriture développée. Un autre cas intéressant est celui de l'équation aux seize droites des surfaces quartiques à conique double dans l'article correspondant de Clebsch, [Clebsch 1868]. Ce dernier y cherche les équations entre lesquelles éliminer des inconnues pour obtenir l'équation aux seize droites, mais cette recherche se fait longtemps après que Clebsch énonce des résultats sur cette dernière équation. L'élimination lui sert à prouver qu'il y a bien seize droites sur la surface : le fait de ne pas avoir formé l'équation ne pose donc pas de problème pour l'étudier *a priori* au début du texte. Reste le procédé général de formation des équations de la géométrie donné dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Comme cela vient d'être décrit, on ne trouve que très peu de traces d'indications explicites sur de quelconques éliminations à faire pour obtenir les équations de la géométrie et donc d'applications de ce procédé général. En fait, la démarche décrite par Jordan reste très floue sur trois points : le système d'équations représentant les objets d'une situation géométrique donnée [22], les paramètres y entrant en jeu, et le processus d'élimination lui-même. Comme j'ai déjà eu l'occasion de le souligner, différents choix pour ces données seraient possibles *a priori* et pourraient

22. À part dans les rares cas déjà mis avant, aucune mention de tels systèmes ne peut se trouver dans les textes du corpus. On peut s'imaginer la complexité de savoir exhiber un système d'équations représentant par exemple un double-six, ensemble de douze droites de l'espace définies par leur inclusion dans une surface cubique, mais aussi des relations d'incidence et de non-incidence entre elles.

donner des équations finales différentes [23].

Quelques rares équations de la géométrie sont définies par des conditions de dégénérescence de faisceaux. Une telle condition est évoquée dans l'article de Kummer sur les surfaces quartiques contenant des coniques, [Kummer 1863] : « la condition, aisément développable, que $\psi + \lambda\phi + \lambda^2 p^2 = 0$ représente un cône conduit à une équation du cinquième degré pour la constante λ, dont les cinq racines donnent cinq cônes [24] ». Si Kummer n'explicite pas la condition en question, Clebsch le fait dans son article sur les surfaces quartiques à conique double, et il obtient une forme explicite de l'équation en question [25] :

$$\delta + \lambda^2 = \frac{a^2}{\alpha + \lambda^2} + \frac{b^2}{\beta + \lambda} + \frac{c^2}{\gamma + \lambda},$$

où λ est l'inconnue et où a, b, c, α, β, γ et δ sont des paramètres entrant dans l'équation de la surface quartique. Cette forme explicite ne semble toutefois pas être importante pour Clebsch : elle intervient au beau milieu de ses calculs, ne consiste pas un but en soi dans l'article en question et n'est pas liée par exemple à l'équation aux seize droites.

En fait, la question de la formation explicite d'équations associées à des objets d'une configuration géométrique semble plutôt être reliée à la théorie des formes et des invariants. Ainsi, dans l'article de Maschke de notre corpus, il existe une équation, sous forme d'un polynôme développé, liée aux quatre triangles d'inflexion d'une courbe cubique [26] :

> Pour le faisceau $\chi f + \lambda\Delta = 0$, on obtient les quatre valeurs $\chi : \lambda$ qui donnent les quatre courbes du faisceau se scindant en trois droites (les quatre triangles d'inflexion) à partir de l'équation : $G(\chi, \lambda) = \chi^4 - S\chi^2\lambda^2 - \frac{4}{3}T\chi\lambda^3 - \frac{1}{12}S^2\lambda^4 = 0$. [Maschke 1889, p. 328]

Dans cette citation, Δ, S et T sont des invariants associés à la forme binaire représentant la courbe cubique en question. Pour le résultat qui y est exprimé, Maschke fait principalement référence aux *Vorlesungen über Geometrie* de Clebsch, éditées de façon posthume par Ferdinand Lindemann, [Clebsch 1876] ; l'équation aux quatre triangles y est effectivement calculée dans un cadre de théorie des invariants. L'écriture de l'équation donnant les quatre triangles d'inflexion avait d'ailleurs déjà été trouvée auparavant (dans les années 1850) par Siegfried Aronhold dans des travaux de théorie des formes :

> Il était réservé aux progrès de la nouvelle algèbre, créée par Sylvester, Cayley et Salmon, et en particulier les belles découvertes d'Aronhold de former réellement toutes

23. L'ensemble « équations de la géométrie » n'est donc pas mis en rapport avec un autre ensemble préétabli. De ce point de vue, le *Traité* ne possède pas, sur ce sujet, le statut de texte inaugural au sens d'Alain Herreman. Voir [Herreman 2012 ; Herreman 2013].

24. « Die leicht zu entwickelnde Bedingung, dass $\phi + \lambda\phi + \lambda^2 p^2 = 0$ eine Kegelfläche darstelle [sic], führt auf eine Gleichung fünften Grades für die Constante λ, deren fünf Wurzeln fünf Kegelflächen geben ».

25. Voir [Clebsch 1868, p. 166].

26. Je rappelle que ces triangles sont ceux que l'on peut former à partir des douze droites joignant trois à trois les neuf points d'inflexion d'une courbe cubique, de sorte que chacun de ces triangles contienne l'ensemble des neuf points. « [...], so erhält man für das Büschel $\chi f + \lambda\Delta = 0$ diejenigen vier Werthe von $\chi : \lambda$, welche die vier in drei gerade Linien zerfallenden Curven des Büschels (die vier Wendedreiecke) ergeben, aus der Gleichung: $G(\chi, \lambda) = \chi^4 - S\chi^2\lambda^2 - \frac{4}{3}T\chi\lambda^3 - \frac{1}{12}S^2\lambda^4 = 0$. »

> les équations résolvantes [de l'équation aux neuf points] et ainsi de régler le problème [27]. [Clebsch 1872b, p. 22]

La recherche et l'utilisation d'écritures explicites d'équations de la géométrie sont ici plutôt reliées à la théorie des formes et des invariants par Clebsch et n'entrent donc pas dans le cadre des théories des équations et des substitutions. Le fait que ni l'*Encyklopädie* ni le *Répertoire bibliographique* ne pointent directement vers des travaux de théorie des formes confirme cela : dans notre corpus, le centre d'attention est porté ailleurs.

Bilan : le vague des équations

La question de la réalisation des équations de la géométrie est donc quasi systématiquement passée sous silence : ni les paramètres censés représenter les objets géométriques, ni les équations entre lesquelles procéder à une élimination, ni l'élimination elle-même ne sont des aspects que les auteurs du corpus cherchent à expliciter ou même à mentionner. Ainsi, la description faite par Jordan d'un procédé général de formation des équations de la géométrie semble plutôt être une justification qu'il convient de placer dans un ouvrage de synthèse tel que le *Traité des substitutions et de équations algébriques*, sans qu'elle soit destinée à être appliquée dans la pratique, au cas par cas. Partant, dire avec Jordan que « déterminer » des objets géométriques consiste à résoudre l'équation associée n'est pas une définition robuste : en effet, donner un sens précis à « déterminer » reviendrait à connaître précisément ce qu'est cette équation, ou au moins ce que sont ses racines.

Je pense donc que les désignations utilisant ces verbes comme « déterminer » ou « dépendre » renvoient à des équations qui *pourraient* être formées d'une certaine façon, sans que cela soit destiné à être effectivement réalisé. La focale est plutôt mise sur les objets géométriques correspondant aux racines, comme l'attestent les cas d'incarnation directe des racines en objets géométriques. Dès lors, il importe peu de savoir précisément ce que les désignations signifient : elles permettent de pointer vers des équations qui restent la plupart du temps sans écriture explicite, quelques fois uniquement symbolisées par des lettres génériques égalées ou non à zéro, comme [28] X ou $w = 0$. Du reste, leur imprécision mathématique n'entrave pas leur circulation entre les différents auteurs du corpus ; elles ne sont sujettes à aucune discussion dans les textes du corpus et ne donnent pas lieu à de quelconques incompréhensions ou quiproquos.

La variété des objets régis par les équations de la géométrie et leur lien direct (sans explicitation de paramètres) avec les racines, l'emploi répandu d'articles définis et de verbes au sens imprécis pour désigner les équations, l'absence de questionnement sur la façon de

27. « Den Fortschritten der von Sylvester, Cayley und Salmon geschaffenen neuern Algebra, und zwar insbesondere den schönen Entdeckungen Aronholds, war es vorbehalten, alle zu lösenden Gleichungen wirklich zu bilden, und damit das Problem zu erledigen. »

28. L'emploi de la lettre capitale X pour désigner certaines équations n'est d'ailleurs pas spécifique aux équations de la géométrie : on pourrait interpréter cet usage commun comme une marque d'une théorie des équations au XIX^e siècle.

les réaliser concrètement : tout cela plaide pour une compréhension tacite et partagée des équations de la géométrie. En effet, ces indices suggèrent l'existence de « connaissances tacites relationnelles » au sens de Harry Collins. Il s'agit de connaissances qui pourraient être explicitées — si les équations de la géométrie ne sont pas formées explicitement, il existe toutefois des descriptions de procédures permettant de le faire — mais qui ne le sont pas en raison d'une façon de communiquer propre à des auteurs dans un contexte local donné [29].

L'étude de processus d'identifications d'équations de la géométrie va permettre de préciser leur compréhension tacite et partagée au sein du corpus, en montrant que la nature des objets régis n'y est pas centrale, au contraire des relations d'incidence qu'ils entretiennent entre eux.

4.2.3 Identifications d'équations

Par « identifications », j'entends tout processus de la part des auteurs du corpus consistant à dire que deux équations se rapportant à des objets géométriques différents sont en fait les mêmes [30]. Pour examiner cette question, deux exemples sont détaillés dans cette sous-section.

Le premier concerne la situation de la surface de Kummer. Je rappelle que dans son texte du corpus de 1864, [Kummer 1864], ce dernier avait montré qu'il existe des surfaces d'ordre quatre possédant exactement seize points singuliers, soit le nombre maximal pour de telles surfaces : ce sont ces surfaces qui ont été baptisées par la suite « surfaces de Kummer ». Kummer avait en outre montré que les seize points singuliers d'une telle surface sont situés six à six sur seize plans tangents singuliers à la surface, et que réciproquement, ces seize plans se coupent six à six en les seize points singuliers. Il n'avait toutefois pas étudié d'équation de la géométrie correspondante, et c'est Jordan qui avait publié en premier à ce sujet, dans deux articles d'abord, [Jordan 1869c ; Jordan 1869d], puis dans le *Traité*, [Jordan 1870b] — dans chacun de ces textes, Jordan avait rappelé les propriétés d'incidence entre les seize points et les seize droites. Or, il est intéressant de remarquer que l'équation géométrique étudiée dans ces références de Jordan n'est pas à chaque fois la même : dans [Jordan 1869c], il s'agit de « l'équation aux seize points singuliers », alors que dans [Jordan 1869d] et [Jordan 1870b], Jordan parle de « l'équation du seizième degré

29. « Weak, or relational, tacit knowledge [...] is knowledge that could be made explicit [...] but is not made explicit for reasons that touch on no deep principles that have to do with either the nature and location of knowledge or the way humans are made. [...] Relational tacit knowledge is just a matter of how particular people relate to each other—either because of their individual propensities or those they acquire from the local social groups to which they belong. » [Collins 2010, p. 86]. La problématique des connaissances tacites en mathématiques a été étudiée lors d'une rencontre à Oberwolfach en 2012. Voir [Archibald et al. 2012], et en particulier (p. 134) : « [Tacit knowledge includes] the case of descriptions which are left incomplete because their authors assume, or know by experience, that their readers share a certain knowledge with them. ».

30. Il ne s'agit donc pas de questionner les différentes identités d'une même équation comme celles d'un théorème à des époques et dans des lieux différents.

dont dépendent les seize plans singuliers ».

Les résultats que donne Jordan sur ces équations sont pourtant identiques : elles se résolvent toutes deux grâce à une équation générale du sixième degré et des équations quadratiques. Quant aux preuves, elles sont les mêmes à échange près des mots « points » et « plans ». Ainsi, dans [Jordan 1869c], les seize points singuliers (et les racines correspondantes) sont notés a, b, $c\ldots$ et Jordan introduit une fonction algébrique des racines $\varphi = abcdef + \cdots$ dans laquelle chaque terme correspond à six points appartement à un même plan tangent singulier — comme dans les autres situations géométriques, Jordan utilise de telles fonctions φ en montrant que les substitutions des racines qui les laissent invariantes sont les substitutions formant le groupe de l'équation associée. Au contraire, dans [Jordan 1869d] et [Jordan 1870b], ce sont les seize plans singuliers qui sont notés $a, b, c\ldots$ et les termes de φ correspondent chacun à six plans s'intersectant en un des points singuliers.

J'ajoute de plus que le paragraphe correspondant de [Jordan 1870b] est intitulé « Points singuliers de la surface de M. Kummer », et que lorsque Jordan évoque ces travaux dans sa notice destinée à sa candidature à l'Académie des Sciences, il y parle de l'équation aux seize points[31].

Cet amalgame entre points singuliers et plans singuliers n'est pas, me semble-t-il, une simple erreur éditoriale. Il indique plutôt que Jordan conçoit comme identiques l'équation aux seize points et celle aux seize plans. Cette identité, si elle n'est ni expliquée ni même explicitée, provient de l'identité des relations d'incidence mutuelles entre les seize points d'une part et les seize plans d'autre part : comme décrit précédemment, une manifestation de cette identité est la similitude des fonctions φ associées et donc des groupes de substitutions correspondants. Je signale encore que dans son article sur les complexes de droites, [Klein 1870], Klein fait référence à Jordan lorsqu'il retrouve le fait que « la détermination des singularités d'une surface de Kummer dépend de la résolution d'une équation du sixième degré et d'équations quadratiques supplémentaires[32] ». Or, son usage du terme « singularités » est ici ambigu, et donc particulièrement intéressant : juste avant d'énoncer ce résultat, Klein parle simultanément des seize points singuliers et des seize plans singuliers, de sorte que son énoncé pourrait concerner indifféremment les uns ou les autres.

Passons maintenant au second exemple annoncé, qui concerne les vingt-sept droites des surfaces cubiques. Nous avons vu que dans une note publiée en 1870, [Jordan 1870a], Jordan était revenu sur le résultat obtenu dans le *Traité*, liant les vingt-sept droites aux fonctions hyperelliptiques. Rappelons aussi qu'en 1856, Steiner avait défini des trièdres particuliers, dont les propriétés avaient été réécrites dans le *Traité* :

> Si deux [des quarante-cinq] triangles abc, $a'b'c'$ n'ont aucun côté commun[33], on peut

31. [Jordan 1881, p. 32].
32. « Die Bestimmung der Singularitäten einer Kummer'schen Flächen hängt von der Auflösung einer Gleichung sechsten Grades und mehrerer quadratischer Gleichungen ab. » [Klein 1870, p. 216].
33. Ici, les lettres $a, b, c, \ldots$ sont les notations des droites qui sont les côtés des triangles.

> leur associer un troisième $a''b''c''$ tel, que les côtés correspondants se coupent, et forment trois nouveaux triangles $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$. [Jordan 1870b, p. 316]

Maintenant, dans la note de 1870 sus-citée, Jordan utilise ces trièdres pour définir de nouveaux objets : des « ennéaèdres », c'est-à-dire des systèmes particuliers formés de neuf triangles. Il énonce [34] :

> On vérifiera aisément que l'*ennéaèdre* formé par [ces neuf triangles] jouit des propriétés suivantes :
>
> 1° Ces triangles n'ont aucune droite commune ;
>
> 2° Soient α, β deux quelconques d'entre eux ; le triangle γ qui, combiné avec α et β forme un *trièdre* (défini à la façon de Steiner), fera lui-même partie de l'ennéaèdre.
>
> Il résulte évidemment de ces propriétés que, l'ennéaèdre étant supposé connu, les neuf triangles dans lesquels il se décompose ne dépendront plus que d'une équation hessienne. [Jordan 1870a, p. 327]

L'expression « équation hessienne » renvoie à la classe d'équations que Hesse avait étudiée dans [Hesse 1847], c'est-à-dire la classe d'équations de degré 9 dont les racines $x_1, \ldots, x_9$ sont liées trois par trois par des relations rationnelles et symétriques avec la propriété supplémentaire suivante : si $x_k = \theta(x_i, x_j)$ est une telle relation, alors on a aussi $x_i = \theta(x_j, x_k)$ et $x_j = \theta(x_k, x_i)$. Pour Hesse, ces équations n'étaient pas géométriques au départ ; c'est seulement dans un second temps qu'il avait montré que l'équation aux neuf points d'inflexion était de ce type. Or, en 1870, Luigi Cremona écrit à Jordan, au sujet des ennéaèdres :

> Ces systèmes de 9 plans [ont] entr'eux les mêmes relations que les racines d'une équation Hessienne. Ce n'est pas sans intérêt de voir dans ce système de 9 plans un type géométrique qui correspond à une équation hessienne et dont les 9 éléments peuvent être tous réels ; tandis que dans la question des points d'inflexion d'une cubique plane, il y a toujours six points imaginaires [35].

Les relations dont parle Cremona sont celles données par Jordan dans le 2° de la citation précédente [36]. Cela souligne le fait que « équation hessienne » ne renvoie pas à l'équation aux neuf points d'inflexion, mais à la classe d'équations de degré 9 étudiée par Hesse en 1847 [37]. Ainsi se dessine l'idée d'une équation hessienne pouvant s'incarner géométriquement de deux façons différentes, pourvu que les objets géométriques en question entre-

---

34. J'ai employé ici les lettres α, β, γ en lieu et place des a, b, c de Jordan pour éviter la confusion avec la citation précédente.

35. Extrait d'une lettre de Cremona à Jordan datée du 9 février 1870 et reproduite dans [Jordan *Œuvres 4*, p. 598]. D'autres extraits de cette même lettre ont été cités et discutés au chapitre 2.

36. Le 1° sert en fait à légitimer le 2°, puisqu'il indique que deux triangles de l'ennéaèdre peuvent toujours être complétés en un trièdre de Steiner.

37. Une confirmation de cette assertion se trouve dans la notice nécrologique de Plücker écrite par Clebsch : « [diese] Classe algebraisch lösbarer Gleichungen 9. Grades, welche Hesse's Namen führen, und für welche die Wendepuncte das erste Beispiel bilden », [Clebsch 1872b, p. 22].

tiennent entre eux les mêmes relations d'incidence : tout comme deux triangles de l'ennéaèdre sont toujours associés (par les trièdres de Steiner) à un troisième qui fait partie de cet ennéaèdre, deux points d'inflexion d'une cubique sont toujours associés (par alignement) à un troisième point d'inflexion de la cubique [38].

Ces deux exemples mettent en évidence des processus d'identification d'équations de la géométrie pouvant régir des objets de nature différentes dès lors que coïncident leurs relations d'incidence mutuelles, pouvant d'ailleurs être de nature différente : alignement, concours, coplanarité, appartenance aux trièdres de Steiner. Le silence autour des paramétrages d'objets géométriques et des formations des équations ainsi que ces identifications montrent finalement une conception identitaire des équations de la géométrie qui est détachée de leur réalisation concrète. Basée sur la reconnaissance d'un degré et de relations entre racines, cette conception se lit directement sur le nombre d'objets d'une situation géométrique et les relations d'incidence qui les lient.

4.3 Résolutions des équations de la géométrie

L'analyse faite dans la section précédente a dégagé une image de la façon qu'ont les auteurs du corpus de concevoir et reconnaître les équations de la géométrie. Je vais maintenant regarder ce qui se rapporte aux procédés de résolution de ces équations. Il s'agit ainsi d'examiner des résultats algébriques comme la possibilité de résoudre une équation par radicaux, l'existence de réduites ou celles d'équations équivalentes particulières.

Une première constatation, fondamentale, est que tous les résultats de résolubilité des équations de la géométrie sont liés à l'existence de groupements entre les objets correspondant aux racines [39]. Nous verrons cependant que selon les cas, ces groupements peuvent être exprimés différemment, et mobilisés de façon plus ou moins directe dans les procédés de résolution.

Ainsi ai-je déjà pu discuter en détail le fait que dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Jordan utilisait presque toujours les fonctions φ pour étudier les équations de la géométrie, et que ces fonctions φ étaient créées à partir des relations d'incidence existant entre les objets associés aux diverses équations. Par exemple, les vingt-sept droites d'une surface cubique (et les racines associées) étant notées a, b, $c, \ldots$, Jordan avait écrit la liste des quarante-cinq triangles que l'on peut former à partir de ces droites :

38. Ces identifications préfigurent la notion de *configuration* au sens de Reye (1876), comme exposé dans [Steinitz 1910]. Dans cette dernière référence, on trouve entre autres les diverses configurations sur les courbes cubiques, dont la configuration hessienne, mais aussi la configuration de Kummer, renvoyant à celle des seize points et seize plans singuliers.

39. Les équations de la géométrie ne sont pas toutes impliquées dans ces résultats de résolution : voir par exemple les équations des quatrième et cinquième catégories données au paragraphe 3.3.3 du chapitre 3.

abc, *ade*, *afg*, etc. La fonction algébrique définie était alors la suivante :

$$\varphi = abc + ade + afg + \cdots ,$$

où il y a donc quarante-cinq termes correspondant aux quarante-cinq triangles. Jordan avait alors utilisé cette fonction pour étudier l'équation aux vingt-sept droites : les substitutions sur les racines $a, b, c \ldots$ laissant φ invariante sont les substitutions du groupe de l'équation.

Les relations d'incidence sont donc bel et bien importantes pour Jordan, et sont exprimées à travers les fonctions φ. Comme je l'ai montré au chapitre 2, une fois la traduction de l'information géométrique opérée par ces fonctions, le langage géométrique était abandonné au profit de considérations sur les groupes (forme des substitutions, ordre, sous-groupes distingués, etc.). C'étaient ensuite ces considérations qui permettaient de trouver des résultats de résolubilité sur les équations de la géométrie. Il n'y avait donc pas de transfert direct de l'information concernant les relations d'incidence vers les résultats de résolubilité.

Je vais maintenant montrer plusieurs autres cas de résolubilité d'équations de la géométrie dans lesquels les relations d'incidence interviennent également, parfois de façon plus directe que pour les fonctions φ de Jordan.

4.3.1 Utilisations de tableaux

Rappelons que dans son article de 1847, Hesse proposait de montrer la résolubilité algébrique de toute équation X du neuvième degré dont les racines $x_1, \ldots, x_9$ sont liées trois par trois par des relations rationnelles et symétriques avec la propriété que si $x_k = \theta(x_i, x_j)$ est une telle relation, alors on a aussi $x_i = \theta(x_j, x_k)$ et $x_j = \theta(x_k, x_i)$. Esquissons la démonstration de Hesse de ce théorème.

Hesse commence par appeler « racines conjuguées » des racines de l'équation liées par les relations θ, et montre qu'il existe exactement douze triplets de racines conjuguées, qu'il représente en tableau :

$$\begin{array}{ccc} x_1x_2x_3 & x_4x_5x_6 & x_7x_8x_9 \\ x_2x_4x_7 & x_3x_5x_8 & x_1x_6x_9 \\ x_5x_7x_1 & x_6x_8x_2 & x_4x_9x_3 \\ x_8x_1x_4 & x_9x_2x_5 & x_7x_3x_6. \end{array}$$

Il forme alors des fonctions $y_{ijk} = (\alpha - x_i)(\alpha - x_j)(\alpha - x_k)$, où α est une nouvelle inconnue et où x_i, x_j et x_k sont des racines conjuguées. Il obtient ainsi douze fonctions y, qu'il représente à nouveau grâce à un tableau :

$$\begin{array}{ccc} y_{123} & y_{456} & y_{789} \\ y_{247} & y_{358} & y_{169} \\ y_{571} & y_{682} & y_{493} \\ y_{814} & y_{925} & y_{736}. \end{array}$$

Hesse définit ensuite des fonctions $z = (\beta - y_{ijk})(\beta - y_{i'j'k'})(\beta - y_{i''j''k''})$, où les y employés sont pris sur une même ligne du tableau précédent et où β est une nouvelle inconnue : quatre fonctions $z_1, \ldots, z_4$ sont ainsi formées. Il démontre alors que l'équation de degré 4 dont dépendent les z_i a ses coefficients rationnels en fonction de ceux de l'équation de départ X, et donc qu'elle est résoluble par radicaux (en fonction des coefficients de X). Par suite, l'équation (de degré 3 en β) $z_1 = 0$ ayant pour racines y_{123}, y_{456} et y_{789}, on peut trouver ces dernières par radicaux en fonction des coefficients de X. Enfin, appliquer le même argument aux équations (de degré 3 en α) $y_{123} = 0$, $y_{456} = 0$ et $y_{789} = 0$ permet de trouver par radicaux les racines $x_1, \ldots, x_9$ de X.

Comme dit précédemment, Jacobi avait lu les travaux de Hesse sur les points d'inflexion des courbes cubiques et avait alors incité ce dernier à travailler sur l'équation X. Dans l'article de Hesse, [Hesse 1847], l'équation aux neuf points d'inflexion n'arrive qu'après ce que nous venons de décrire : Hesse prouve que cette équation possède la propriété des relations θ en utilisant l'alignement trois par trois des points d'inflexion. Ainsi, le tableau des racines conjuguées peut être interprété comme le tableau donnant la liste des points d'inflexion alignés. Que Hesse l'ait vu comme tel ou non importe assez peu ici. Les tableaux représentent une disposition des triplets de racines, qui servent à créer des résolvantes dans un second temps ; ils ne portent pas en lui-même la propriété de résolution, contrairement à ce qui se passe dans l'exemple suivant.

Cet exemple se trouve dans l'article de Clebsch sur les surfaces quartiques, [Clebsch 1868] ; je rappelle qu'il s'agit chronologiquement de la première intervention de Clebsch dans le corpus des équations de la géométrie et qu'il avait été intéressé par ces équations par le biais de Hesse. Dans cet article, Clebsch utilise dès le début sa représentation sur un plan des surfaces quartiques à conique double pour montrer l'existence de seize droites sur de telles surfaces. Il recherche ensuite les relations d'incidence existant entre ces droites : chacune des seize droites en coupe cinq autres, qui ne se coupent pas entre elles. Clebsch représente ce premier résultat grâce au tableau suivant (où les nombres $1, \ldots, 16$ sont les notations pour les seize droites et où la première ligne de la première colonne par exemple signifie que la droite 1 rencontre les droites 6, 7, 8, 9 et 16) :

1)	6,	7,	8,	9,	16	9)	1,	5,	10,	11,	13	
2)	6,	10,	11,	12,	16	10)	2,	3,	8,	9,	15	
3)	7,	10,	13,	14,	16	11)	2,	4,	7,	9,	14	
4)	8,	11,	13,	15,	16	12)	2,	5,	7,	8,	13	
5)	9,	12,	14,	15,	16	13)	3,	4,	6,	9,	12	(I.)
6)	1,	2,	13,	14,	15	14)	3,	5,	6,	8,	11	
7)	1,	3,	11,	12,	15	15)	4,	5,	6,	7,	10	
8)	1,	4,	10,	12,	14	16)	1,	2,	3,	4,	5	

Grâce à ce premier tableau, Clebsch établit la liste des couples de droites sécantes, qu'il représente à nouveau en tableau :

$1,6$	$2,6$	$3,7$	$4,8$	$5,9$	$6,13$	$7,15$	$9,11$	
$1,7$	$2,10$	$3,10$	$4,11$	$5,12$	$6,14$	$8,10$	$9,13$	
$1,8$	$2,11$	$3,13$	$4,13$	$5,14$	$6,15$	$8,12$	$10,15$	(II.)
$1,9$	$2,12$	$3,14$	$4,15$	$5,15$	$7,11$	$8,14$	$11,14$	
$1,16$	$2,16$	$3,16$	$4,16$	$5,16$	$7,12$	$9,10$	$12,13$	

Il poursuit son investigation en énumérant les quarante quadrilatères pouvant être formés par les seize droites. Ceci est fait à l'aide d'un troisième tableau qui ne sera pas reproduit ici, n'étant pas mis en rapport avec l'équation aux seize droites — voir cependant la figure 4.4. Clebsch continue :

> En revanche, à chaque couple sont associés trois autres qui ne le coupent *pas* ; ces trois autres ne se coupent pas non plus entre eux. *Les quarante couples* (II.) *se divisent ainsi en dix groupes de quatre, de sorte que quatre couples d'un groupe ne se coupent pas entre eux ; et ces dix groupes se divisent à nouveau en cinq fois deux groupes conjugués qui contiennent ensemble toutes les seize droites*[40]. [Clebsch 1868, p. 145]

Il représente à nouveau ces résultats dans un tableau, où les « groupes conjugués » sont

40. « Dagegen gehören zu jedem Paar drei andere, welche dasselbe *nicht* schneiden; diese drei anderen schneiden sich unter einander ebenfalls nicht. *Die vierzig Paare* (I.) [sic] *zerfallen daher in zehn Gruppen zu vier, dergestalt, dass vier Paare einer Gruppe einander nicht schneiden; und diese zehn Gruppen zerfallen wieder in fünfmal zwei solche conjugirte Gruppen, welche zusammen alle sechzehn Geraden enthalten.* »

situés sur un même ligne :

$$\begin{array}{llll@{\qquad}rrrr}
2,6; & 3,7; & 4,8; & 5,9. & 1,16; & 10,15; & 11,14; & 12,13. \\
1,6; & 3,10; & 4,11; & 5,12. & 2,16; & 7,15; & 8,14; & 9,13. \\
1,7; & 2,10; & 4,13; & 5,14. & 3,16; & 6,15; & 8,12; & 9,11. \\
1,8; & 2,11; & 3,13; & 5,15. & 4,16; & 6,14; & 7,12; & 9,10. \\
1,9; & 2,12; & 3,14; & 4,15. & 5,16; & 6,13; & 7,11; & 8,10.
\end{array} \qquad \text{(IV.)}$$

Et comme on l'a déjà vu, Clebsch écrit directement après le tableau :

> Ce tableau est important surtout parce qu'il apprend que *l'équation du seizième degré dont dépendent les seize droites de la surface se résout à l'aide d'une équation du cinquième degré.* Cette équation, qui délivre les cinq couples de groupes (IV.), n'est autre que celle à l'aide de laquelle Monsieur *Kummer* a obtenu les cinq cônes du second ordre dont les arêtes touchent doublement la surface en question, [Kummer 1863] [41]. [Clebsch 1868, p. 145]

Le processus de déduction d'une réduite du cinquième degré à partir du tableau n'est pas expliqué par Clebsch, et dans la suite de l'article, il passe à des considérations qui n'ont plus de rapport avec ce tableau ou le résultat de résolubilité correspondant.

J'ai fait remarquer au chapitre précédent que cette utilisation de tableau pouvait rappeler celle faite par Betti en rapport avec l'équation modulaire de degré 6 : Betti avait en effet représenté à l'aide d'un tableau une partition du groupe de l'équation modulaire et en avait déduit la possibilité d'abaissement de celle-ci.

Un usage de tableaux dans un cadre de résolution d'équations algébriques peut aussi être trouvé dans les travaux de Galois. Ce dernier avait relié les étapes de la résolution de l'équation générale de degré 4 aux décompositions successives de son groupe, dont les substitutions étaient représentés sur plusieurs tableaux successifs. Ainsi, si a, b, c, d sont les quatre racines de cette équation, Galois avait commencé par en décrire le groupe réduit

41. « Diese Tafel ist vorzugsweise von Wichtigkeit, weil sie lehrt, *dass die Gleichung sechzehnten Grades, von welcher die sechzehn Geraden der Oberfläche abhängen, mit Hülfe einer Gleichung fünften Grades gelöst wird.* Diese Gleichung, welche die fünf Paare von Gruppen (IV.) liefert, ist keine andere, als diejenige mit deren Hülfe Herr *Kummer* die fünf Kegel zweiter Ordnung erhalten hat, deren Seiten die fragliche Fläche doppelt berühren (Sitzung der Berl. Acad. vom 16. Juli 1863). » La référence donnée dans cette citation est celle de notre corpus. Remarquer ici un autre exemple d'identification entre deux équations de la géométrie de degré 5, régissant des objets de nature différente : des couples de groupes de couples de droites d'une part, des cônes d'ordre 2 d'autre part.

Clebsch, über eine Gattung von Flächen vierter Ordnung. 145

Nehmen wir ein beliebiges dieser Paare heraus und eine dritte Gerade, welche eine Gerade des Paars schneidet, so existirt immer noch *eine* Gerade, welche sowohl die andere Gerade des Paars als die dritte Gerade schneidet. Es setzen sich so 40.4 mal zwei Paare zu einem windschiefen Viereck zusammen; dabei aber tritt jedes windschiefe Viereck viermal auf, und es giebt also im Ganzen *vierzig aus den sechzehn Geraden gebildete windschiefe Vierecke:*

(III.)
1, 6,15, 7; 1, 6,14, 8; 1, 6,13, 9; 1,6, 2,16; 1,7,12, 8; 1, 7,11, 9; 1, 7,3,16; 1, 8.10, 9;
1, 8, 4,16; 1, 9, 5,16; 2, 6,15,10; 2,6,14,11; 2,6,13,12; 2,10, 3,16; 2,10,8,12; 2,10, 9,11;
2,11, 4,16; 2,11, 7,12; 2,12, 5,16; 3,7,11,14; 3,7,12,13; 3, 7,15,10; 3,10,9,13; 3,10, 8,14;
3,13, 6,14; 3,13, 4,16; 3,14, 5,16; 4,8,14,11; 4,8,12,13; 4, 8,10,15; 4,11,9,13; 4,11. 7,15;
4,13, 6,15; 4,15, 5,16; 5, 9,13,12; 5,9,11,14; 5,9,10,15; 5,12, 8,14; 5,12,7,15; 5,14, 6,15.

Dagegen gehören zu jedem Paar drei andere, welche dasselbe *nicht* schneiden; diese drei anderen schneiden sich unter einander ebenfalls nicht. *Die vierzig Paare* (I.) *zerfallen daher in zehn Gruppen zu vier, dergestalt, dass vier Paare einer Gruppe einander nicht schneiden; und diese zehn Gruppen zerfallen wieder in fünfmal zwei solche conjugirte Gruppen, welche zusammen alle sechzehn Geraden enthalten.*

Man findet daher folgende Tafel, in welcher die Paare (I.) gruppenweise geordnet, und zwei conjugirte Gruppen horizontal neben einander gestellt sind:

(IV.)	2,6;	3,7;	4,8;	5,9.	1,16;	10,15;	11,14;	12,13.
	1,6;	3,10;	4,11;	5,12.	2,16;	7,15;	8,14;	9,13.
	1,7;	2,10;	4,13;	5,14.	3,16;	6,15;	8,12;	9,11.
	1,8;	2,11;	3,13;	5,15.	4,16;	6,14;	7,12;	9,10.
	1,9;	2,12;	3,14;	4,15.	5,16;	6,13;	7,11;	8,10.

Diese Tafel ist vorzugsweise von Wichtigkeit, weil sie lehrt, *dass die Gleichung sechzehnten Grades, von welcher die sechzehn Geraden der Oberfläche abhängen, mit Hülfe einer Gleichung fünften Grades gelöst wird.* Diese Gleichung, welche die fünf Paare von Gruppen (IV.) liefert, ist keine andere, als diejenige, mit deren Hülfe Herr *Kummer* die fünf Kegel zweiter Ordnung erhalten hat, deren Seiten die fragliche Fläche doppelt berühren *).

*) Sitzung der Berl. Acad. vom 16. Juli 1863.

Journal für Mathematik Bd. LXIX. Heft 2. 19

FIGURE 4.4 – Extrait de [Clebsch 1868].

par adjonction d'une racine carrée :

$$\begin{array}{lll} abcd, & acbd, & adbc, \\ badc, & cabd, & dacb, \\ cdab, & dbac, & bcad, \\ dcba, & dcba, & cbda. \end{array}$$

Galois avait ensuite écrit que

> ce groupe se partage lui-même en trois groupes [...]. Ainsi, par l'extraction d'un seul radical du troisième degré, il reste simplement le groupe
>
> $$\begin{array}{l} abcd, \\ bacd, \\ cdab, \\ dcba; \end{array}$$
>
> ce groupe se partage de nouveau en deux groupes :
>
> $$\begin{array}{ll} abcd, & cdab, \\ badc, & dcba. \end{array}$$
>
> Ainsi, après une simple extraction de racine carrée, il restera
>
> $$\begin{array}{l} abcd, \\ badc; \end{array}$$
>
> ce qui se résoudra enfin par une simple extraction de racine carrée. [Galois 1846, p. 428-429]

Si un parallèle peut ainsi être fait entre l'utilisation de tableaux chez Galois d'une part, et chez Clebsch (ou Hesse) d'autre part, il faut toutefois insister sur une différence notable entre les deux : les tableaux de Galois représentent des groupes des substitutions, alors que cette notion est totalement absente chez Clebsch, dont les tableaux représentent des objets géométriques. En outre, au contraire de Galois, Clebsch passe directement du tableau au résultat de résolubilité, sans passer par des décompositions successives du tableau.

Il est également possible d'imaginer Clebsch relisant les travaux de Hesse décrits précédemment et transposant directement le raisonnement de ce dernier au cas des seize droites : l'équation de degré 5 correspondant aux cinq lignes du tableau (IV.) est alors l'analogue de celle de degré 4 (en z) correspondant aux quatre lignes du tableau des triplets de racines conjuguées de Hesse. Là encore, le parallèle n'est pas total car Clebsch n'utilise pas son tableau pour créer des résolvantes, comme le fait Hesse.

L'usage de Clebsch de tableaux lui est donc propre, et est *a priori* inscrit dans la géométrie plutôt que l'algèbre. On soulignera que ce sont bien les droites elles-mêmes qui sont les entrées du tableau, et que celui-ci est formée à partir de leurs relations d'incidence. Ces dernières se trouvent ainsi au cœur du processus de résolution de l'équation aux seize droites[42].

Je signale encore l'utilisation de trois tableaux dans le *Traité des substitutions* de Jordan. Le premier est plutôt une disposition tabulaire de l'écriture des différents termes de la fonction φ associée aux neuf points d'inflexion :

$$\begin{aligned}\varphi = {} & (00)(01)(02) + (10)(11)(12) + (20)(21)(22) \\ & + (00)(10)(20) + (01)(11)(21) + (02)(12)(22) \\ & + (00)(11)(22) + (01)(20)(12) + (02)(10)(21) \\ & + (00)(12)(21) + (01)(10)(22) + (02)(20)(11).\end{aligned}$$

Cependant, Jordan ne fait aucun usage de cette disposition tabulaire (du moins explicitement) pour l'étude du groupe de φ. Le deuxième tableau de Jordan est la reproduction de celui de Clebsch sur les seize droites des surfaces quartiques à conique double. Enfin, le troisième tableau est lié aux seize points singuliers et aux seize plans singuliers des surfaces de Kummer. Après avoir rappelé les relations d'incidence liant ces objets, il écrit :

> Soient
>
> $$\begin{matrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & k & l & m \\ n & p & q & r \end{matrix}$$
>
> les seize plans. Prenons arbitrairement dans le tableau ci-dessus une ligne horizontale, telle que $efgh$, et une colonne verticale, telle que $cglq$: supprimons le plan g commun à cette ligne et à cette colonne ; les six plans restants e, f, h, c, l, q, formeront l'une des seize combinaisons de six plans concourants. [Jordan 1870b, p. 313]

Ici encore, le tableau n'est pas utilisé par Jordan directement dans le processus de résolution de l'équation aux seize plans singuliers : il lui sert à lister les « seize combinaisons de six plans concourants » qui vont former les termes de la fonction φ correspondante. Il n'y a donc pas, comme c'était le cas chez Clebsch, de déduction immédiate de propriétés de résolubilité à partir des différents tableaux présents dans le chapitre des applications géométriques du *Traité*[43].

42. Clebsch a recours à des tableaux dans ses deux articles présents dans le corpus, mais l'exemple que je viens de présenter est le seul pour lequel on peut voir un lien avec une équation de la géométrie. Voir par exemple [Clebsch 1868, p. 157] pour la liste des « doubles-quatre » de la surface quartique à conique double et [Clebsch 1871b, p. 310] pour un tableau représentant des droites associées à certaines surfaces.

43. L'usage (différent) de tableaux représentant des matrices ou des déterminants, en particulier par

4.3.2 Relations d'incidence et objets dérivés

Je passe maintenant à l'utilisation de ce que j'appelle des « objets dérivés » dans certaines résolutions d'équations de la géométrie, c'est-à-dire d'objets géométriques formés à partir des objets correspondant aux racines des équations.

Réduites de l'équation aux vingt-sept droites

Je vais rappeler ici quelques points concernant ce que j'ai appelé, au chapitre 2 de cette thèse, les « réduites géométriques » de l'équation aux vingt-sept droites.

Dans le paragraphe du *Traité des substitutions et des équations algébriques* consacré à l'équation aux vingt-sept droites d'une surface cubique, se trouvait une série de trois remarques mentionnant l'existence d'équations particulières équivalentes à celle des vingt-sept droites, les « réduites géométriques ». La première de ces remarques était la suivante :

> Prenons, par exemple, pour inconnue de la question le plan du triangle formé par trois droites qui se coupent : ces triangles étant au nombre de quarante-cinq, on aura une équation du quarante-cinquième degré, équivalente à la proposée. [Jordan 1870b, p. 319]

La deuxième rappelait la définition des triplets de doubles trièdres de Steiner et leur nombre, 40, à partir de quoi Jordan donnait immédiatement l'existence d'une équation de degré 40 équivalente à celle des vingt-sept droites. La troisième remarque était encore du même genre :

> On peut déterminer de $27 \cdot 16/2$ manières différentes une paire de droites qui ne se coupent pas. On peut d'ailleurs grouper ces paires six à six (*doubles-six* de Schläfli), de telle sorte que les droites d'une paire rencontrent chacune une droite de chaque autre paire du double-six. Les doubles-six dépendent donc d'une équation de degré $27 \cdot 16/(2 \cdot 6) = 36$, qui sera encore équivalente à la proposée. [Jordan 1870b, p. 319]

L'argumentation de Jordan se réduisait à ces citations : il n'expliquait ni ce que sont les équations dont dépendent les quarante-cinq plans, les quarante triplets de doubles trièdres ou les trente-six doubles-six, ni pourquoi ces équations sont équivalentes à l'équation aux vingt-sept droites.

Les citations précédentes montrent toutefois l'importance accordée aux relations d'incidence existant entre les vingt-sept droites, et incarnées en les objets dérivés que sont les triangles, les triplets de doubles trièdres et les doubles-six. Alors que la lecture seule du *Traité* n'avait pas permis d'élucider le pourquoi de ces réduites et les faisait même apparaître comme des irrégularités au sein de cet ouvrage, nous allons à présent voir que des situations analogues se trouvent et s'expliquent dans le corpus des équations de la géométrie.

Jordan, a été étudié dans [Brechenmacher 2006]. Voir également [Gauthier 2007] pour le cas d'Albert Châtelet.

Klein et les résolvantes géométriques

Regardons ainsi l'article de Klein intitulé « Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen », [Klein 1871b]. Les principaux résultats de cet article ont déjà été décrits au chapitre précédent. Je rappellerai et développerai ici quelques points importants pour le présent propos. Dès l'introduction, Klein mettait en avant l'importance des équations de la géométrie pour leur côté intuitif :

> Le grand avantage de ces exemples est qu'ils présentent de façon intuitive les idées abstraites en elles-mêmes si particulières de la théorie des substitutions. Il se rapportent la plupart du temps à des équations de caractère très particulier, entre les racines desquelles ont lieu des groupements particuliers, laissant ainsi voir comment de telles équations peuvent se comporter [44]. [Klein 1871b, p. 346]

Cette importance du caractère intuitif était telle que Klein proposait ensuite d'incarner toute équation algébrique générale en une équation de la géométrie : il s'agissait de prendre n éléments d'un espace de dimension $n-2$ comme image des n racines d'une équation, et de remplacer les permutations des racines par les transformations linéaires de l'espace qui échangent entre eux les n éléments [45]. Lorsqu'il détaillait cette méthode, Klein mettait l'accent sur l'image des résolvantes :

> Je m'imagine appliquées à un élément quelconque de l'espace à $n-2$ dimensions les $n!$ transformations qui permutent entre eux les n éléments donnés. Cet élément quelconque prend en général $n!$ différentes positions. *Le système des $n!$ éléments ainsi engendrés est l'image de la résolvante de Galois de l'équation de degré n représentée par les n éléments donnés.* Avec des hypothèses particulières sur l'élément quelconque, les $n!$ éléments qui en sont issus coïncident les uns les autres. La résolvante de Galois devient alors une puissance d'une expression, qui sera qualifiée de résolvante particulière [46]. [Klein 1871b, p. 348]

À la fin de son article, Klein montrait comment s'appliquait cette méthode dans le cas de l'équation générale du sixième degré. Pour cela, il utilisait la géométrie des complexes de

44. « Der hohe Nutzen dieser Beispiele liegt darin, dass sie die an und für sich so eigenartig abstracten Vorstellungen der Substitutionstheorie in anschaulicher Weise dem Auge vorführen. Sie beziehen sich zumeist auf Gleichungen von sehr particulärem Character, zwischen deren Wurzeln besondere Gruppirungen Statt haben, und lassen also übersehen, wieso deratige besondere Gleichungen auftreten können. »

45. « Ich will nun im Folgenden auf eine Methode aufmerksam machen, vermöge deren man ein geometrisches Bild für die *allgemeinen* Gleichungen eines beliebigen Grades erhält, insbesondere für diejenigen Gruppirungen der Wurzeln einer solchen Gleichung, wie man sie zur Aufstellung der Resolventen gebraucht. Diese Methode benutzt als Bild für die n Wurzeln einer Gleichung n Elemente des Raumes von $(n-2)$ Dimensionen und ersetzt die Vertauschungen der Wurzeln unter sich durch diejenigen linearen Transformationen des genannten Raumes, durch welche die n gegebenen Elemente in sich übergeführt werden », [Klein 1871b, p. 346].

46. « Auf ein beliebiges Element des Raumes von $(n-2)$ Dimensionen denke ich mir nun die $n!$ Transformationen angewandt, welche die n gegebenen Elemente unter einander vertauschen. Dasselbe nimmt dann im Allgemeinen $n!$ besondere Lagen an. *Das System der somit erzeugten $n!$ Elemente ist das Bild der Galois'schen Resolvente der durch die n gegebenen Elemente vorgestellten Gleichungen n^{ten} Grades.* Für besondere Annahmen des beliebigen Elementes können die $n!$ Elemente, welche aus ihm hervorgehen, zu mehreren jedesmal zusammenfallen. Die Galois'sche Resolvente wird dann eine Potenz eines Ausdrucks, der als eine besondere Resolvente bezeichnet wird. »

droites qu'il avait développée dans son article de 1870 du corpus, [Klein 1870]. Dans cette référence, Klein avait rappelé que les droites de l'espace peuvent être décrites grâce à six coordonnées complexes homogènes $x_1, \ldots, x_6$ satisfaisant une relation quadratique $R = 0$. Les six ensembles de droites donnés respectivement par les équations $x_1 = 0, \ldots, x_6 = 0$ étaient appelés des *complexes*. Une propriété était alors que les droites appartenant à deux complexes donnés coupent toutes deux droites fixes, appelées *directrices* des complexes.

Pour l'image géométrique de l'équation générale de degré 6 donnée dans [Klein 1871b], les racines étaient remplacées par les six complexes et Klein expliquait alors que les permutations des racines correspondent aux transformations de l'espace qui laissent R invariante, à un multiple près. Il ne s'apesantissait néanmoins pas sur l'étude de ces transformations et préférait donner des exemples de résolvantes particulières :

> Deux quelconques des six complexes donnés ont une congruence en commun qui consiste en deux directrices. Il y a $6 \cdot 5/2 = 15$ tels couples de directrices. Ces couples de directrices sont en même temps les couples de droites que les quatre complexes restants ont en commun.
>
> *Les 15 couples de directrices sont l'image d'une résolvante du quinzième degré.*
>
> Les 15 couples de directrices forment maintenant les arêtes de 15 tétraèdres (en ce sens que l'on peut diviser de 15 façons six éléments en trois groupes de deux).
>
> *Ces 15 tétraèdres représentent une deuxième résolvante du quinzième degré.*
>
> Maintenant, de ces 15 tétraèdres, on peut en choisir, et ce de 6 façons, 5 qui contiennent les 30 directrices comme arêtes.
>
> *Ces groupes de 5 tétraèdres représentent une résolvante du sixième degré*[47]. [Klein 1871b, p. 357]

Le même type d'argument était encore employé pour trouver une résolvante du dixième degré représentant dix hyperboloïdes.

On remarquera à quel point l'argumentation de Klein fait écho à celle de Jordan : il s'agit de mettre en évidence des groupements des objets de base et d'en déduire directement l'existence de résolvantes. Ici, le cadre est différent car Klein écrit un article dont le but est justement de présenter une façon de se représenter géométriquement des résolvantes d'équations : ce but peut ainsi se voir comme une façon d'ériger en méthode plus systématique les raisonnements vus chez Jordan.

---

47. « Je 2 der 6 gegebenen Complexe haben eine Congruenz gemein und diese besitzt 2 Directricen. Es giebt $6{\cdot}5/2$ derartiger Directricenpaare. Diese Directricenpaare sind zugleich diejenigen Linienpaare, welche den 4 übrigen Complexen jedesmal gemeinsam sind. *Die* 15 *Directricenpaare sind das Bild einer Resolvente* 15^{ten} *Grades.* Die 15 Directricenpaare bilden nun die Kanten von 15 Tetraedern (dem entsprechend, dass man 6 Elemente auf 15 Weisen in 3 Gruppen von 2 theilen kann). *Diese* 15 *Tetraeder stellen eine zweite Resolvente* 15^{ten} *Grades dar.* Aus den 15 Tetraedern nun kann man auf 6 Weisen solche 5 aussuchen, die zusammen alle 30 Directricen zu Kanten haben. *Diese Gruppen von 5 Tetraedern repräsentiren eine Resolvente des* 6^{ten} *Grades.* »

Les procédés de résolution ainsi décrits utilisent donc directement, sans traduction algébrique intermédiaire, l'existence de groupements d'objets géométriques correspondant aux racines. Cela s'accorde bien à la fois avec l'absence générale de formation des équations de la géométrie et l'insistance faite sur les relations d'incidence : pour concevoir les équations et pour les résoudre, nul besoin de savoir les former ; il suffit de comprendre comment se comportent les objets géométriques associés aux racines et trouver des objets dérivés adéquats. Comme les sous-sections suivantes vont le montrer, tout cela repose sur le désir de la part des auteurs de placer ces objets dérivés au cœur de la compréhension même des équations de la géométrie.

4.3.3 Une « démonstration définitive »

Je rappelle encore une fois certains points qui ont été vus au chapitre 2. Il s'agit de la question du résultat concernant le lien entre les vingt-sept droites et les fonctions hyperelliptiques : Jordan avait montré dans le *Traité* que l'équation de la trisection des périodes de ces fonctions a le même groupe, après adjonction d'un radical carré, que l'équation aux vingt-sept droites.

Parmi les lettres reçues par Jordan à l'occasion de la mise en circulation du *Traité*, celle écrite par Luigi Cremona mentionnait en particulier sur ce résultat :

> Il y a une question qui excite au plus haut degré ma curiosité : celle du rapprochement de la recherche des 27 droites d'une surface cubique (qui ont été découvertes par MM. Cayley et Salmon, avant Steiner) avec la trisection des fonctions hyperelliptiques. Surtout au point de vue géométrique, il y a là une véritable énigme à expliquer [48].

Ce à quoi Jordan avait répondu :

> La démonstration définitive d'une liaison entre cette question des 27 droites et la division des fonctions abéliennes me semble une question bien intéressante, mais trop difficile pour moi, qui ne possède assez ni les théories géométriques, ni celles des fonctions abéliennes. L'intérêt que vous paraissez prendre à ce sujet m'a cependant décidé à faire un premier pas dans cette voie, en cherchant quelle est la fonction des 27 droites qui satisfait à une équation du 40^{e} degré, analogue à celle de la trisection des fonctions abéliennes.

Il s'agissait donc, pour Jordan et pour Cremona, de revenir après coup sur le lien entre fonctions hyperelliptiques et vingt-sept droites et d'en donner une « démonstration définitive ».

Or, ces extraits mettent en évidence que la clé pour cette démonstration réside du côté de la géométrie, et s'incarne en une « fonction des 27 droites », c'est-à-dire un objet dérivé créé à partir des vingt-sept droites. L'analogie avec les « réduites géométriques » du *Traité* est claire, Jordan ayant commencé par chercher dans les objets dérivés déjà connus :

48. Extrait d'une lettre de Cremona à Jordan datée du 19 décembre 1869, conservée aux Archives de l'École polytechnique (réf. VI2A2(1855) 9).

> J'avais d'abord pensé qu'il fallait prendre pour nouvelle inconnue un terne de trièdres conjugués ; mais l'équation du 40e degré ainsi obtenue n'est pas celle que l'on cherche, quoique présentant avec elle des traits de ressemblance assez remarquables [49].

Dans la suite de la lettre, Jordan indiquait que la fonction adéquate qu'il avait trouvée était un ennéaèdre, c'est-à-dire un système de neuf plans contenant les vingt-sept droites trois à trois et entretenant entre eux des relations d'incidence particulières. Les résultats avaient ensuite été publiés dans la note de 1870 du corpus, [Jordan 1870a], dans laquelle Jordan annonçait « faciliter la comparaison » des vingt-sept droites et des fonctions hyperelliptiques en exhibant les ennéaèdres — de façon simultanée et indépendante, Cremona avait lui aussi mis à jour ces ennéaèdres [50].

Comme je l'ai expliqué au chapitre 2, l'équivalence entre l'équation aux vingt-sept droites et celle aux quarante ennéaèdres n'était pas justifiée par Jordan, et rappelait ainsi la situation des « réduites géométriques » du *Traité*. Mais il y a, dans le cas des objets dérivés que sont les ennéaèdres, une dimension supplémentaire que l'on peut lire dans l'échange entre Jordan et Cremona : c'est par eux que passent la bonne compréhension du problème et sa « démonstration définitive ».

4.3.4 La « nature particulière » d'une équation

Un type de commentaire similaire sur les objets dérivés se retrouve dans des commentaires de Clebsch, Klein et Noether au sujet des travaux de Hesse sur l'équation aux neuf points d'inflexion. Les grandes lignes de l'approche de Hesse dans son article de 1847, [Hesse 1847], ont déjà été brossées : Hesse s'intéressait d'abord à des équations algébriques de degré 9 dont les racines sont liées par certaines relations, et il montrait dans un second temps que l'équation aux neuf points d'inflexion est de ce type, les relations entre racines provenant de l'alignement trois à trois des points d'inflexion.

Dans la notice nécrologique qu'il écrit de Hesse, Klein revient sur ces recherches :

> Hesse attaqua le problème de la détermination algébrique des neuf points d'inflexion. Parce que l'on peut ranger en quatre triangles les douze lignes sur lesquelles ces points sont disposés trois à trois, la résolution de l'équation du *neuvième* degré considérée dépend d'une équation du *quatrième* degré [51]. [Klein 1875, p. 48]

Les quatre triangles qu'évoque Klein ont pour côtés les douze droites contenant trois à trois les points d'inflexion, de sorte que ces derniers sont tous inclus dans chacun des quatre

49. Les « terne[s] de trièdres conjugués » sont les triplets de couples de trièdres de Steiner, déjà évoqués précédemment. La ressemblance qu'évoque Jordan est qu'après adjonction d'une de leurs racines, l'équation de la trisection et celle des quarante triplets ont même groupe.

50. Voir [Cremona 1870] ainsi que la lettre de Cremona à Jordan reproduite dans [Jordan *Œuvres 4*, p. 598]

51. « Andererseits ergriff Hesse das Problem der algebraischen Bestimmung der neun Wendepunkte. Weil man die zwölf Linien, auf welchen dieselben zu drei vertheilt liegen, in vier Dreiecke ordnen kann, hängt die Lösung der betr. Gleichung *neunten* Grades von einer Gleichung *vierten* Grades ab. »

triangles. Comme expliqué précédemment, leur existence avait été démontrée par Hesse dans un article de 1844, [Hesse 1844b]. Mais alors que ce dernier ne les mentionnait à aucun endroit de son article sur l'équation aux neuf points, Klein place dans leur existence la raison même de l'existence d'une réduite du quatrième degré [52] : la résolution de l'équation aux neuf points dépend d'une équation du quatrième degré « parce que » les douze droites les contenant trois à trois forment quatre triangles. Il s'agit donc d'une résolution *via* les objets dérivés, comme celles décrites précédemment.

Cette insistance faite sur les triangles se lit aussi dans la notice nécrologique de Julius Plücker écrite par Clebsch. Alors que ce dernier évoque les travaux de Plücker sur les courbes cubiques, il ajoute :

> Les quatre triangles en lesquels se groupent [les douze droites joignant trois à trois les points d'inflexion] étaient encore inconnus de Plücker. En les trouvant, [Hesse 1844b], Hesse fut à même de révéler la vraie nature algébrique du problème. Ainsi fut révélé le caractère merveilleux de cette classe d'équations du neuvième degré résolubles algébriquement qui portent le nom de Hesse, et pour lesquelles les points d'inflexion forment le premier exemple [53]. [Clebsch 1872b, p. 22]

Ici, Clebsch va plus loin que Klein : l'existence des quatre triangles permet d'accéder à la « vraie nature algébrique du problème ». C'est également ce qu'écrit Noether dans sa nécrologie de Hesse :

> Par les recherches sur les points d'inflexion des courbes du troisième ordre, pour lesquels seules les douze droites qui les contiennent trois à trois n'étaient alors connues, l'existence des quatre triangles en lesquels les droites se groupent a donné un aperçu sur la nature particulière de l'équation du neuvième degré qui détermine les neuf points [54]. [Noether 1875, p. 86]

Un peu plus loin, Noether place l'exemple des neuf points d'inflexion dans un cadre plus large, celui des exemples intuitifs (les équations de la géométrie) guidant la compréhension de la théorie des substitutions :

> Une image géométrique pour tous les rapports concernant des groupements de racines a été acquise. De tels exemples particuliers et intuitifs ont vraiment participé à une

52. Il est bien entendu possible de relier les quatre triangles à l'approche de Hesse : ils correspondent aux quatre lignes du tableau des racines conjuguées (cf. *supra*).

53. « Dagegen waren Plücker die vier Dreiecke noch unbekannt, zu welchen diese Geraden sich gruppiren. Indem Hesse diese fand (Crelles Journ. Bd. 28, 1844), vermochte derselbe die wahre algebraische Natur des Problems zu erschliessen. Es zeigte sich der wunderbare Character jener Classe algebraisch lösbarer Gleichungen 9. Grades, welche Hesse's Namen führen, und für welche die Wendepuncte das erste Beispiel bilden. »

54. « Bei der Untersuchung der Wendepunkte der Curve dritter Ordnung aber, für welche vorher nur die zwölf Geraden, welche dieselben zu je drei enthalten bekannt waren, ergab sich durch den Nachweis der vier Dreiseite, in die sich die Geraden gruppiren, ein Einblick in die besondere Natur der Gleichung neunten Grades, welche die neun Punkte bestimmt. »

> conception plus aisée ainsi qu'au développement de la théorie des substitutions, en elle-même si abstruse, et dont les bases élaborées par Galois après les recherches d'Abel ont été publiées peu après ces travaux de Hesse [55]. [Noether 1875, p. 86]

La mention de l'intuition fait écho à celle déjà rencontrée dans l'introduction du mémoire de Klein sur la représentation géométrique des résolvantes, [Klein 1871b]. Comme chez Klein, l'accent est mis sur l'« image géométrique » des « groupements de racines », à laquelle s'oppose une difficile théorie des substitutions — Noether va ici un peu plus loin que Klein, et place les équations de la géométrie dans une chronologie du développement de la théorie des substitutions.

La nature des équations de la géométrie est donc placée dans l'existence des objets dérivés, incarnations géométriques de relations d'incidence ou des groupements de racines. À titre de comparaison, on se souviendra de la conception de Kronecker de la nature d'une équation, que j'ai évoquée dans le chapitre précédent. Pour lui, la nature d'une équation devait se lire dans des formules concrètes et explicites pour les racines, et pas dans des applications des méthodes de Galois, « plus propres à cacher la vraie nature des équations résolubles qu'à la découvrir [56] » : contraste net avec une vision des équations de la géométrie et de leurs racines non explicitées, situées (par Noether et Klein) dans une lecture géométrique et intuitive de la théorie des équations et en particulier des travaux de Galois.

4.3.5 Résolutions, groupements et intuition

À travers tous les exemples décrits dans cette section, nous avons vu l'importance des groupements d'objets géométriques exprimant leurs relations d'incidence dans les processus de résolution des équations de la géométrie. Exprimés de diverses manières, ce sont toutefois les objets dérivés qui semblent cristalliser l'attention, en particulier parce qu'ils sont la clé pour bien comprendre certaines situations ou pour accéder à la nature des équations.

Au sein du corpus des équations de la géométrie, les « réduites géométriques » de Jordan se fondent parmi d'autres exemples et perdent ainsi la spécificité qu'elles avaient en regard du seul *Traité des substitutions et des équations algébriques*. De plus, au vu de l'insistance faite sur les objets dérivés dans le corpus, le retour par Jordan sur le lien entre les fonctions hyperelliptiques et les vingt-sept droites par les ennéaèdres est moins étonnant que ce qu'il n'y paraissait au chapitre 2.

Que Jordan doive lui-même apporter une « démonstration définitive » à ce lien qu'il a lui-même démontré par des isomorphismes de groupes peut ainsi se voir comme un

55. « [Es] war auch ein geometrisches Bild für alle auf die Gruppirungen der Wurzeln bezüglichen Verhältnisse gewonnen. Solche anschauliche speciellere Beispiele haben wesentlich auf die leichtere Auffasung und auch auf die Ausbildung der an sich so abstrusen Substitutionstheorie gewirkt, deren von Galois schon balch nach den Abel'schen Untersuchungen geschaffene Grundlagen auch erst nach dieser Arbeit Hesse's veröffentlicht worden sind. »

56. Cité à partir de [Ehrhardt 2012, p. 119]. Voir aussi [Edwards 1989 ; Edwards 2005 ; Edwards 2009].

problème de communication : il s'agit pour lui d'apporter une réponse en des termes (les ennéaèdres) qui seront acceptés et compris par ses pairs, au contraire d'un lien qui relève de la « si abstruse » théorie des substitutions.

Nous avons vu que la tension entre la difficulté et le caractère abstrait de la théorie des substitution d'une part, et le côté intuitif lié à la géométrie, est explicitement mise en avant par Klein et par Noether. Mais elle est aussi exprimée par d'autres personnes, toujours dans des situations en rapport avec les équations de la géométrie. Ainsi, lorsque Clebsch remercie Jordan pour l'envoi de la seconde partie du *Traité des substitutions et des équations algébriques*[57], il avoue devoir capituler devant les difficultés qu'elle présente, faute de pouvoir recourir à la géométrie :

> Seulement maintenant puis-je vous adresser mes remerciements pour l'aimable envoi de la seconde partie de votre livre. J'aurais seulement aimé que vous auriez pu m'envoyer en même temps la compréhension nécessaire, car malheureusement je dois avouer que ces profondes et importantes recherches vont pour le moment bien au-delà de mes compétences. Je m'en tiens à la première moitié, où la géométrie vient à mon aide et guide les idées dans les choses abstraites. J'espère que la compréhension du reste ne me restera pas à jamais en défaut[58].

Les difficultés associées aux travaux de Jordan ne sont d'ailleurs pas spécifiques aux auteurs du corpus que sont Clebsch, Klein et Noether. Par exemple[59], dans le paragraphe final de sa revue bibliographique du *Traité*, Jules Hoüel commente :

> Telle est l'analyse des principales questions résolues par M. Jordan. Cette analyse nous a été rendue facile par les développements qu'a donnés l'auteur dans différents recueils. Les travaux qui précèdent viennent au moment favorable ; car les progrès de la Géométrie analytique ont permis, comme on l'a vu, à M. Jordan, de donner des applications qui ajoutent un grand intérêt et un nouvel attrait à la théorie si difficile des substitutions. [Hoüel 1871, p. 169]

La tension entre théorie des substitutions et géométrie ainsi plusieurs fois exprimée en rappelle une autre, un peu plus tardive, entre théorie des nombres et géométrie. Sébastien Gauthier a en effet analysé les interventions de l'intuition géométrique dans la géométrie des nombres de Hermann Minkowski notamment ; et il est vrai que le rapprochement

57. Cette seconde partie correspond très probablement au Livre IV, consacré à la classification des équations résolubles par radicaux.

58. « Erst jetzt also kann ich Ihnen meinen Dank aussprechen für die freundliche Uebersendung der zweiten Abtheilung Ihres Buches. Ich wollte nur, Sie hätten mir auch zugleich das nöthige Verständnis mitschicken können, denn leider, ich muss es gestehen, gehen diese tiefen und wichtigen Untersuchungen bis jetzt weit über meine Fassungsgabe hinaus. Ich halte mich an die erste Hälfte, wo die Geometrie mir zu Hülfe kommt, und die Gedanken auch bei den abstracten Dingen leitet. Hoffentlich wird auch das Verständnis des Übrigen mir nicht immer versagt bleiben. » Extrait d'une lettre de Clebsch à Jordan datée du 5 mars 1871, conservée aux Archives de l'École polytechnique (réf. VI2A2(1855) 15). Je remercie Norbert Schappacher pour l'aide qu'il m'a apportée pour la transcription et la traduction de cet extrait.

59. Bien qu'ils ne concernent pas la géométrie, on se souviendra également des commentaires de Hermite sur l'usage des substitutions dans les travaux de Jordan, dont l'étude lui était « tellement difficile et tellement pénible ». Voir [Brechenmacher 2006, p. 173-175].

d'une théorie des nombres difficile et abstraite et d'une géométrie intuitive fait écho à celui observé ici pour les équations de la géométrie [60]. Mais alors qu'en géométrie des nombres, la géométrie prend pleinement sa fonction heuristique à travers l'utilisation de dessins, nulle trace de telles représentations ne peut se trouver dans notre corpus, ni même dans les documents qui orbitent autour de celui-ci (autres textes publiés, lettres, manuscrits de cours).

Nulle trace non plus d'usage pour les équations de la géométrie de modèles de surfaces, dont nous avons pourtant vu que certains étaient déjà produits et utilisés à d'autres fins (en particulier par Clebsch et Klein) autour de 1870. L'intuition mobilisée pour ou par les équations de la géométrie autour des groupements de leurs racines ne semble donc pas mettre en jeu une réalisation matérielle de ces groupements ; elle provient plutôt de la possibilité d'incarner et de découvrir géométriquement des groupements de racines en objets géométriques, sans avoir à recourir à la théorie des substitutions. Ainsi, résoudre une équation de la géométrie revient finalement à un jeu d'assemblage adéquat d'objets : des droites à disposer en triangles [61], des plans à disposer en ennéaèdres, etc. Cet aspect combinatoire des équations de la géométrie est d'ailleurs attesté par le fait qu'en général, certains des objets dont les groupements sont étudiés sont complexes ou situés à l'infini.

Je vais maintenant récapituler tous les résultats obtenus jusqu'à présent dans ce chapitre et montrer en quoi ils forment un tout cohérent. Il sera utile, pour décrire ce tout, de se baser sur la notion de culture.

4.4 Les équations de la géométrie : une culture ?

Je rappelle que j'utilise ici la définition de culture de Guy Rocher : « un ensemble lié de manières de penser, de sentir et d'agir plus ou moins formalisées qui, étant apprises et partagées par une pluralité de personnes, servent, d'une manière à la fois objective et symbolique, à constituer ces personnes en une collectivité particulière et distincte », [Rocher 1968, p. 111]. Comme souligné au début du chapitre, cette définition comporte les caractéristiques d'une culture que l'on retrouve dans la plupart des définitions, mais insiste également sur une fonction constitutive d'une culture. En suivant les explications de G. Rocher lui-même, je vais à présent tester cette définition sur le cas des équations de la géométrie, en procédant morceau par morceau.

---

60. Voir [Gauthier 2009], et en particulier les citations données à la page 202.

61. Sur un plan mathématique, je n'ai trouvé dans le corpus aucune justification que les objets dérivés proposés représentaient effectivement des résolvantes. Prenons l'exemple de l'équation aux vingt-sept droites et de sa réduite correspondant aux quarante-cinq triangles et raisonnons en termes (anachroniques) de permutation conservant les relations d'incidence. Toute permutation des vingt-sept droites conservant leurs relations d'incidence induit évidemment une permutation des quarante-cinq triangles conservant leur relations d'incidence. Mais la réciproque est vraie car les cinq triangles qui contiennent une droite donnée n'ont que celle-ci en commun. Autrement dit, la connaissance des triangles et de leurs relations permet de retrouver celle des vingt-sept droites. Voir [B. Segre 1942, p. 23] pour plus de détails.

4.4.1 Des traits culturels partagés

Comme écrit dans l'introduction de ce chapitre, les « manières de penser, de sentir et d'agir » sont formés de « modèles, valeurs, symboles [incluant] les connaissances, les idées, la pensée », [Rocher 1968, p. 112]. Dans le cas des équations de la géométrie, ces éléments sont les éléments caractéristiques que j'ai analysés précédemment : désignation des équations, absence générale de définition et de formation précises de celles-ci, processus d'identification, de reconnaissance et de résolution.

Commençons par la question du partage de ces éléments par « une pluralité de personnes ». Par construction même du corpus, tous les auteurs qui y sont engagés étudient au moins une équation de la géométrie ; de plus, tant ces auteurs que leurs textes forment un réseau assez serré, indice de réelles circulations du savoir lié aux équations de la géométrie. Ces circulations sont entre autres reflétées par un usage répandu de désignations de ces équations ou de procédés de résolution. Nous sommes donc bien dans un cas où des façons de faire mathématiques sont partagées dans une certaine collectivité. Le caractère social du savoir lié aux équations de la géométrie, important pour la définition de G. Rocher (mais aussi pour toutes les autres définitions de « culture »), est donc bien présent ici. Par ailleurs, la question du nombre importe peu à ce dernier dans la question d'une culture : « il peut suffire de quelques personnes pour créer la culture d'un groupe restreint [...]. La notion de culture ne s'applique pas qu'à une société globale. Les sociologues parlent volontiers de la culture d'une classe sociale, d'une région, d'une industrie, d'un "gang" », [Rocher 1968, p. 112-113]. Cette remarque s'accorde bien au cas des équations de la géométrie : parmi la dizaine de mathématiciens qui y sont engagés, seule une poignée participe à l'essentiel des activités entre 1868 et 1872.

Les apparitions répétées et ressemblantes de façons de faire particulières nous permettent ainsi de deviner des modèles (ou *patterns*) qui sont partagés par la collectivité. Mais le concept de modèles contient aussi une idée de contrainte sociale, en ce sens qu'ils orientent l'action à venir, c'est-à-dire que les façons de faire ou des comportements collectifs sont façonnés par les modèles [62]. Dans le cas des équations de la géométrie, on pourra penser à l'exemple de la « démonstration définitive » de Jordan (et par Jordan lui-même) du lien entre les vingt-sept droites et les fonctions hyperelliptiques. On peut en effet voir dans cet exemple une mise en conformité de la réponse de Jordan suivant les modèles existants — ici, répondre à une question de résolubilité d'équation de la géométrie en mettant en avant un objet dérivé, et non pas en montrant une égalité de groupes.

En se conformant à ces modèles, les auteurs du corpus manifestent par là-même leur adhésion à des valeurs sous-jacentes, sanctionnant les bonnes conduites : « les modèles peuvent être considérés comme des formes symboliques des valeurs ; et l'orientation de l'ac-

62. « [L]e chercheur établit par abstraction les formes à partir des conduites des gens qu'il observe : il décrit les modèles de conduite, qui [...] moulent le comportement, façonnent les attitudes, les croyances et les opinions. » [Herskovits 1952, p. 123].

tion conforme à certains modèles témoigne aussi, d'une manière symbolique, de l'adhésion du sujet à des valeurs données », [Rocher 1968, p. 94]. Par exemple, ces valeurs disent que les bonnes désignations pour les équations de la géométrie sont celles que nous avons rencontrées, ou que les questions pertinentes sont celles qui concernent leur résolubilité. Outre ces valeurs qui sont inférées de l'existence même de comportements récurrents, d'autres ont été mises en évidence à l'aide de remarques d'ordre épistémique émanant des auteurs. Il y a ainsi une valorisation de ce j'ai appelé les « objets dérivés » comme bonne façon de formuler des résultats, que ce soit parce qu'ils permettent de vraiment comprendre un lien entre équations ou d'en accéder à la nature.

Nous avons donc des modèles et des valeurs partagés, liés entre eux selon G. Rocher par des relations symboliques. En particulier, il y a là une idée de symbolisme de participation, consistant à considérer que la conformité de l'action d'un individu aux modèles reflète son adhésion à certaines valeurs. Je souhaiterais toutefois nuancer un peu cette idée en insistant sur le fait qu'une action conforme à des modèles peut symboliser une adhésion à des valeurs, mais à différents degrés. Prenons un exemple religieux [63] : faire le signe de croix en entrant dans une église catholique montre une conformité sociale aux usages en place, mais peut recouvrir des réalités très différentes sur les individus eux-mêmes, en particulier sur leur position vis-à-vis des valeurs religieuses. De même, l'usage des désignations particulières des équations de la géométrie indique l'existence d'un certain groupe social à considérer, mais ne traduit pas de façon uniforme l'adhésion aux valeurs en place.

On voit en tout cas que les « manières de penser, de sentir et d'agir » relevées à partir du corpus des équations de la géométrie peuvent être vues comme des traits culturels, même s'il convient d'être prudent quant aux spécificités des individus — surtout dans une collectivité formée seulement d'une poignée de sujets, comme dans notre cas. Continuons justement la discussion sur cette question-là.

D'abord, soulignons que par l'expression « plus ou moins formalisées » qu'il utilise dans sa définition de « culture », G. Rocher signifie que « les manières d'agir, de sentir et de penser » ne sont pas nécessairement soumises à des règles strictes ; elles peuvent ou même doivent s'accompagner d'une « part d'interprétation et d'adaptation personnelle », [Rocher 1968, p. 112]. Par exemple, cet aspect se voit bien sur l'existence même de différentes variations que l'on trouve pour les désignations des équations de la géométrie. En outre, et alors qu'aucune de ces désignations n'est unanimement adoptée (voire : sont la spécificité d'un auteur, comme dans le cas de l'utilisation de « séparer » par Clebsch), les différences n'entravent ni la communication, ni la compréhension entre les mathématiciens. De même, les nuances qui existent entre les diverses expressions des groupements d'objets (tableaux, objets dérivés, etc.) peuvent être vus comme autant de déclinaisons plus ou moins personnelles qui n'obstruent pas leur circulation. La notion de culture permet ainsi de rendre

63. G. Rocher lui-même illustre l'idée de symbolisme de participation avec (entre autres) l'exemple des religions, en insistant surtout sur l'effet de sociabilisation des rites religieux.

compte, comme c'est le cas ici, d'ensembles de traits globalement homogènes mais présentant des variations idiosyncratiques.

Pour ce qui est ensuite du niveau d'engagement des auteurs, les relevés que j'ai effectués au chapitre 3 ont montré des disparités assez fortes. Par exemple, l'équation aux neuf points d'inflexion a une place extrêmement restreinte dans le texte de Netto, qui ne participe de ce point de vue que très peu au corpus. De même, bien que tous les auteurs se basent d'une façon ou d'une autre sur les relations d'incidence dans leurs procédés de résolution, Hesse n'utilise pas du tout les mêmes techniques que les autres — typiquement, déduire directement l'existence d'une réduite à partir de l'existence d'objets dérivés. À l'inverse, Clebsch, Jordan, Klein et Noether peuvent être situés au centre des travaux sur les équations de la géométrie, que ce soit au niveau du nombre d'occurrences d'équations, au niveau de leurs relations fortes avec les autres auteurs ou au niveau de leur adhésion explicite aux valeurs concernant la nature et la bonne compréhension des équations. Cela ne signifie pas pour autant qu'il faille exclure les uns de l'analyse au profit des autres, mais plutôt qu'il est nécessaire de pondérer l'engagement de chacun des auteurs.

En effet, comme j'ai déjà eu l'occasion de l'écrire, Hesse a eu un rôle important dans la formation mathématique des autres auteurs du corpus. Or, la question de transmission des traits culturels par apprentissage est importante dans la notion de culture, que ce soit pour G. Rocher ou d'autres sociologues et anthropologues : « L'acquisition de la culture résulte des divers modes et mécanismes de l'*apprentissage* [...]. Les traits culturels ne sont donc pas partagés par une pluralité de personnes de la même façon que peuvent l'être des traits physiques ; on peut dire que les derniers sont le fruit de l'*hérédité*, tandis que les premiers sont un *héritage* que chaque personne doit recueillir et faire sien. » [Rocher 1968, p. 113]. Dans le cas des équations de la géométrie, nous avons vu ce mécanisme de transmission opérer à deux niveaux. D'abord par une filiation générationnelle dans laquelle Hesse et Clebsch jouent un rôle important : comme indiqué au chapitre 3, Clebsch a été intéressé par les équations particulières, dont celles issues de la géométrie, par les travaux de Hesse (un de ses professeurs), et il a ensuite joué un rôle certain dans l'ajout du chapitre des applications géométriques du *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Jordan, et on a aussi vu l'impact de Clebsch sur les premiers travaux de Klein. Ensuite, la présence d'équations de la géométrie dans le *Traité* de Jordan et le *Cours d'algèbre supérieure* de Serret montre bien la part de transmission par apprentissage pour les auteurs du corpus [64] : par exemple, ces ouvrages font partie des références de Klein pour ce qui est de la théorie des substitutions au début des années 1870 [65]. En revanche, les livres de Netto et de Weber, étant les plus récents du corpus, ne participent pas à la formation de

64. En revanche, mes sources n'ont pas permis de trouver de trace d'apprentissage sous la forme (par exemple) d'une remarque d'un auteur à un autre, lui enseignant quelle sont les bonnes façons de faire ou lui indiquant qu'il n'a pas abordé telle question comme il le faudrait.

65. Voir par exemple le début de [Klein 1871b] ou les commentaires relatifs à la théorie de Galois dans le *Programme d'Erlangen*, [Klein 1872, p. 39].

nos auteurs. Le fait qu'il évoquent encore des équations de la géométrie montre plutôt que le sujet reste digne d'intérêt à la fin du siècle. Nous voyons donc l'intérêt de prendre en compte les auteurs comme Hesse ou Netto, même s'il est vrai que le cœur des activités liées aux équations de la géométrie est situé plus proche de Clebsch, Jordan, Klein et Noether.

Les premières caractéristiques de « culture » sont donc présentes dans le cas des équations de la géométrie, puisque nous avons des traits culturels partagés et appris par une pluralité de personnes.

4.4.2 Une « collectivité particulière et distincte » ?

J'en viens maintenant au point de la définition de culture de G. Rocher concernant la fonction de constitution des personnes engagées dans la culture « en une collectivité particulière et distincte ». D'après Rocher en effet, une culture a cette fonction sociale de rassembler subjectivement une pluralité de personnes, à l'instar par exemple d'un rapprochement géographique ou d'un lien du sang, tant et si bien que « ces personnes [...] se sentent enfin, chacune individuellement et toutes collectivement, membres d'une même entité qui les dépasse et qu'on appelle un groupe, une association, une collectivité, une société », [Rocher 1968, p. 117].

Or, dans le cas des équations de la géométrie, aucun indice ne laisse penser que les auteurs qui y sont engagés se sentent membres d'une entité commune, d'un « nous » subjectif qu'ils pourraient définir eux-mêmes. En effet, comme j'ai déjà pu le dire à l'occasion de la discussion de l'usage de « discipline », ces auteurs ne se donnent pas de nom collectif ou n'établissent pas de critère d'appartenance au groupe ; ils ne créent pas, à partir du sujet des équations de la géométrie, de frontière entre eux et d'autres mathématiciens. Précisons que cela ne signifie pas que nos auteurs principaux ne savent pas à qui s'adresser, ou quels sont les textes qu'ils doivent lire pour le sujet des équations de la géométrie. En revanche, il n'y a pas de constitution délibérée d'une identité assumée de la pluralité autour des équations de la géométrie [66].

Je vais maintenant passer à une caractéristique essentielle, exprimée dans la définition de G. Rocher par les mots « ensemble lié ».

4.4.3 Un système culturel

Il s'agit par là de souligner que les manières de penser, de sentir et d'agir doivent former un système intriqué et cohérent : « les différents éléments qui composent une culture donnée ne sont pas simplement juxtaposés l'un à l'autre. Des liens les unissent, des rapports de cohérence les rattachent les uns aux autres », [Rocher 1968, p. 115]. Ce point me semble très important pour le cas des équations de la géométrie, car tous les traits caractéristiques

66. Pour illustrer le sentiment d'appartenance d'individus à un tout plus grand, on pourra penser à des membres d'une institution (comme une grande école de l'enseignement supérieur) dotée d'une culture propre et revendiquée. Voir [Cuche 2010, p. 121].

qui ont été analysés séparément dans ce chapitre et le précédent sont liés entre eux, et forment un tout cohérent.

En effet, soutenue par les valeurs mettant les objets géométriques eux-mêmes au cœur de la compréhension des équations de la géométrie, l'accentuation faite sur les relations d'incidence permet d'expliquer à la fois les modes de résolution et d'identification de ces équations, leurs différentes désignations et l'absence générale de formations explicites. Par exemple, il n'est pas utile à Clebsch, Jordan, Klein ou Noether, de (savoir comment) former l'équation aux neuf points d'inflexion et ses résolvantes puisque l'attention est essentiellement portée sur les points d'inflexion eux-mêmes et leurs groupements géométriques en droites ou en triangles. La désignation « l'équation aux neuf points » est ainsi un symbole faisant référence[67] à une certaine équation de degré 9, qu'il serait possible de former mais qui sera surtout considérée sous l'angle de l'incarnation géométrique de ses racines et de leurs groupements. Tous les flottements et imprécisions que nous avons relevées au sujet des désignations ne rendent pas leur emploi problématique ; elles permettent au contraire une communication efficace entre les membres de la pluralité en évitant des définitions mathématiquement techniques que personne ne cherche à réaliser effectivement. Un parfait exemple est la désignation « la réduite qui a pour racines nos ennéaèdres » de Jordan, qui réunissait en elle un flottement concernant le paramétrage des ennéaèdres, une incarnation géométrique directe des racines, l'équivalence à l'équation aux vingt-sept droites, et en même temps, un emploi d'un article défini laissant entendre une compréhension sans équivoque.

Bien que les désignations des équations de la géométrie ne soient pas porteuses d'une dimension affective, ou émotionnelle, un parallèle intéressant peut être fait avec la notion de « symbolisme de condensation » d'Edward Sapir :

> [Le symbolisme de condensation] est une forme très ramassée de conduite substitutive qui permet de libérer instantanément une tension affective sous forme consciente ou inconsciente. [...] Pratiquement, les deux types [symbolisme de référence et de condensation] vont de pair. Ainsi, certaines formes d'écriture, l'orthographe stylisée, les prononciations spéciales, les slogans, sont des symboles de référence ; mais ils prennent facilement l'allure de rites affectifs, et revêtent soudain pour l'individu et pour la société une importance considérable en tant que formes substitutives de l'expression affective. [Sapir 1921, p. 18-19]

Pour les équations de la géométrie, il y a en effet une idée de concentration d'une charge de significations dans leurs désignations, comme expliqué à l'instant. Ainsi, l'utilisation même d'une désignation comme « la réduite qui a pour racines nos ennéaèdres » induit une libération de tous les aspects décrits plus haut, dont celui de privilégier les objets dérivés dans toute question relative aux équations de la géométrie.

67. Nous touchons ici à des aspects sémiotiques des équations de la géométrie. Pour un approche sémiotique de l'histoire de la topologie, voir [Herreman 2000].

Quoi qu'il en soit, l'intrication de tous les éléments liés aux équations de la géométrie est une cause d'un symptôme que j'avais mis en évidence tout au début du chapitre 3 : l'absence de définition mathématique précise des équations de la géométrie et le besoin de forger ma propre compréhension de ce qu'elles sont en me plongeant dans l'ensemble des textes. Outre leur reconnaissance, la compréhension de certains points mathématiques impliquant les équations de la géométrie est aussi passée par la compréhension du tout, ou du moins par une vision d'ensemble. Autrement dit, les traits caractéristiques de ces équations ne se comprennent pleinement que lorsqu'ils sont mis en conjonction les uns avec les autres, alors que l'isolement de l'un d'eux peut conduire l'observateur à une situation qui lui semble dénuée de sens.

Reprenons ainsi l'exemple (qui m'a d'ailleurs conduit jusqu'ici) des « réduites géométriques » de l'équation aux vingt-sept droites. La première de ces réduites était celle associée aux quarante-cinq triangles :

> Prenons, par exemple, pour inconnue de la question le plan du triangle formé par trois droites qui se coupent : ces triangles étant au nombre de quarante-cinq, on aura une équation du quarante-cinquième degré, équivalente à la proposée. [Jordan 1870b, p. 319]

Comme je l'avais fait remarquer, l'existence de cette équation aux quarante-cinq triangles et son équivalence avec celle aux vingt-sept droites ne paraissait pas entrer dans le type d'énoncés et de démonstrations du *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Mais, mis en conjonction avec les façons de faire que l'on retrouve dans le corpus, et en particulier avec la valorisation des objets dérivés, ce passage du *Traité* prend plus de sens. Les valeurs prennent ainsi une importance d'autant plus grande qu'elles participent à rendre le système lié : « les valeurs contribuent à donner une certaine cohérence à l'ensemble des règles ou modèles, dans une société donnée. [Pris] séparément, les modèles trouvent difficilement leur explication et [...] les liens qui les unissent ne sont pas toujours apparents. c'est par référence à des valeurs qui les sous-tendent [...] que les modèles prennent une portée et un sens plus profonds et que s'éclairent les liens qui les rattachent les uns aux autres, tant au niveau des acteurs qu'à celui des collectivités. » [Rocher 1968, p. 86].

Finalement, les caractéristiques communément acceptées de la notion de culture se retrouvent dans le cas des équations de la géométrie. Pour insister sur l'intrication de ses éléments, mais aussi rappeler qu'il n'y a pas de constitution subjective d'une collectivité, je parlerai désormais de *système culturel* pour référer au type d'organisation des savoirs liés aux équations de la géométrie.

4.5 Un système culturel composite

Pour tenter de comprendre la place des « réduites géométriques » dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Jordan, il s'agissait pour moi d'étudier le mode d'organisation du savoir lié aux équations de la géométrie. J'en suis ainsi venu à examiner un corpus étalé de 1847 à 1896, mais dont les textes étaient essentiellement concentrées entre 1868 et 1872, avec pour contributeurs principaux Clebsch, Jordan et Klein — le texte du quatrième auteur important qu'est Noether arrivait un peu plus tard.

Un des points marquants du corpus était que ces équations de la géométrie formaient un ensemble mathématiquement mal défini, mais que cela n'empêchait pas les auteurs de repérer ce qui en relevait, de savoir comment les étudier, ou encore de chercher à accéder à leur nature. Ce flottement était incarné en particulier par des désignations imprécises, que le lecteur pouvait comprendre à force d'immersion dans les textes du corpus. Mon but a alors été de savoir décrire cette nécessité d'immersion, en rendant compte de l'activité mathématique elle-même mais aussi des modalités de son organisation.

J'ai ainsi mis en évidence plusieurs caractéristiques des équations de la géométrie : outre les désignations que je viens d'évoquer, des procédés de résolution de ces équations ont été mis à jour, et notamment certains mettant ce que j'ai appelé les objets dérivés au centre de la compréhension de la nature des équations. En mettant en évidence un réseau resserré de relations mathématiques, personnelles et institutionnelles, j'ai souligné que ces façons de faire étaient bien partagées et apprises au sein de la collectivité. Plus que cela, j'ai essayé de montrer qu'elles formaient un tout cohérent et intriqué ; autrement dit, qu'elles ne pouvaient pleinement se comprendre qu'en étant mises les unes en conjonction avec les autres. C'est pour cette raison principalement que je les ai décrites comme autant de traits d'un système culturel.

Pour finir la description de ce système culturel, je voudrais enfin revenir sur certains de ses traits, et montrer en quoi ils sont constitués d'éléments provenant de ce que j'ai suggéré être des cultures de théorie des équations d'une part et des configurations géométriques d'autre part. Concentrons-nous sur la période d'avant 1872. Nous avons vu que les procédés de résolution des équations de la géométrie se basaient tous sur la connaissance des relations d'incidence existant entre les objets associées à ces équations. Selon les auteurs, ces relations étaient exprimées en relations entre racines, en fonctions de racines, en tableaux, ou en résolvantes *via* leur expression en objets dérivés. Or, nous avons vu d'une part que ces formes (relations entre racines, fonctions, etc.) étaient des éléments d'une culture de la théorie des équations d'une grosse première moitié du XIX^e siècle ; d'autre part, que la recherche des relations d'incidence d'objets associés à des courbes et surfaces de petit degré étaient la marque probable d'une culture des configurations géométriques.

Dans le cas des relations entre racines et pour les fonctions φ, les groupements géométriques étaient traduits sous une forme algébrique, ce qui permettait dans un deuxième temps de déployer un arsenal issu de la théorie des équations (et des substitutions). Au contraire, pour les tableaux et les objets dérivés, il y avait un transfert direct de l'information géométrique au résultat algébrique. Autrement dit, dans ces cas, la recherche des groupements géométriques se substitue à la recherche des résolvantes ou des groupements algébriques de racines, et change du même coup la valeur associée : ce n'est plus la forme algébrique du groupement qui est valorisée, mais sa forme géométrique.

Ainsi, l'introduction des modèles et valeurs de la culture géométrique (les groupements d'objets) dans ceux de la culture algébrique (comment « bien » résoudre une équation) les change en partie. Il s'agit là d'un cas de *réinterprétation* au sens de Herskovits,

> processus par lequel d'anciennes significations sont attribuées à des éléments nouveaux ou par lequel de nouvelles valeurs changent la signification culturelle de formes anciennes. [Herskovits 1952, p. 248]

En ce sens, le système culturel des équations de la géométrie est donc bien formé d'éléments provenant de la rencontre entre de ce que j'ai suggéré être une culture de la théorie des équations d'une part, et d'une culture des configurations géométriques d'autre part. C'est pour cela qu'on pourra le qualifier de composite.

Remarquons encore que cette réinterprétation, de laquelle résultent en partie les traits du système culturel, est sous-tendue par le contexte, décrit plus haut, d'une théorie des substitutions difficile, face à laquelle se tient une géométrie moins abstruse et plus intuitive, en tout cas pour Clebsch, Klein et Noether. Il y a ainsi une raison pour ces derniers de substituer à des groupements de racines des groupements de points ou de droites, qui est qu'ils peuvent mieux comprendre ces derniers. La situation est donc celle de géomètres qui, pour assimiler les résultats et les techniques de la théorie des substitutions, ont recours à leurs façons de faire géométriques, remplacent les groupements de racines par des groupements d'objets.

Un autre phénomène de réinterprétation peut être deviné dans le corpus. En effet, alors que la plupart des textes présentaient ou étudiaient les équations de la géométrie comme des exemples particuliers d'équations, deux d'entre eux allaient plus loin. Il s'agit du mémoire de Clebsch sur l'interprétation géométrique de la théorie de l'équation du cinquième degré, [Clebsch 1871b], et de l'article de Klein sur la représentation géométrique des résolvantes d'équations, [Klein 1871b], qui proposent tous deux une sorte de géométrisation de pans entiers de la théorie des équations.

Chapitre 5

Interprétations géométriques : équations, invariants et groupes

Si les travaux de Clebsch ou Klein sur les équations de la géométrie ne délimitent pas une communauté spécifique de mathématiciens, ces deux mathématiciens placent toutefois des frontières entre différents domaines mathématiques. En effet, nous avons vu que dans certains textes du corpus des équations de la géométrie, ils proposent chacun une interprétation géométrique de certains aspects de la théorie des équations. Le présent chapitre a pour but d'examiner le rôle que jouent les équations de la géométrie dans ces interprétations et d'étudier les conséquences qui en ont découlé. Les textes de Clebsch et de Klein sont datés de 1871, ce qui correspond à la fin de la période des activités intenses autour des équations de la géométrie. Commencer par analyser ces textes me permettra ensuite de suivre, au moins en partie, la situation des équations de la géométrie après 1872.

5.1 Clebsch et l'équation générale du cinquième degré

Le mémoire qui fait l'objet de cette section est daté de juin 1871, [Clebsch 1871b] ; il s'agit donc d'une publication tardive dans la vie de Clebsch (1833-1872). Il est intitulé « Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5^{ten} Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits ». Comme j'ai déjà eu l'occasion de l'écrire, durant sa carrière, Clebsch avait été intéressé par la théorie des équations sans pour autant mener systématiquement des recherches exclusivement consacrées à ce sujet. Parce qu'il se rapporte essentiellement à l'équation du cinquième degré, le mémoire que nous allons examiner a donc une place singulière au sein de l'œuvre de Clebsch. Au vu des titres de la liste de ses publications, il semble d'ailleurs que Clebsch n'ait pas abordé de sujet analogue avant ou après la publication de ce mémoire de 1871 [1].

1. La liste des publications de Clebsch se trouve à la fin d'une de ses notices nécrologiques, [Brill, Gordan et al. 1873, p. 51-55]. À part [Clebsch 1871b], seule la publication [Clebsch 1871a] a un titre qui mentionne les équations de degré 5 et 6. Il s'agit d'une courte note aux *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft in*

Comme la plupart des articles de Clebsch que j'ai pu examiner, le mémoire [Clebsch 1871b], est un texte très riche et parfois difficile à suivre, que ce soit à cause d'une écriture parfois sibylline, de la technicité des arguments ou de la prolifération de résultats ne servant pas à la trame générale mais que Clebsch se garde de signaler comme tels. Dans ce qui suit, j'ai essayé de dégager au maximum les grands axes du mémoire en donnant assez d'explications pour que le lecteur voit ce quoi il retourne sans se noyer dans les détails. Notons que ce choix d'une présentation la plus claire possible a cependant un coût, puisqu'il ne permet pas de rendre compte du style de rédaction et d'exposition de Clebsch lui-même.

Le mémoire débute par une introduction dans laquelle Clebsch annonce les différents résultats qu'il va obtenir. Il explique ainsi qu'il va s'agir d'interpréter géométriquement les travaux de Hermite et de Kronecker sur l'équation du cinquième degré, basés sur la théorie des transformations des fonctions elliptiques [2]. La fin de l'introduction résume le tout, et montre bien que Clebsch souhaitait exhiber au passage des résultats ne se rapportant pas à l'équation du cinquième degré :

> On obtient ainsi, comme première application des principes généraux développés dans l'introduction du mémoire, un aperçu géométrique complet sur les rapports qui existent entre les équations de degré 5 et leurs résolvantes, en particulier sur le rapport avec la forme de Jerrard et l'équation modulaire. Avec cela, il résulte en même temps une série de remarquables résultats purement géométriques, qui semblent adéquats pour montrer la fécondités des idées et méthodes développées [3]. [Clebsch 1871b, p. 285]

Outre son introduction, le mémoire [Clebsch 1871b] est composé de 19 sections pour une soixantaine de pages. J'en ai dégagé la division suivante [4] :

— Principes de l'interprétation géométrique, exemple du quadrilatère (sections 1 à 4).

— Propriétés géométriques du quintilatère et des courbes associées (sections 5 à 9).

— Intérêt de l'étude de la courbe $C = 0$ (section 10).

— Étude géométrique de la courbe $C = 0$ (sections 11 à 14).

— Interprétation géométrique de la méthode de Jerrard (section 15).

— Étude de la surface diagonale (sections 16 à 18).

Göttingen, présentant certains des résultats du mémoire que nous étudions, [Clebsch 1871b].

2. J'en exposerai les détails au moment voulu.

3. « So erhält man als eine erste Anwendung der im Eingange der Abhandlung entwickelten allgemeinen Principien eine vollständige geometrische Uebersicht über die Zusammenhänge, welche zwischen den Gleichung 5^{ten} Grades und ihren Resolventen bestehen, insbesondere über den Zusammenhang mit der Jerrard'schen Form und der Modulargleichung. Dabei ergiebt sich zugleich eine Reihe bemerkenswerther rein geometrischer Resultate, welche geeignet scheinen, die Fruchtbarbeit [sic] der entwickelten Anschauungen und Methoden darzuthun. »

4. Les termes apparaissant dans cette liste seront expliqués plus loin. Par ailleurs, pour simplifier ma présentation, je ne respecterai pas tout le temps l'ordre du mémoire de Clebsch.

— Récapitulatif pour l'interprétation de la méthode de Hermite et interprétation de la méthode de Kronecker (section 19).

Entrons maintenant dans le détail mathématique, en commençant par les principes généraux d'interprétation géométrique.

5.1.1 Principes généraux d'interprétation géométrique

Substitutions quadratiques

Pour commencer, Clebsch considère une équation algébrique de degré n et d'inconnue λ, notée $f(\lambda) = 0$ — à aucun moment du mémoire n'est faite de remarque sur la nature rationnelle, réelle ou complexe (par exemple) de ses coefficients. Il introduit ce qu'il appelle une « substitution » ou « transformation [5] »

$$\xi = \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)},$$

où φ et ψ sont des fonctions polynomiales. Une telle transformation est dite « linéaire » lorsque φ et ψ sont de degré 1, et est dite « supérieure » si elles sont de degré au moins 2. La transformation est destinée à opérer sur l'équation $f(\lambda) = 0$, et ξ désigne donc la nouvelle inconnue. Ainsi, si les racines de l'équation de départ sont notées λ_i, alors les racines de l'équation transformée sont les $\xi_i = \varphi(\lambda_i)/\psi(\lambda_i)$. Autrement dit, si les facteurs de l'équation de départ sont les $(\lambda - \lambda_i)$, alors ceux de l'équation transformée sont les $(\varphi(\lambda_i) - \xi\psi(\lambda_i))$.

Au sujet de ces transformations, Clebsch renvoie à deux articles antérieurs, l'un dû à Paul Gordan et l'autre à lui-même, [Gordan 1870; Clebsch 1871c]. Chacune de ces références se rapporte à la théorie des invariants. Gordan et Clebsch y rappellent chacun que l'effet des transformations linéaires sur les formes algébriques a déjà été bien étudié, au contraire de celui des transformations supérieures. Tous deux mentionnent toutefois des travaux de Hermite dans lesquelles ce dernier avait introduit de telles transformations supérieures dans son approche de l'équation générale du quatrième degré, [Hermite 1858b].

Revenons au mémoire de Clebsch dont il est principalement question ici. La substitution $\xi = \varphi(\lambda)/\psi(\lambda)$ est appelée « substitution quadratique » lorsque φ et ψ sont de degré au plus 2 ; c'est ce type de substitution qui est au cœur des recherches de Clebsch dans le mémoire que nous étudions. Pour une substitution quadratique, Clebsch écrit

$$\varphi(\lambda) = y_1 + \lambda y_2 + \lambda^2 y_3 \qquad \text{et} \qquad \psi(\lambda) = x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3,$$

où les x_i et les y_i sont des nombres complexes (non tous nuls), de sorte que les facteurs de

5. Précisons que le terme « substitution » n'a pas le même que chez Jordan par exemple, c'est-à-dire qu'il ne désigne pas ce que nous appelons aujourd'hui une permutation. De plus, les « transformations » ici en jeu ne sont pas des transformations du plan ou de l'espace comme des rotations ou des homothéties.

l'équation transformée deviennent

$$(y_1 - \xi x_1) + \lambda_i(y_2 - \xi x_2) + \lambda_i^2(y_3 - \xi x_3).$$

L'idée de Clebsch est alors de considérer x_1, x_2, x_3 d'une part et y_1, y_2, y_3 d'autre part comme les coordonnées homogènes de deux points x et y du plan, qui seront appelés *points-base* de la substitution. Ainsi, à une substitution quadratique est associée une droite (xy), et les racines ξ_i de l'équation transformée correspondent aux points d'intersection de (xy) avec les n droites définies par $z_1 + \lambda_i z_2 + \lambda_i^2 z_3 = 0$, où z_1, z_2, z_3 sont les coordonnées courantes du plan [6]. Pour Clebsch, « on obtient ainsi un aperçu plus clair de l'essence de la substitution quadratique [7] ».

Clebsch fait ensuite remarquer que toutes les droites $z_1+\lambda_i z_2+\lambda_i^2 z_3 = 0$ sont tangentes à la conique [8] d'équation $z_2^2 - 4z_1z_3 = 0$, puis résume le tout en un théorème :

> L'ensemble de toutes les équations en lesquelles se transforme une équation donnée par une substitution quadratique correspond aux systèmes de points d'intersection des droites d'un plan avec les côtés d'un certain polylatère, dont les côtés touchent une conique [9]. [Clebsch 1871b, p. 286]

Autrement dit, l'équation donnée $f(\lambda) = 0$ de degré n et de racines notées λ_i définit les n droites $z_1 + \lambda_i z_2 + \lambda_i^2 z_3 = 0$ toutes tangentes à une même conique ; à une transformation quadratique $\xi = \varphi(\lambda)/\psi(\lambda)$ correspond une droite (xy) ; les racines de l'équation transformée correspondent aux points d'intersection de (xy) avec les n droites précédentes.

Remarquons que Clebsch utilise le terme *Vielseit*, que j'ai traduit par *polylatère* et non pas par *polygone*, réservé à la traduction de *Vieleck* — je parlerai dans la suite de n-latère, de quadrilatère ou de quintilatère suivant le nombre de côtés. En effet, Clebsch fait une différence entre ces deux objets qui sont duaux l'un de l'autre : un polygone est un ensemble de points (qui sont reliés par des droites) alors qu'un polylatère est un ensemble de droites (qui se coupent en des points).

6. En effet, la droite (xy) a pour équations paramétriques

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - \xi x_1 \\ z_2 = y_2 - \xi x_2 \\ z_3 = y_3 - \xi x_3. \end{cases}$$

Son intersection avec une droite d'équation $z_1 + \lambda_i z_2 + \lambda_i^2 z_3 = 0$ est obtenue pour le paramètre ξ tel que $(y_1 - \xi x_1) + \lambda_i(y_2 - \xi x_2) + \lambda_i^2(y_3 - \xi x_3) = 0$. Vu ce qui précède, ce paramètre est la racine ξ_i de l'équation transformée.

7. « Wir erhalten hierdurch eine deutlichere Einsicht in das Wesen der quadratischen Substitution », [Clebsch 1871b, p. 286].

8. Pour le vérifier, on peut substituer $z_1 = -\lambda_i z_2 - \lambda_i^2 z_3$ dans l'équation de la conique et vérifier qu'on obtient une équation du second degré (homogène) à discriminant nul. Cette nullité signifie que la droite $z_1+\lambda_i z_2+\lambda_i^2 z_3 = 0$ possède un contact d'ordre 2 avec la conique, c'est-à-dire qu'elle lui est tangente.

9. « Die Gesammtheit aller Gleichungen, in welche eine gegebene durch eine quadratische Substitution übergeht, entspricht den Schnittpunktsystemen der Geraden einer Ebene mit den Seiten eines gewissen Vielseits, dessen Seiten einen Kegelschnitt berühren. »

Clebsch indique ensuite ce qu'entraîne le changement des points-bases dans son interprétation géométrique des substitutions quadratiques. Ainsi, si une première substitution est donnée par deux points x, y, le choix de deux autres points x', y' situés sur la droite (xy) correspond à une substitution linéaire supplémentaire. Plus précisément, si les coordonnées de x' et y' sont données par

$$x'_i = \alpha x_i + \beta y_i \qquad \text{et} \qquad y'_i = \gamma x_i + \delta y_i,$$

alors la substitution linéaire en question est donnée par l'homographie [10]

$$\xi' = \frac{\gamma + \delta\xi}{\alpha + \beta\xi}.$$

Autrement dit, si une première substitution quadratique associée à une droite a été opérée sur une équation, alors tout changement de points-base sur cette droite entraîne une substitution linéaire sur la nouvelle équation. Pour Clebsch :

> Il est très important [...] que les éléments *caractéristiques* impliqués dans la transformation *supérieure* apparaissent séparément de l'influence que peut encore exercer une transformation *linéaire* ultérieure ; et cette propriété donne à la transformation en question ainsi qu'à sa signification géométrique toute leur valeur [11]. [Clebsch 1871b, p. 287]

Dans la suite du mémoire [12], Clebsch s'attache à trouver des substitutions quadratiques pouvant transformer une équation donnée en une équation pour laquelle certains invariants sont nuls. Pour pouvoir suivre sa démarche, je propose d'abord un paragraphe de rappels sur les formes et invariants, inspiré de deux livres, [Clebsch 1872a ; Clebsch 1876]. Le premier est le livre de Clebsch consacré à la théorie des formes binaires, *Theorie der binären algebraischen Formen* ; le second, édité de façon posthume par Ferdinand Lindemann, est intitulé *Vorlesungen über Geometrie*, comprenant entre autres de longs développements sur la théorie des invariants.

---

10. Dans l'article de Clebsch, on lit $\xi' = \dfrac{\alpha + \beta\xi}{\gamma + \delta\xi}$, ce qui me semble erroné.

11. « Es ist von grosser Wichtigkeit, dass hierdurch die in der *höhern* Transformation liegenden *eigenthümlichen* Elemente gesondert erscheinen von dem Einfluss, welchen eine nachträgliche *lineare* noch ausüben kann; und diese Eigenschaft giebt der vorliegenden Transformation und ihrer geometrischen Deutung vorzugsweise ihren Werth. »

12. Clebsch donne aussi, au début du mémoire, une interprétation analogue des transformation cubiques

$$\xi = \frac{y_1 + \lambda y_2 + \lambda^2 y_3 + \lambda^3 y_4}{x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3 + \lambda^3 x_4}$$

en termes de points x, y de l'espace. Cette interprétation n'est plus du tout évoquée dans la suite de ses recherches, et j'en passerai donc les détails sous silence.

Formes et invariants : rappels

On se donne une forme binaire $f(x_1, x_2)$ de degré n, c'est-à-dire un polynôme homogène de degré n. Une telle forme peut toujours s'écrire de la façon suivante :

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{2} a_1 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n.$$

Si on opère une transformation linéaire inversible changeant x_1, x_2 en ξ_1, ξ_2, alors on peut toujours écrire $f(x_1, x_2) = f'(\xi_1, \xi_2)$, où les coefficients a_i' de f' sont des fonctions des a_i et des coefficients de la transformation linéaire. Un *invariant* de f est une expression polynomiale homogène $I(a_1, \ldots, a_n)$ telle que pour toute transformation linéaire, on a

$$I(a_1', \ldots, a_n') = r^k I(a_1, \ldots, a_n),$$

où r est le déterminant de la transformation linéaire appliquée et k un entier ne dépendant que de celle-ci. Le degré de l'invariant I est son degré en tant que polynôme.

Par exemple, regardons la forme quadratique $f(x_1, x_2) = a_0 x_0^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$. L'action de la transformation linéaire

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 \\ x_2 = \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 \end{cases}$$

permet d'écrire $f(x_1, x_2) = a_0'\xi_1^2 + 2a_1'\xi_1\xi_2 + a_2'\xi_2^2$ avec $a_0' = a_0\alpha_{11}^2 + 2a_1\alpha_{12}\alpha_{21} + a_2\alpha_{22}^2$, etc. Le discriminant Δ de f, défini par $\Delta = a_0 a_2 - a_1^2$ est un invariant de degré 2 de f car, comme on peut le vérifier par le calcul, on a

$$a_0' a_2' - {a_1'}^2 = r^2(a_0 a_2 - a_1^2).$$

Passons à la notation symbolique des formes et des invariants, que Aronhold avait introduite dès 1849 et que Clebsch avait ensuite adoptée et exploitée à partir de la fin des années 1850 [13]. Pour une forme binaire $f(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots$, la notation symbolique consiste à poser $f = (b_1 x_1 + b_2 x_2)^n$, ou même $f = b_x^n$, et à stipuler que dans le développement du binôme $(b_1 x_1 + b_2 x_2)^n$, il faut remplacer formellement chacun des termes $b_1^n, b_1^{n-1} b_2, \ldots, b_2^n$ par $a_0, a_1, \ldots, a_n$ respectivement. L'usage de la lettre b étant purement formel, il est possible de la remplacer par n'importe quelle autre. On peut donc par exemple écrire $f = b_x^n = c_x^n$, les mêmes règles de substitutions étant valables pour les coefficients c. Ceci étant dit, notons $(bc) = b_1 c_2 - b_2 c_1$; c'est un déterminant symbolique

13. Pour des éléments d'une histoire de la théorie des invariants (comprenant cette notation symbolique), voir [Fisher 1966 ; Parshall 1989]. Par ailleurs, on trouvera une présentation et une justification actuelle de la notation symbolique et des calculs qui en découlent dans [Kung & Rota 1984].

associé à f. L'élévation à la puissance n de cette expression donne

$$(bc)^n = b_1^n \cdot c_2^n - nb_1^{n-1}b_2 \cdot c_1 c_2^{n-1} + \cdots + (-1)^n b_2^n \cdot c_1^n,$$

et l'on pourra remplacer chacun des symboles formels $b_1^{n-k}b_2^k$ et $c_1^{n-k}c_2^k$ par a_k.

Pour fixer les idées, regardons l'exemple $n = 2$ en prenant comme précédemment une forme quadratique $f(x_1, x_2) = a_0 x_0^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$ notée symboliquement $f = b_x^2 = c_x^2$. Les règles de substitution symbolique sont :

$$\begin{cases} b_1^2 = a_0 \\ b_1 b_2 = a_1 \\ b_2^2 = a_2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} c_1^2 = a_0 \\ c_1 c_2 = a_1 \\ c_2^2 = a_2. \end{cases}$$

Appliquons ces règles de substitutions symboliques dans l'expression développée de $(bc)^2$:

$$(bc)^2 = b_1^2 c_2^2 - 2b_1 b_2 c_1 c_2 + b_2^2 c_1^2 = a_0 a_2 - 2a_1 a_1 + a_2 a_0$$

Il est important de remarquer qu'on ne peut remplacer que ce qui est remplaçable : par exemple, b_1 seul n'apparaît pas dans les règles de substitutions, et ne peut donc être remplacé en tant que tel — on ne sait remplacer que b_1^2 ou $b_1 b_2$. En tout cas, cet exemple montre que le discriminant de la forme quadratique f est une fonction rationnelle d'expressions symboliques (bc), puisque l'on a $\Delta = (bc)^2/2$.

En fait, dans un article de 1861, [Clebsch 1861], Clebsch avait démontré que tout invariant d'une forme binaire (de degré quelconque) se représente symboliquement comme une combinaison linéaire de produits de déterminants symboliques (bc). Autrement dit, tout invariant I d'une forme binaire $f = b_x^n = c_x^n$ s'écrit

$$I = \sum C \prod (bc),$$

où les C sont des constantes.

Enfin, rappelons l'interprétation géométrique des formes binaires que Clebsch utilisait. Une telle forme $f(x_1, x_2)$ permet de définir n rapports x_1/x_2 par la relation $f(x_1, x_2) = 0$. Ces rapports peuvent alors être vus comme autant de points sur une droite projective, de coordonnées $(x_1 : x_2)$ — Clebsch parlait de *séries de points*. Réciproquement, n points sur une droite projective permettent de définir une forme binaire de degré n, et l'on peut dès lors parler des invariants d'une série de points sur une droite.

Pour finir, ajoutons que les règles du calcul symbolique existent aussi pour les formes ternaires, c'est-à-dire les formes dépendant de trois variables. Une telle forme est ainsi notée symboliquement $f = (b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3)^n$, ou encore $f = b_z^3 = c_z^3$. Il y a encore des déterminants symboliques (bcu) définis par

$$(bcu) = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & u_1 \\ b_2 & c_2 & u_2 \\ b_3 & c_3 & u_3 \end{vmatrix},$$

les règles de substitutions symboliques étant obtenues exactement comme pour les formes binaires.

Annulation d'invariants

Revenons à notre mémoire de Clebsch sur l'interprétation géométrique de la quintique, [Clebsch 1871b]. Comme expliqué précédemment, étant donnée une équation notée $f(\lambda) = 0$, on peut lui associer une forme binaire $f(x_1, x_2)$ en l'homogénéisant, c'est-à-dire en remplaçant l'inconnue λ par x_1/x_2 et en multipliant le tout par x_2^n. De cette façon, on peut parler des invariants de $f(\lambda) = 0$, qui sont les invariants de $f(x_1, x_2)$. Un point important pour notre propos est que ces invariances renvoient à des transformations linéaires. Par conséquent, si une substitution quadratique est opérée sur une équation, ses invariants peuvent être modifiés. Dans le mémoire que nous étudions ici, Clebsch veut justement faire en sorte à ce que les équations transformées par substitutions quadratiques aient certains invariants qui s'annulent.

En fait, cette idée de chercher à transformer des équations de sorte à annuler des invariants avait déjà été mise en avant par Hermite quelques années auparavant, pour les équations du quatrième et du cinquième degré [14]. En particulier pour le cinquième degré, à la suite de ses travaux et de ceux de Kronecker (et Brioschi) à ce sujet, il avait élaboré un grand mémoire récapitulatif dans lequel il avait cherché à unifier les différentes approches de la quintique par le biais de la théorie des invariants, [Hermite 1865-66].

Le théorème sur lequel Clebsch s'appuie est le suivant :

> Toutes les droites qui coupent un n-latère donné [et provenant d'une équation algébrique,] de sorte que pour le système de points d'intersection, un certain invariant $[J]$ de degré χ s'annule enveloppent une courbe $(J = 0)$ de classe $\chi n/2$. [...] La courbe $J = 0$ a les côtés du n-latère comme tangentes χ-uples [15]. [Clebsch 1871b, p. 291]

Je ne transcrirai pas la démonstration de ce théorème, mais des explications sur l'énoncé lui-même seront utiles pour bien comprendre la suite.

D'abord, rappelons qu'on peut parler des coordonnées (homogènes) d'une droite du plan : ce sont les coefficients u_1, u_2, u_3, définis à coefficient de proportionnalité commun

14. [Goldstein 2011a, p. 248-249].

15. « Alle Geraden, welche ein gegebenes n-Seit so schneiden, dass für das Schnittpunktsystem eine gewisse Invariante χ^{ten} Grades verschwindet, umhüllen eine Curve $(J = 0)$ der Classe $\chi n/2$. [...] Die Curve $J = 0$ hat die Seiten des n-Seits zu χfachen [sic] Tangenten. »

près, apparaissant dans une équation $u_1z_1+u_2z_2+u_3z_3=0$ de cette droite. Les courbes du plan peuvent alors être décrites par ces coordonnées dites *tangentielles*, au lieu des coordonnées *ponctuelles* z_1, z_2, z_3. Par exemple, définir une courbe par l'équation $u_1^2+u_2u_3=0$ signifie la définir comme l'enveloppe des droites dont les coordonnées vérifient cette équation. Autrement dit, une droite du plan est tangente à la courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation. Cette dernière est alors appelée *équation tangentielle* et son degré est la *classe* de la courbe.

J'en viens maintenant au théorème de Clebsch. Soit $f=a_x^n=b_x^n$ la forme symbolique de la forme binaire associée à l'équation algébrique donnée. Comme on l'a vu, cette équation définit un n-latère dont les côtés ont pour équations respectives $z_1+\lambda_i z_2+\lambda_i^2 z_3=0$, les λ_i étant les racines de l'équation donnée. Le produit des membres de gauche de ces équations donne une forme ternaire en z_1, z_2, z_3, de degré n, notée symboliquement $f=a_z^n=b_z^n$. Remarquons que Clebsch fait double emploi de la lettre f, qui est utilisée une fois pour désigner une forme binaire, et l'autre fois pour une forme ternaire — dans la suite, je préciserai à chaque fois de quel cas il s'agit.

On se donne maintenant une droite de coordonnées u_1, u_2, u_3 et on considère le système de ses n points d'intersection avec le n-latère. Les invariants de ce système de points sont alors tous donnés par les formules [16]

$$J=\sum C\prod(abu).$$

On peut ainsi voir J comme une expression polynomiale en u_1, u_2, u_3, de sorte que l'équation $J=0$ s'interprète comme l'équation tangentielle d'une certaine courbe.

Le théorème de Clebsch cité plus haut dit que dans l'interprétation géométrique, les substitutions quadratiques faisant s'annuler un invariant J de l'équation de départ correspondent aux droites du plan qui vérifient l'équation tangentielle $J=0$, étant entendu que dans cette dernière, on est passé aux « formations ternaires » en u, comme expliqué à l'instant.

Voyons, en suivant Clebsch, l'exemple de l'équation du quatrième degré pour clarifier tout cela.

5.1.2 Un exemple : l'équation du quatrième degré

Pour mettre les choses en perspective, renversons l'ordre adopté par Clebsch et rappelons pour commencer quelques résultats qui avaient été obtenus par Hermite sur l'équation du quatrième degré dans des travaux de 1858, [Hermite 1858b] [17].

16. Ce résultat avait été montré par Clebsch dans [Clebsch 1861].
17. Ces travaux sont discutés dans [Goldstein 2011a, p. 249].

Hermite avait remarqué que toutes les équations de la forme

$$x^4 - 6Sx^2 - 8Tx - 3S^2 = 0 \tag{5.1}$$

pouvaient se résoudre à l'aide de l'équation modulaire associée à la transformation d'ordre 3 des fonctions elliptiques. La question était alors de pouvoir ramener toute équation du quatrième degré sous cette forme. Hermite avait procédé en deux étapes. La première était de montrer qu'une équation $ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$ dont l'invariant quadratique $i = ae - 4bc + 3c^2$ est nul peut se ramener à la forme (5.1). Hermite avait vu que cela peut être fait par simple translation de la variable. La seconde étape était de montrer que toute équation de degré 4 peut être transformée en une équation ayant un invariant i nul. Pour cela, Hermite avait trouvé une transformation supérieure de la variable de la forme $y = \varphi(x)$ — remarquons que cette transformation supérieure était polynomiale et pas rationnelle comme celles considérées ici par Clebsch [18]. En outre, Hermite avait pris soin de montrer que les coefficients de la transformation $y = \varphi(x)$ permettant d'annuler i n'impliquaient que l'adjonction de racines carrées [19].

Voyons à présent ce que Clebsch propose pour l'équation de degré 4. Cette dernière, ou plutôt la forme binaire associée, est notée symboliquement $f = a_x^4 = b_x^4$, et son invariant quadratique est alors, toujours en notation symbolique, $i = (ab)^4$. Comme expliqué précédemment, l'équation donne lieu à un quadrilatère dans le plan, et Clebsch indique qu'à changement de coordonnées du plan près, les côtés de ce quadrilatère peuvent être représentés par les équations [20]

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 0 \\ -z_1 + z_2 + z_3 &= 0 \\ z_1 - z_2 + z_3 &= 0 \\ z_1 + z_2 - z_3 &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, le produit des quatre membres de gauche donnant la forme ternaire f représentant le quadrilatère est

$$f = z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 - 2z_1^2z_2^2 - 2z_2^2z_3^2 - 2z_3^2z_1^2.$$

18. L'usage par Clebsch de transformations rationnelles peut être vu comme une trace de son approche géométrique, alors que l'utilisation de transformations polynomiales par Hermite renvoie plutôt à une approche algébrique.

19. Cette attention sur les adjonctions de racines carrées renvoie à l'incorporation d'éléments provenant des travaux de Galois dans ceux d'Hermite. [Goldstein 2011a, p. 250]

20. Rappelons que choisir un repère projectif du plan revient à choisir un triangle de référence dont les côtés deviennent chacun les axes d'annulation d'une des coordonnées. Pour ramener les équations d'un quadrilatère sous la forme annoncée par Clebsch, il suffit de choisir pour triangle de référence le triangle formée des trois diagonales du quadrilatère (un quadrilatère est un ensemble de quatre droites, qui se coupent donc en six points et définissent ainsi trois diagonales).

En la notant symboliquement $f = a_z^4 = b_z^4$, le théorème d'interprétation géométrique de Clebsch dit que trouver une substitution annulant l'invariant i revient à trouver une tangente à la courbe d'équation tangentielle $i = (abu)^4 = 0$. Dans son mémoire, Clebsch annonce que l'invariant i est donné par

$$i = \frac{8}{3}(u_1^4 + u_2^4 + u_3^4 - u_1^2u_2^2 - u_2^2u_3^2 - u_3^2u_1^2).$$

Pour voir cela, il s'agit d'expliciter l'expression $(abu)^4$; trouvons donc d'abord les règles de substitutions de la notation symbolique. Puisque

$$f = a_z^4 = z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 - 2z_1^2z_2^2 - 2z_2^2z_3^2 - 2z_3^2z_1^2,$$

on développe la puissance $f = (a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3)^4$:

$$\begin{aligned}(a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3)^4 = {} & a_1^4z_1^4 + a_2^4z_2^4 + a_3^4z_3^4 + \\ & +4a_1^3a_2z_1^3z_2 + 4a_1^3a_3z_1^3z_3 + 4a_1a_2^3z_1z_2^3 + 4a_2^3a_3z_2^3z_3 + 4a_1a_3^3z_1z_3^3 + 4a_2a_3^3z_2z_3^3 + \\ & + 6a_1^2a_2^2z_1^2z_2^2 + 6a_2^2a_3^2z_2^2z_3^2 + 6a_3^2a_1^2z_3^2z_1^2 + \\ & + 12a_1^2a_2a_3z_1^2z_2z_3 + 12a_1a_2^2a_3z_1z_2^2z_3 + 12a_1a_2a_3^2z_1z_2z_3^2.\end{aligned}$$

En comparant avec la forme de f, on obtient les règles de substitutions suivantes :

$$\begin{aligned}& a_1^4 = a_2^4 = a_3^4 = 1 \\ & a_1^3a_2 = a_1^3a_3 = a_1a_2^3 = a_2^3a_3 = a_1a_3^3 = a_2a_3^3 = 0 \\ & a_1^2a_2^2 = a_2^2a_3^2 = a_1^2a_3^2 = -1/3 \\ & a_1^2a_2a_3 = a_1a_2^2a_3 = a_1a_2a_3^2 = 0.\end{aligned}$$

En outre, comme je l'ai expliqué *supra*, des règles identiques s'obtiennent en remplaçant d'un coup toutes les lettres a par des lettres b.

Passons maintenant au déterminant symbolique (abu). Par définition de celui-ci, on a :

$$(abu)^4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & u_1 \\ a_2 & b_2 & u_2 \\ a_3 & b_3 & u_3 \end{vmatrix}^4 = \big((a_1b_2 - a_2b_1)u_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)u_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)u_3\big)^4.$$

Les règles du calcul symbolique disent qu'il faut d'abord développer entièrement cette puissance quatrième avant de faire les substitutions données par les règles d'identification précédentes. Par exemple, dans l'expression de $(abu)^4$, le terme en u_1^4 est

$$a_1^4b_2^4 - 4a_1^3a_2b_1b_2^3 + 6a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2 - 4a_1a_2^3b_1^3b_2 + a_2^4b_1^4,$$

qui est égal, d'après les règles de substitutions, à

$$1 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot (-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}) - 4 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = \frac{8}{3}.$$

En faisant de même pour les coefficients de $u_1^3 u_2$, $u_1^2 u_2^2$, etc., on trouve bien le résultat qui était donné par Clebsch :

$$i = \frac{8}{3}(u_1^4 + u_2^4 + u_3^4 - u_1^2 u_2^2 - u_2^2 u_3^2 - u_3^2 u_1^2).$$

Clebsch remarque ensuite que cette expression se factorise :

$$i = \frac{8}{3}(u_1^2 + \varepsilon u_2^2 + \varepsilon^2 u_3^2)(u_1^2 + \varepsilon^2 u_2^2 + \varepsilon u_3^2),$$

où ε est une racine cubique de l'unité. Cette factorisation montre que la courbe $i = 0$ est formée des deux coniques [21] d'équations tangentielles respectives $u_1^2 + \varepsilon u_2^2 + \varepsilon^2 u_3^2 = 0$ et $u_1^2 + \varepsilon^2 u_2^2 + \varepsilon u_3^2 = 0$. Clebsch conclut alors :

> Avec cela, on peut assortir d'un apparat géométrique la résolution de l'équation de degré 4, telle Hermite [l'a] [22] donnée, [Hermite 1858b]. Cette résolution repose sur le fait qu'on peut changer, par une transformation supérieure, l'équation biquadratique en une autre pour laquelle i [...] disparaît [...]. En effet, on n'a besoin que de prendre le quadrilatère $f = 0$ associé à l'équation d'ordre 4 et de construire [la courbe $i = 0$. Cette] équation se sépare par ce qui précède en 2 coniques, ce qui se fait à l'aide d'une équation quadratique ; chaque tangente d'une telle conique donne alors une équation biquadratique pour laquelle $i = 0$, et qui est donc résolue par une équation cubique *pure* [23]. [Clebsch 1871b, p. 296]

On remarquera que pour Clebsch, il n'y a absolument aucun souci d'effectivité : trouver explicitement la substitution quadratique permettant d'annuler i est un point qui n'est évoqué à aucun moment. Cet aspect l'oppose ainsi à Hermite qui cherchait toujours des procédures effectives et concrètes. Par ailleurs, noter que l'« apparat géométrique » de Clebsch consiste à interpréter en termes de droites et de courbes les coefficients de sa transformation quadratique et les invariants à annuler. Il ne s'agit donc pas par exemple d'interpréter géométriquement la transformation $y = \varphi(x)$ que Hermite avait utilisée dans

21. Les courbes de classe 2 coïncident avec les courbe d'ordre 2, c'est-à-dire les coniques.

22. Dans cette citation, outre les travaux de Hermite, Clebsch mentionne ceux de Gordan, [Gordan 1870]. Ce dernier avait de son côté étudié l'annulation d'un autre invariant de l'équation du quatrième degré.

23. « Man kann hieran in geometrischem Gewande die Lösung der Gleichung 4^{ten} Grades knüpfen, wie Hermite (Comptes Rendus t. 46. p. 961) und Gordan (Borchardt's Journal Bd. 71, p. 164) dieselbe gegeben haben. Diese Lösung beruht darauf, dass man die biquadratische Gleichung durch eine höhere Transformation in eine solche verwandelt, für welche i [...] verschwindet [...]. In der That braucht man nur das zu der Gleichung 4^{ter} Ordnung gehörige Vierseit $f = 0$ zu nehmen, und [die Curve i=0 zu bilden. Diese] Gleichung zerfällt nach dem Obigen in 2 Kegelschnitte, eine Zerlegung, welche mit Hülfe einer quadratischen Gleichung ausgeführt wird; jede Tangente eines solchen Kegelschnittes liefert dann eine biquadratische Gleichung, für welche $i = 0$ und welche also durch eine *reine* cubische Gleichung gelöst wird. »

ses travaux de 1858. Pour Clebsch, l'apport de Hermite réside plutôt dans le fait d'avoir « résolu » l'équation du quatrième degré en montrant qu'il était possible d'annuler son invariant i (ce qui permet ensuite de la résoudre *via* les fonctions elliptiques).

En revanche, et on le reverra dans la suite, il est essentiel à Clebsch de contrôler les irrationalités impliquées dans son interprétation géométrique : ces irrationalités doivent être en accord avec les méthodes qu'il interprète. Dans le cas présent, comme la courbe $i = 0$ se compose de deux coniques, l'interprétation géométrique ne fait intervenir que des racines carrées (correspondant à la racine cubique de l'unité ε) ; trouver ensuite une tangente à l'une de ces coniques n'introduit pas d'irrationalité supplémentaire [24]. Il n'y a donc que des racines carrées qui sont introduites, comme c'était le cas dans la démarche de Hermite.

5.1.3 L'équation du cinquième degré

Après l'exemple du quadrilatère, Clebsch en arrive à l'équation du cinquième degré. Comme je l'ai évoqué en début de section, Clebsch va surtout se référer aux recherches de Hermite et de Kronecker sur le sujet. Rappelons-en ici les grandes lignes, ce qui permettra par la suite de comparer avec ce que Clebsch propose [25].

Comme j'ai déjà pu le décrire dans cette thèse, le résultat sur lequel se basait l'approche de Hermite était la possibilité d'abaisser d'un degré l'équation modulaire (de degré 6) associée à la transformation d'ordre 5 des fonctions elliptiques. Cette équation provenait de la théorie de la transformation des fonctions elliptiques, consistant à chercher y, ℓ et M en fonction de x et k, de sorte que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-\ell^2y^2)}} = \frac{1}{M}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Lorsque y est cherché sous la forme $y = U(x)/V(x)$ avec U, V premiers entre eux de degrés respectifs n et $n-1$, il s'agit de la transformation d'ordre n. Dans ce cas, ℓ est lié à k par une équation de degré $n+1$ appelée *équation modulaire* ; M est aussi lié à k par une équation de degré $n+1$, appelée *équation du multiplicateur*. Le résultat que Galois avait annoncé en 1832 était que lorsque n valait 5, 7 ou 11, l'équation modulaire possédait une réduite de degré $n-1$.

Ce résultat, qui avait été énoncé sans démonstration, avait été prouvé par Betti en 1853 par des considérations de décompositions du groupe de l'équation modulaire. Dans le cas $n = 5$ qui nous intéresse, ce groupe est (en termes actuels) $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_5)$, qui se réduit à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_5)$ par adjonction d'une racine carrée. L'abaissement de l'équation modulaire

24. En termes modernes, si une conique est donnée par l'annulation d'une forme quadratique, ses tangentes sont obtenues grâce à la forme bilinéaire associée, déduite de la forme quadratique par la règle de dédoublement des termes. Toutes ces considérations n'apparaissent que de façon floue chez Clebsch.

25. Je me base sur [Goldstein 2011a] pour ce qui est de Hermite, sur [Petri & Schappacher 2004] pour Kronecker. Voir aussi [Gray 2000 ; Houzel 2002], où d'autres approches, comme celle de Brioschi, sont décrites.

vu par Galois correspond alors à l'existence d'un sous-groupe (non distingué) d'indice 5 de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_5)$.

Hermite connaissait ces résultats et n'en s'était pas contenté, cherchant explicitement la forme de la réduite de degré 5 correspondant au sous-groupe d'indice 5 — les résultats avaient été publiés en 1858, [Hermite 1858a]. Pour cela, il avait trouvé une fonction des racines de l'équation modulaire qui ne prend que 5 valeurs différentes sous l'action du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_5)$. Ces valeurs $z_1, \ldots, z_5$ étaient de la forme $z_i = \Phi(\omega + 16i)$, où ω est le quotient des périodes des fonctions elliptiques et Φ une fonction, dont la forme était connue explicitement, dépendant de quantités fixes liées à ces mêmes fonctions. Un point important était que ces formules donnaient lieu à certains développements en série. Hermite en avait déduit que les z_i étaient les racines de l'équation

$$\Phi^5 - \alpha\Phi - \beta = 0, \tag{5.2}$$

où α, β sont des quantités dépendant explicitement de quantités liées aux fonctions elliptiques. Cette équation de degré 5 est donc l'équation réduite de l'équation modulaire.

Le lien avec l'équation générale du cinquième degré provenait alors de la forme dite de Jerrard [26]. Le mathématicien George Birch Jerrard avait en effet démontré que l'équation quintique pouvait toujours se ramener à la forme

$$y^5 - y - A = 0. \tag{5.3}$$

Cela était fait en utilisant une transformation de Tschirnhaus $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$, dont les coefficients ne faisaient intervenir que des racines carrées et cubiques des coefficients de la quintique. Pour résoudre l'équation du cinquième degré, Hermite avait alors identifié [27] les formes 5.2 et 5.3, et ainsi explicitement exprimé les racines y de la seconde en fonction des racines z_i de la première. L'équation du cinquième degré était par conséquent résolue à l'aide des fonctions elliptiques.

D'autres recherches de Hermite avaient consisté à caractériser des propriétés de l'équation du cinquième degré par la théorie des invariants : il s'agissait de trouver des invariants et covariants [28] dont les annulations respectives donnaient des informations quant à la réalité ou la multiplicité des racines par exemple. Des travaux analogues avaient été développés

26. On trouve aussi parfois « forme de Bring-Jerrard », ou, comme c'est ici le cas pour Clebsch, « forme de Tschirnhaus-Jerrard ». Voir [Beauville 2012] pour un point de vue actuel, en lien avec la *dimension essentielle* du groupe $\mathfrak{S}_5$.

27. Il est aisé de ramener l'équation $\Phi^5 - \alpha\Phi - \beta = 0$ sous la forme $\Psi^5 - \Psi - \alpha^{-5/4}\beta = 0$, en posant $\Phi = \alpha^{1/4}\Psi$. La forme de Jerrard $y^5 - y - A = 0$ étant donnée, le point technique suivant consiste à trouver des fonctions elliptiques donnant lieu à des constantes α, β vérifiant $A = \alpha^{-5/4}\beta$. Hermite prouve que cela peut être fait grâce à une équation de degré 4 à coefficients dans $\mathbf{Q}[\sqrt{5}]$.

28. Un covariant d'une forme binaire $f(x_1, x_2)$ est une expression $K(a_0, \ldots, a_n, x_1, x_2)$ polynomiale en les coefficients de f et en les variables x_1, x_2 telle que pour toute substitution linéaire inversible opérée sur x_1, x_2, on a $K(a'_0, \ldots, a'_n, \xi'_1, \xi'_2) = K(a_0, \ldots, a_n, x_1, x_2)$, les notations étant celles données précédemment. En particulier, on parle de covariant linéaire lorsqu'il fait intervenir linéairement les variables x_0, x_1.

au sujet de l'équation du quatrième degré : ce sont ceux que j'ai présentés précédemment.

Passons maintenant aux recherches de Kronecker ; ce dernier en avait fait part à Hermite dans une lettre de 1858, dont un extrait avait ensuite été publié, [Kronecker 1858b]. Au contraire de Hermite, celui-ci ne s'était pas basé sur l'équation modulaire, mais sur l'équation du multiplicateur provenant de la transformation d'ordre 5 des fonctions elliptiques. Une autre différence était que Kronecker n'utilisait pas la forme de Jerrard de l'équation du cinquième degré.

Le point de départ de Kronecker était de considérer une certaine fonction cyclique

$$f(\nu, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$$

des racines $x_0, \ldots, x_4$ de la quintique, ν étant un certain paramètre. En termes actuels, cela signifie que f est invariante par un sous-groupe cyclique du groupe (réduit) de la quintique $\mathfrak{A}_5$. À partir de f, Kronecker avait exhibé cinq autres fonctions $f_1, \ldots, f_5$ également cycliques ; les six fonctions $f, f_1, \ldots, f_5$ correspondent ainsi aux six sous-groupes cycliques d'ordre 5 de $\mathfrak{A}_5$. Comme ces fonctions sont cycliques, la résolution de l'équation de degré 6 dont elles dépendent ramène la quintique sous forme d'une équation pure, c'est-à-dire de la forme $x^5 = A$, qui est alors résoluble par radicaux. Autrement dit, une fois que f est connue, les x_i s'en déduisent par radicaux.

L'équation dont dépendent $f, f_0, \ldots, f_4$ est celle que Kronecker avait mis en lien avec la théorie des fonctions elliptiques. En effet, Kronecker avait indiqué qu'il est possible de trouver (par radicaux carrés) le paramètre ν entrant dans la définition de f de sorte qu'on ait

$$f^2 + f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 = 0.$$

Grâce à cette condition, Kronecker avait alors calculé explicitement la forme de l'équation dont dépendent les fonctions cycliques. Il avait ainsi montré que les six fonctions vérifient l'équation

$$f^{12} - 10\phi f^6 + 5\psi^2 = \psi f^2,$$

où ϕ et ψ sont des fonctions rationnelles en les coefficients de l'équation du cinquième degré, et en certaines racines carrées. L'équation en f était alors mise en correspondance avec l'équation du multiplicateur, et Kronecker avait donné en conséquence des expressions de $f, f_0, \ldots, f_4$ à l'aide des fonctions elliptiques.

Comme je l'ai écrit un peu plus haut, face aux travaux de Kronecker, Hermite avait cherché un point de vue unificateur entre leurs méthodes. Ce point de vue lui avait été offert par l'annulation d'invariants de l'équation du cinquième degré, [Hermite 1865-66].

Forme de Jerrard et invariant C

Revenons maintenant aux travaux de Clebsch. Ce dernier commence par donner toute une liste d'invariants et de covariants de l'équation du cinquième degré, en renvoyant à des recherches de lui-même et de Gordan, [Clebsch & Gordan 1867]. Parmi eux, le plus important pour la suite est un invariant de degré 12, noté C. D'autres invariants A, B et des covariants α, δ apparaîtront également, de façon plus auxiliaire [29].

Clebsch rappelle ainsi que si l'invariant C est nul, alors l'équation du cinquième degré peut se mettre sous la forme de Jerrard par une substitution linéaire — comme il le précise lui-même, ce résultat avait été publié peu auparavant, [Clebsch 1871a]. Clebsch avait ainsi montré que lorsque l'invariant C d'une équation du cinquième degré était nul, on devait considérer la substitution linéaire

$$x = \frac{\delta - B\alpha}{\delta + \frac{B}{2}\alpha},$$

où x est la nouvelle inconnue, l'ancienne étant présente dans les variables des covariants α et δ. Il avait en effet vu que l'application de cette substitution linéaire à l'équation du cinquième degré lui donnait la forme

$$x^5 - \frac{B}{4A^2}(5x+1) = 0,$$

qui est « presque » une forme de Jerrard.

S'appuyant sur ces résultats antérieurs, Clebsch résume le problème :

> Il est connu que la résolution de Hermite des équations du cinquième degré repose sur une résolution de l'équation [sous forme de Jerrard] à l'aide des fonctions elliptiques. Vu ce qui précède, dès que l'invariant C d'une équation du cinquième degré s'annule, l'équation se ramène à cette forme et est donc résolue au sens hermitien. Mais si pour l'équation donnée, C n'est pas nul, alors on peut formuler le problème de résoudre l'équation du cinquième degré de la façon suivante : *ramener, au moyen d'une transformation supérieure, l'équation à une autre pour laquelle C s'annule.* Mais dans notre interprétation géométrique, cela n'est rien d'autre que de *devoir trouver n'importe quelle tangente à la courbe $C = 0$* [30]. [Clebsch 1871b, p. 318]

Clebsch précise encore qu'une telle tangente doit être trouvée par radicaux carrés ou cu-

29. Ces invariants et covariants sont également listés dans [Hermite 1865-66]. Une différence avec Hermite est que Clebsch donne tous les invariants et covariants sous forme symbolique. Par exemple, si l'équation du cinquième degré est notée $f = a_z^5 = b_z^5$, il définit d'abord un covariant $i = (ab)^4 a_z b_z$. L'invariant A par exemple est alors défini par la relation symbolique $A = (ii')^2$.

30. « Bekanntlich beruht Hermite's Auflösung der Gleichungen 5^{ten} Grades auf einer Lösung der Gleichung (14) mit Hülfe der elliptischen Functionen. Sobald die Invariante C einer Gleichung 5^{ten} Grades verschwindet, ist durch das Vorige die Züruckführung der Gleichung auf diese Form, also ihre Lösung im Hermite'schen Sinne, gegeben. Ist bei der gegebenen Gleichung aber C von Null verschieden, so kann man die Aufgabe, die Gleichung 5^{ten} Grades zu lösen, darin setzen: *dass mittelst einer höheren Transformation die Gleichung in eine solche mit verschwindendem C verwandelt werden soll.* Aber in unserer geometrischen Interpretation heisst dies nichts anderes, *als dass irgend eine Tangente der Curve $C = 0$ gefunden werden soll.* »

biques, puisque l'utilisation d'une transformation de Tschirnhaus ramenant une équation du cinquième degré à une forme de Jerrard implique ce type de radicaux uniquement.

Avec Clebsch, remarquons en outre qu'une fois la tangente trouvée, le choix de bons points-base sur celle-ci aura pour effet d'induire la transformation linéaire

$$x = \frac{\delta - B\alpha}{\delta + \frac{B}{2}\alpha},$$

et donc de ramener effectivement l'équation de départ sous la forme $x^5 - \dfrac{B}{4A^2}(5x+1) = 0$.

La courbe $C = 0$

Dans ce paragraphe, je ne vais qu'énoncer les résultats sur la courbe $C = 0$ qui seront utiles pour la suite. Ce faisant, je contracte en quelques lignes de très longs développements du mémoire de Clebsch et ne sélectionne qu'une poignée de propriétés parmi bien d'autres. Je laisse ainsi de côté des résultats intermédiaires servant à démontrer ces propriétés, mais également des résultats que Clebsch n'utilise pas pour son interprétation géométrique de la quintique.

Clebsch détermine ainsi le genre de la courbe $C = 0$. Je rappelle que le *genre* d'une courbe algébrique complexe est un nombre dépendant de son degré et de ses singularités s'il en existe. Plus précisément, le genre d'une courbe lisse de degré n est donné par

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

et lorsque la courbe est singulière, il faut retrancher au membre de droite de cette formule des nombres correspondant aux singularités. On attribue généralement à Clebsch la dénomination *Geschlecht*, traduit en français par « genre » ; elle avait été proposée dans ses travaux du début des années 1860, dans lesquels il avait proposé une façon d'appliquer les fonctions abéliennes à la géométrie [31].

Dans le cas présent de la courbe $C = 0$, Clebsch utilise une version duale de la formule donnant le genre, basée non pas sur le degré mais sur la classe de la courbe. D'une part, comme l'invariant C est de degré 12, le théorème d'interprétation géométrique de Clebsch dit que la courbe $C = 0$ est de classe $5 \cdot 12/2 = 30$. D'autre part, Clebsch montre que cette courbe possède 12 tangentes d'inflexion doubles, c'est-à-dire 12 droites tangentes à la courbe en deux points d'inflexion distincts. À partir de la connaissance de la classe de $C = 0$ et du nombre de tangentes d'inflexion doubles, Clebsch calcule le genre p de la

31. Voir [Dieudonné 1974; Gray 1989; Houzel 2002]. Un des grands mémoires dans lesquels fonctions abéliennes et géométrie sont liées est « Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie », [Clebsch 1864a], que nous avons rencontré lors de l'étude du *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Jordan. Rappelons par ailleurs qu'il existait aussi une notion de genre provenant de la théorie des formes algébriques telle qu'exposée dans les *Disquisitiones Arithematicae*. Voir [Lemmermeyer 2007].

courbe, et trouve $p = 4$. Il s'agit là d'un résultat important pour la suite de l'interprétation géométrique.

Première interprétation géométrique

Je rappelle que l'interprétation géométrique de Clebsch de la substitution quadratique l'avait conduit à savoir trouver une tangente à $C = 0$, en n'introduisant que des radicaux carrés et cubiques. Pour cela, il va transformer successivement cette courbe par transformations birationnelles, c'est-à-dire par applications bijectives définies presque partout et qui transforment les coordonnées des points de façon rationnelle.

Un argument essentiel pour Clebsch est l'utilisation de la représentation d'une surface cubique sur un plan. Nous avons déjà rencontré ces représentations lors de l'étude du *Traité des substitutions et des équations algébriques* au chapitre 2. Dans un article de 1865, Clebsch avait montré que toute surface cubique peut se représenter sur un plan, c'est-à-dire que pour toute surface cubique, il existe une application birationnelle entre elle et le plan projectif. Les points du plans en lesquels l'application birationnelle n'est pas définie de façon univoque étaient appelés les *points fondamentaux* ; il s'agissait de six points en position générale. Clebsch avait en particulier étudié comment se transforment les courbes du plan (resp. incluses dans la cubique) dans la représentation.

Décrivons maintenant l'approche de Clebsch pour trouver une tangente à $C = 0$. La première étape consiste à dire que puisque $C = 0$ est de genre 4, alors elle est birationnelle à une courbe, que je noterai Γ, d'ordre 6 avec 6 points doubles [32]. Noter que, la courbe $C = 0$ étant décrite par coordonnées tangentielles, cette application birationnelle associe un point de Γ à chaque tangente de $C = 0$. Clebsch considère alors les six points doubles de Γ comme les points fondamentaux de la représentation d'une certaine surface cubique sur le plan E de Γ. Dans cette représentation, la courbe Γ est alors envoyée sur une courbe gauche γ qui est l'intersection complète de la cubique avec une certaine surface quadrique [33].

Il s'agit alors de « revenir » sur E à partir de la quadrique. En effet, Clebsch projette sur E « cette surface quadrique à partir d'un de ses points (lequel peut se trouver à l'aide uniquement d'une équation quadratique) de la façon habituelle [34] » — cela signifie qu'une projection stéréographique est effectuée à partir d'un des points de la quadrique. Clebsch indique ensuite que par cette projection, γ est envoyée sur une courbe Γ' d'ordre 6 avec deux points triples. Pour résumer, il y a donc une application qui associe à une tangente de

32. Une courbe d'ordre 6 avec 6 points doubles est une courbe de genre $(6-1)(6-2)/2 - 6 = 4$, donc de même genre que $C = 0$. Il faut prendre garde au fait que l'égalité du genre de deux courbes n'implique pas *a priori* leur équivalence birationnelle (alors que la réciproque est vraie). Je ne détaille pas ce point, que Clebsch démontre par ce qui s'apparente à ce qu'on appellerait aujourd'hui des calculs de dimension d'espaces de courbes.

33. Les courbes qui sont des intersections complètes d'une surface cubique et d'une surface quadrique font l'objet d'un paragraphe de l'article [Clebsch 1866], dans lequel Clebsch avait démontré l'existence des représentations des cubiques sur le plan.

34. « [Man bildet] diese Fläche 2^{ter} Ordnung sodann von einem ihrer Punkte (dessen Auffindung nur die Lösung einer quadratischen Gleichung fordert) auf die gewöhnliche Weise ab », [Clebsch 1871b, p. 327].

la courbe $C = 0$ un point de la courbe Γ', et cette application est « presque » birationnelle car un radical carré a été introduit par le choix d'un point sur la quadrique.

Il reste donc à chercher un point de Γ'. Clebsch écrit d'abord que les deux points triples de cette courbe « se séparent » par une équation quadratique, puis que toute droite passant par l'un d'eux recoupe Γ' en trois points « qui sont séparés au moyen d'une équation cubique ». Clebsch conclut alors : « à chacun de ces points correspond enfin une tangente à $C = 0$ [35] ».

Dans l'interprétation géométrique de Clebsch, avoir réussi à trouver une tangente à la courbe $C = 0$ revient à avoir déterminé une substitution quadratique donnant à la quintique la forme de Jerrard. On remarquera l'utilisation d'équations de la géométrie « séparant » des points : comme j'avais déjà pu l'écrire, ces équations permettent à Clebsch de contrôler les irrationalités introduites dans son interprétation. Ici, ce ne sont que des racines carrées et cubiques, ce qui coïncide avec les résultats connus sur l'équation du cinquième degré. On pourra également noter que Clebsch n'a donné aucune formule pour les diverses applications birationnelles.

Justement, Clebsch ne s'arrête pas là et indique qu'il va par la suite donner « les formules de la transformation et donc la solution analytique de la question ». Cela va être fait par l'intermédiaire d'un autre type d'interprétation géométrique de la méthode de Jerrard.

Interprétation géométrique de la méthode de Jerrard

Selon Clebsch, cette nouvelle interprétation géométrique de la méthode de Jerrard n'est « pas aussi directe [36] » que la précédente, portant sur la substitution quadratique. Il rappelle que cette méthode consiste à considérer la transformation dite de Tschirnhaus

$$\xi = a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3 + e\lambda^4, \tag{5.4}$$

où a, b, c, d et e doivent être choisis de sorte à éliminer les coefficients des puissances deuxième, troisième et quatrième de l'équation du cinquième degré de départ $f(\lambda) = 0$. Si les nouvelles racines sont notées $\xi_1, \ldots, \xi_5$, on demande donc que

$$\sum \xi_i = 0, \quad \sum \xi_i^2 = 0, \quad \sum \xi_i^3 = 0.$$

En remplaçant les ξ_i grâce à 5.4, ces conditions s'expriment rationnellement en les coefficients $a, \ldots, e$ ainsi qu'en des fonctions symétriques des λ_i, qui sont elles-mêmes rationnelles

35. « Jedem dieser Punkte endlich entspricht eine Tangente von $C = 0$. » [Clebsch 1871b, p. 327].

36. « Auch diese Jerrard'sche Modification der Tschirnhausen'schen Methode ist, wenngleich nicht so direct wie die quadratische Substitution, einer Art geometrischer Deutung fähig ». [Clebsch 1871b, p. 328].

en les coefficients de l'équation de départ. On obtient donc un système de la forme

$$\begin{cases} \Phi(a,b,c,d,e) = 0 \\ \Psi(a,b,c,d,e) = 0 \\ \mathrm{X}(a,b,c,d,e) = 0, \end{cases}$$

où Φ, Ψ, X sont des fonctions polynomiales homogènes d'ordres respectifs 1, 2, 3.

La fonction linéaire Φ permet de considérer a, b, c, d, e comme des coordonnées pentaédriques de l'espace, c'est-à-dire qu'elle permet d'exprimer une de ces quantités linéairement en fonction des autres, de sorte qu'il ne reste plus que quatre coordonnées homogènes de l'espace. Les équations $\Psi = 0$ et $\mathrm{X} = 0$ deviennent alors les équations respectives d'une surface quadrique et d'une surface cubique. L'intersection de ces surfaces est donc une courbe gauche d'ordre 6, à chaque point de laquelle correspond une transformation de Tschirnhaus adéquate.

Pour faire le lien avec sa première interprétation, Clebsch cherche ensuite à trouver une substitution quadratique produisant le même effet qu'une transformation de Tschirnhaus : avec les notations précédentes, il s'agit de trouver des polynômes du second degré $\varphi(\lambda)$ et $\psi(\lambda)$ tels que

$$\frac{\varphi(\lambda_i)}{\psi(\lambda_i)} = a + b\lambda_i + c\lambda_i^2 + d\lambda_i^3 + e\lambda_i^4$$

pour chaque racine λ_i. Il suffit donc de trouver φ et ψ telles que pour tout λ,

$$\varphi(\lambda) = (a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3 + e\lambda^4)\psi(\lambda) + (p + q\lambda)f(\lambda),$$

où p et q sont des constantes quelconques. En posant comme au début

$$\varphi(\lambda) = y_1 + \lambda y_2 + \lambda^2 y_3 \qquad \text{et} \qquad \psi(\lambda) = x_1 + x_2\lambda + x_3\lambda^2,$$

et en notant $f = \alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda^3 + \varepsilon\lambda^4 + \zeta\lambda^5$, la condition cherchée revient à

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + p\alpha \\ y_2 = ax_2 + bx_1 + p\beta + q\alpha \\ y_3 = ax_3 + bx_2 + cx_1 + p\gamma + q\beta \\ 0 = bx_3 + cx_2 + dx_1 + p\delta + q\gamma \\ 0 = cx_1 + dx_2 + ex_1 + p\varepsilon + q\delta \\ 0 = dx_3 + ex_2 + p\zeta + q\varepsilon \\ 0 = ex_3 + q\zeta. \end{cases}$$

Ce système permet alors de déterminer $x_1, \ldots, y_3$ en fonction de $a, b, \ldots, e$ ou réciproquement. Les formules ainsi trouvées font le lien entre les interprétations géométriques proposées par Clebsch : à un point de coordonnées pentaédriques (a, b, c, d, e) dans l'interprétation de la méthode de Jerrard correspond un couple de points x, y dans l'interprétation de la substitution quadratique, et réciproquement. En outre, les deux méthodes ont fait apparaître une courbe gauche d'ordre 6, que je noterai $\mathscr{C}$, intersection d'une surface cubique et d'une surface quadrique. Mais maintenant, l'avantage — c'est ce que Clebsch annonçait — est que ces surfaces ont des équations : $\Phi = \Psi = 0$ et $\Phi = \mathrm{X} = 0$, et les formules de représentation peuvent se déduire par résolution du système précédent.

Plus précisément, les formules de Cramer [37] donnent

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= M_1 & \sigma y_1 &= N_1 \\ \rho x_2 &= M_2 & \sigma y_2 &= N_2 \\ \rho x_3 &= M_3 & \sigma y_3 &= N_3, \end{aligned}$$

où $M_1, \ldots, N_3$ sont des fonctions homogènes de $a, b, \ldots, e$ et où ρ, σ sont des constantes. Ce sont là les formules de représentation des surfaces $\Phi = \Psi = 0$ et $\Phi = \mathrm{X} = 0$ respectivement. Ainsi, à chaque point $(a, \ldots, e)$ de la courbe gauche correspondent rationnellement deux points x, y tels que la droite (xy) soit tangente à $C = 0$. Finalement, on en déduit les formules de représentation de la courbe $C = 0$ [38] :

$$\begin{aligned} \tau u_1 &= M_2 N_3 - M_3 N_2 \\ \tau u_2 &= M_3 N_1 - M_1 N_3 \\ \tau u_3 &= M_1 N_2 - M_2 N_1. \end{aligned}$$

Autrement dit, ces formules associent rationnellement à un point $(a, \ldots, e)$ de la courbe gauche $\mathscr{C}$, une droite de coordonnées u_1, u_2, u_3, tangente à $C = 0$. Par conséquent, pour trouver par radicaux (carrés et cubiques) une tangente à $C = 0$, il suffit de trouver par radicaux (carrés et cubiques) un point de $\mathscr{C}$.

Ce dernier point est alors réglé par Clebsch par l'utilisation d'équations de la géométrie, et il résume le tout de la façon suivante :

> Si l'on considère, avec Hermite, l'équation
>
> $$x^5 - ax - b = 0 \qquad (1)$$
>
> comme directement résolue par des fonctions elliptiques, il n'importe alors plus que de

37. C'est également avec les formules de Cramer que Clebsch avait établi la première fois la représentation d'une surface cubique sur un plan. Voir le chapitre 2.

38. Pour cela, se souvenir qu'une droite $u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 = 0$ passe par deux points de coordonnées $(x_1 : x_2 : x_3)$ et $(y_1 : y_2 : y_3)$ si et seulement si $(u_1 : u_2 : u_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2 : x_3 y_1 - x_1 y_3 : x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

> ramener l'équation du cinquième degré sous cette forme. On n'a alors qu'à déduire un point quelconque de la courbe gauche du sixième ordre, ce qui se fait en intersectant une génératrice de la surface $\Psi = 0$ avec la surface diagonale [$\mathrm{X} = 0$]. Pour cela, une équation quadratique et une équation cubique sont à résoudre ; la première pour trouver une génératrice de la surface du second ordre ; l'autre pour déterminer les points d'intersection de celle-ci avec la surface diagonale. Le point trouvé de la courbe gauche du sixième ordre donne une tangente à $C = 0$, et il a été vu [précédemment] comment le système de points d'intersection sur cette tangente conduit à la forme (1). Si l'on connaît les points d'intersection de ce système, alors les côtés du quintilatère sont séparés et l'équation du cinquième degré est résolue [39]. [Clebsch 1871b, p. 341]

Voilà comment Clebsch termine son interprétation géométrique de la résolution par Hermite de l'équation du cinquième degré. Encore ici, on notera que l'attention est portée sur les irrationalités introduites dans les différentes étapes géométriques, et contrôlées par les équations de la géométrie.

Il est également intéressant de noter que Clebsch ne fait pas du tout intervenir les étapes de Hermite de résolution de l'équation du cinquième degré basées sur la théorie des fonctions elliptiques, comme la recherche explicite d'une réduite d'ordre 5 de l'équation modulaire et de ses racines. Clebsch considère plutôt, sans d'ailleurs la remettre en question, que cette résolution est acquise une fois pour toutes dès que la forme de Jerrard est trouvée.

Comme écrit plus haut, Clebsch propose aussi d'interpréter géométriquement la méthode de Kronecker de résolution de l'équation du cinquième degré — pour rapporter sa démarche, je serai un plus bref que jusqu'à présent, les idées étant du même genre que celles que j'ai décrites *supra*. La première étape, d'ailleurs digne d'intérêt pour le sujet des surfaces cubiques, se raccroche en fait à ce qui précède, puisqu'il s'agit d'examiner les propriétés de la surface $\mathrm{X} = 0$. Nous allons à ce propos voir réapparaître l'équation aux vingt-sept droites de cette surface cubique particulière.

La surface diagonale

Pour étudier de plus près la surface d'équation $\mathrm{X} = 0$ trouvée précédemment, Clebsch change de coordonnées pentaédriques. Il revient en effet à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_5$, liés par la relation $\sum \xi_i = 0$. L'équation de la surface cubique est alors $\sum \xi_i^3 = 0$.

Les plans $\xi_i = 0$ sont les cinq faces du pentaèdre de la surface cubique [40] ; chacun d'eux

39. « Wenn man nach Hermite die Gleichung $x^5 - ax - b = 0$ (1) als durch elliptischen Functionen unmittelbar gelöst betrachtet, so kommt es nur darauf an, die Gleichung 5^{ten} Grades in diese Form zu bringen. Man hat dann nur einen beliebigen Punkt der Raumcurve 6^{ter} Ordnung zu ermitteln, was geschieht, indem man eine Erzeugende der Fläche $\Psi = 0$ mit der Diagonalfläche schneidet. Dazu ist eine quadratische und eine cubische Gleichung zu lösen; erstere, um eine Erzeugende der Fläche 2^{ter} Ordung zu finden; die andere, um die Durchschnitte derselben mit der Diagonalfläche zu bestimmen. Der gefundene Punkt der Raumcurve 6^{ter} Ordnung giebt eine Tangente von $C = 0$, und wie das Schnittpunktsystem auf dieser zu der Form (1) führt, ist in §11. gezeigt worden. Kennt man die Schnittpunkte dieses Systems, so sind auch die Seiten des Fünfseits getrennt, die gegebene Gleichung 5^{ten} Grades gelöst. »

40. Je rappelle qu'en 1851, Sylvester avait indiqué que toute forme cubique $F(x, y, z, w) = 0$ peut s'écrire

est donc coupé par les autres suivant un quadrilatère. Ces quadrilatères ont chacun trois diagonales, dont Clesbch montre qu'elles sont des droites de la surface cubique [41]. Il obtient ainsi 15 droites incluses dans cette surface, qu'il baptise en conséquence *surface diagonale du pentaèdre*, ou plus simplement *surface diagonale*.

FIGURE 5.1 – Modèle de la surface diagonale. Source : [Fischer 1986b].

Pour cette surface particulière, il y a donc 15 droites « immédiatement connues [42] » dès lors que l'on connaît les faces du pentaèdre : ce sont les diagonales décrites précédemment, qui sont aussi les intersections mutuelles des faces. Clebsch trouve ensuite les 12 droites manquantes à partir des plans du pentaèdre et en utilisant des racines cinquièmes de l'unité. Plus précisément, il montre que si ω est une racine primitive cinquième de l'unité, tous les points de l'espace de coordonnées pentaédriques $(\omega^{\alpha_1}, \omega^{\alpha_2}, \ldots, \omega^{\alpha_5})$ et leurs conjugués $(\omega^{-\alpha_1}, \omega^{-\alpha_2}, \ldots, \omega^{-\alpha_5})$, où $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5)$ est une permutation quelconque de $(1, 2, \ldots, 5)$, sont des points de la surface diagonale, et même que leur ligne de jonction y est entièrement incluse [43]. Or, il y a 12 points $(\omega^{\alpha_1}, \omega^{\alpha_2}, \ldots, \omega^{\alpha_5})$ — certaines permutations α donnent les mêmes points — ce qui donne donc les 12 droites restantes

sous la forme $F = a_1 z_1^3 + a_2 z_2^3 + a_3 z_3^3 + a_4 z_4^3 + a_5 z_5^3$, où les z_i sont des formes linéaires en x, y, z, w soumises à la condition $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0$. Le *pentaèdre* de la surface cubique d'équation $F = 0$ est l'ensemble des cinq plans d'équations respectives $z_i = 0$.

41. Par exemple, il montre que sur la face $\xi_5 = 0$, les équations des diagonales sont toutes de la forme

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 & = & 0 \\ \xi_3 + \xi_4 & = & 0 \\ \xi_5 & = & 0. \end{cases}$$

On vérifie alors facilement que tout quintuplet $(\xi_1, \ldots, \xi_5)$ vérifiant ces conditions satisfait l'équation de la surface $\xi_1^3 + \cdots + \xi_5^3 = 0$.

42. « Man sieht, dass auf dieser Fläche sofort 15 der 27 Geraden bekannt sind. » [Clebsch 1871b, p. 333].

43. Pour le voir, on peut remarquer que tous les points de la droite passant par $(\omega^{\alpha_1}, \ldots, \omega^{\alpha_5})$ et $(\omega^{-\alpha_1}, \ldots, \omega^{-\alpha_5})$ sont de la forme $(\chi\omega^{\alpha_1} + \lambda\omega^{-\alpha_1}, \ldots, \chi\omega^{\alpha_5} + \lambda\omega^{-\alpha_5})$, où χ et λ sont des paramètres. Un simple calcul montre alors que les coordonnées de ces points vérifient l'équation $\sum \xi_i = 0$.

cherchées. Clebsch en déduit alors un résultat sur l'équation aux vingt-sept droites associée à la surface cubique :

> La résolution de l'équation de degré 27 dont dépendent les 27 droites de la surface n'exige pour la surface diagonale que la résolution de l'équation de degré 5 survenant pour le pentaèdre et la détermination de racines cinquièmes de l'unité [44]. [Clebsch 1871b, p. 333]

En étudiant les relations d'incidence entre les droites de la surface diagonale, Clebsch aboutit au fait qu'un de ses doubles-six est « rationnellement connu ». Il considère alors une représentation de la surface diagonale correspondant à une des moitiés du double-six rationnel [45]. Il montre, grâce aux propriétés d'incidence des vingt-sept droites de la surface diagonale, que les six points fondamentaux de la représentation forment dix hexagones de Brianchon, c'est-à-dire que ces six points peuvent être reliés entre eux de dix façons de sorte à former des hexagones dont les diagonales sont concourantes.

Interprétation de la méthode de Kronecker

Ainsi que je l'ai expliqué précédemment, Kronecker avait entre autres montré à l'aide de l'équation du multiplicateur (de degré 6) associée à la transformation d'ordre 5 des fonctions elliptiques, que l'équation générale du cinquième degré pouvait se ramener à une équation pure, c'est-à-dire de la forme $z^5 = A$. Pour son interprétation géométrique, Clebsch procède en deux temps. Il s'agit d'abord de trouver une équation de degré 6 dont la résolution permet de ramener l'équation du cinquième degré à une équation pure, puis de montrer que cette équation de degré 6 utilisée est analogue à l'équation du multiplicateur.

Pour le premier point, Clebsch se base sur l'étude d'une courbe associée à un invariant B associé à l'équation du cinquième degré. Cette courbe se décompose en deux courbes $B_1 = 0$ et $B_2 = 0$ ayant chacune six tangentes doubles. Clebsch montre que si on prend une de ces tangentes doubles comme base de substitution quadratique, alors l'équation du cinquième degré se transforme en une équation pure. Il lui revient donc à montrer que « l'équation de séparation » des six tangentes doubles de $B_1 = 0$ est la même que l'équation du multiplicateur.

Pour cela, Clebsch commence par prouver que l'équation de séparation des six tangentes doubles est analogue à « l'équation de séparation des six sommets » de l'hexagone de Brianchon trouvé dans la représentation de la surface diagonale. Passons sous silence la démonstration de cela ; le problème est alors de montrer que cette dernière équation est analogue à l'équation modulaire.

---

44. « Die Lösung der Gleichung 27^{ten} Grades, von welcher die 27 Geraden der Fläche abhängen, erfordet bei der Diagonalfläche nur die Lösung der beim Pentaeder auftretenden Gleichung 5^{ten} Grades und die Bestimmung von fünften Wurzeln der Einheit. »

45. Je rappelle que la donnée d'une représentation de la surface sur un plan équivaut à la donnée de six droites de la surface formant la moitié d'un double-six, ce qui correspond, sur le plan, à la donnée de six points (fondamentaux) en position générale.

À nouveau, ce sont des propriétés d'invariants qui sont mis en avant. Plus précisément, Clebsch indique, en renvoyant à l'article [Clebsch 1871a], que si une équation de degré 6 a deux de ses invariants (notés a et c) nuls, alors elle peut se transformer en l'équation du multiplicateur par une substitution linéaire. Il s'agit donc de montrer que c'est le cas pour l'équation de séparation des six sommets. Clebsch la note symboliquement $\varphi = \alpha_u^6$: c'est une forme ternaire en u dont chaque facteur représente un des sommets [46].

Clebsch a alors l'idée de traduire par dualité son principe d'interprétation géométrique du début : une équation $\varphi = \alpha_u^6 = \beta_u^6$ permet de définir un hexagone ; à toute substitution quadratique opérée sur cette équation correspond un point du plan, et les substitutions faisant s'annuler un invariant a correspondent aux points appartenant à la courbe d'équation ponctuelle $a = (\alpha\beta x)^6 = 0$; en outre, les sommets de l'hexagone sont des points doubles d'une telle courbe.

Or, comme les six sommets ont été pris comme points fondamentaux dans la représentation de la surface diagonale, toute courbe contenant ces points avec multiplicité 2 correspond à une courbe d'ordre 6 tracée sur la surface diagonale, et plus précisément à une courbe qui est l'intersection complète de la surface diagonale avec une surface quadrique. Comme précédemment, on peut trouver de points de cette courbe à l'aide d'équations quadratique et cubique. De tels points donnent donc des points du plan correspondant à des substitutions quadratiques annulant l'invariant a.

Enfin, Clebsch montre que dans le cas d'un hexagone de Brianchon, l'annulation de l'invariant a entraîne celle de l'invariant c, ce qui achève le tout : « ainsi se trouvent regroupés et reliés dans une image géométrique vraiment tous les éléments de la résolution des équations du cinquième degré [47] ».

Comme c'était le cas pour la méthode de Hermite de résolution de la quintique, Clebsch ne mobilise pas ici ce qui relève de l'équation du multiplicateur. L'accent est encore mis sur certains invariants, dont l'annulation signifie la possibilité de ramener une équation sous la forme d'une équation pure ou de l'équation du multiplicateur selon les cas.

5.1.4 Conclusion : transformations d'équations, invariants et géométrie

Le mémoire de Clebsch que j'ai décrit montre une certaine configuration entre théorie des équations, théorie des invariants et géométrie. Il s'agissait pour Clebsch de proposer une interprétation géométrique d'éléments se rapportant à la théorie de l'équation du cinquième degré. Deux types de transformations de cette équation ont été interprétées par Clebsch : les transformations (ou substitutions) quadratiques et les transformations de Tschirnhaus.

Les conditions d'annulation d'invariants étaient aussi interprétés géométriquement, et ainsi liées à l'interprétation des substitutions quadratiques. Le but pour Clebsch était alors

46. En coordonnées tangentielles $(u_1 : u_2 : u_3)$, une équation linéaire $z_1u_1 + z_2u_2 + u_3z_3 = 0$ représente le point de coordonnées $(z_1 : z_2 : z_3)$.

47. « So finden sich denn wirklich alle Elemente der Auflösung der Gleichungen 5^{ten} Grades hier in einem geometrischen Bilde zusammengefasst und verbunden », [Clebsch 1871b, p. 345].

de trouver une substitution faisant s'annuler l'invariant C de la quintique, car sous cette condition, cette dernière se ramenait linéairement sous forme de Jerrard, et était ainsi « résolue au sens hermitien ». La question de trouver une tangente à la courbe $C = 0$ était alors réglée par Clebsch par un déploiement de techniques et résultats relatifs aux courbes et surfaces algébriques : recherche de tangentes particulières, calcul du genre, représentation des surfaces sur un plan, etc.

On a également vu intervenir les équations de la géométrie à plusieurs reprises. Le plus souvent, il s'agissait d'équations « séparant » des objets géométriques et permettant de contrôler les irrationalités introduites dans l'interprétation géométrique. Leur usage est donc important pour Clebsch pour s'assurer de la concordance de sa méthode avec celles qu'il interprète.

À ce sujet, comme je l'ai fait remarquer précédemment, les méthodes de Hermite et de Kronecker n'ont pas été interprétées géométriquement étape par étape. Il s'agit plutôt, pour Clebsch, de prendre pour acquis leurs résultats finaux : d'une part que, la quintique peut être considérée comme résolue par les fonctions elliptiques dès qu'elle est sous forme de Jerrard, d'autre part, qu'elle se ramène sous forme d'une équation pure par résolution de l'équation du multiplicateur. Autrement dit, Clebsch attribue les noms de Hermite et de Kronecker à des méthodes vues dans leur globalité, et qui ne sont pas discutées en tant que telles. L'« apparat géométrique » ne s'applique alors qu'aux transformations permettant d'arriver sur les formes issues de chacune des méthodes.

Alors que Clebsch dit avoir ainsi mis ensemble « vraiment tous les éléments de la résolution de l'équation du cinquième degré », remarquons que certains points n'ont en fait pas été pris en compte. Par exemple, les noms d'Abel, Galois, Betti ou Brioschi n'apparaissent à aucun moment du mémoire de Clebsch. Cela peut éventuellement s'expliquer par le fait que les résultats de Hermite étant supposées acquis pour Clebsch, il n'est plus lieu de discuter du problème de résolubilité par radicaux (vs. par fonctions transcendantes) et donc d'évoquer Abel, ou de revenir sur les étapes faisant intervenir les résultats de Galois et de Betti. Quoi qu'il en soit, cette absence de Galois et de Betti appelle à une autre constatation : il n'y a aucune mention de groupes chez Clebsch.

Le mémoire de Clebsch semble avoir été totalement oublié par l'historiographie, qui mentionne pourtant systématiquement d'autres travaux visant à introduire un point de vue géométrique sur l'équation du cinquième degré, notamment à partir des travaux de Hermite et de Kronecker. Ces travaux sont ceux de Klein sur l'icosaèdre, entamés vers 1875 et ayant donné lieu à un livre près de dix ans plus tard, [Klein 1884].

Précisons-le tout de suite : les travaux de Klein et de Clebsch proposent des approches différentes. En particulier, un point crucial de Klein est d'utiliser des groupes de transformations de l'espace et des invariants géométriques. Cette alliance de groupes et d'invariants est celle préconisée dans le *Programme d'Erlangen*, élaboré par Klein en 1872. Avant de discuter un peu plus de la place du mémoire de Clebsch dans le livre sur l'icosaèdre, je vais pour le moment continuer à suivre la chronologie. Je vais à présent discuter d'un article déjà rencontré, [Klein 1871b], et qui est lié au mémoire de Clebsch décrit dans cette section. Je propose de montrer qu'il est en lien à la fois avec le *Programme d'Erlangen* et les recherches sur l'icosaèdre.

5.2 Des équations de la géométrie au *Programme d'Erlangen* et à l'icosaèdre

Pour situer chronologiquement les choses, rappelons qu'en 1869, Klein avait rencontré Clebsch à Göttingen pour gérer des affaires relatives à la mort de Plücker [48]. À la fin du mois d'août de cette année-là, Klein était allé étudier à Berlin, où il avait rencontré et s'était lié d'amitié avec Lie. Les deux mathématiciens avaient alors voyagé à Paris vers la fin du mois d'avril 1870 et y avaient fait entre autres la connaissance de Jordan et de son *Traité des substitutions et des équations algébriques* qui venait tout juste d'être publié. En juillet 1870, Klein dut quitter Paris en raison de la guerre franco-prussienne qui venait de débuter. Klein passa son habilitation à l'université de Göttingen en janvier 1871 et fut nommé *Privatdozent* dans cette université pour l'année académique 1871-1872. Notamment recommandé par Clebsch, il obtint un poste de professeur *ordinarius* à l'université d'Erlangen à la fin de l'année 1872 — il y resta jusqu'en 1875, date à laquelle il partit pour Munich.

5.2.1 Représentation géométrique des résolvantes

J'ai déjà présenté les principales idées de l'article de Klein intitulé « Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen », [Klein 1871b]. Cet article est daté de mai 1871, date à laquelle Klein était à Göttingen, travaillant avec Clebsch. L'extrait suivant, situé en fin d'introduction, montre en outre que Klein avait écrit cet article en ayant notamment en tête les travaux de Clebsch sur l'équation du cinquième degré qui ont été décrits dans la section précédente :

> La première raison aux affaires géométriques esquissées [ici] m'ont été les considérations géométriques que M. Clebsch a appliquées dans son mémoire dans le but de discuter les équations du cinquième degré, qu'il a eu la bonté de partager avec moi lors de conversations personnelles récurrentes. Par ailleurs, elles se rapportent étroitement aux considérations sur les transformations linéaires d'objets géométriques en eux-mêmes, comme M. Lie et moi-même les avons expliquées dans l'article « Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen », [Klein & Lie 1871] [49]. [Klein 1871b, p. 347]

48. Pour la chronologie qui suit, voir par exemple [Tobies 1981, p. 20-24] ou [Rowe 1989b].

49. « Die nächste Veranlassung zu den hiermit angedeuteten Dingen sind mir die geometrische Betrachtungen gewesen, die Herr Clebsch in dem vorstehenden Aufsatze behufs Discussion der Gleichungen 5^{ten} Grades angewandt hat, und welche mir derselbe in wiederholten persönlichen Unterhaltungen mitzutheilen

Les travaux communs avec Lie évoqués ici par Klein sont ceux qui portent sur ce qu'ils appelaient les « courbes et surfaces V » ou « W-*Curven* » en allemand [50]. Une idée principale de ces travaux était de considérer des familles de courbes ou de surfaces qui sont invariantes par des groupes continus de transformations linéaires [51].

Par ailleurs, comme écrit au chapitre 3, Klein ouvre son article sur la représentation géométrique des résolvantes par une mention explicite des équations de la géométrie :

> La théorie générale des équations algébriques est illustrée de la plus belle des façons par un certain nombre d'exemples géométriques particuliers ; je pense seulement (voir Camille Jordan, *Traité des substitutions*, p. 301 etc.) au problème des points d'inflexion des courbes du troisième ordre, aux vingt-huit tangentes doubles des courbes du quatrième ordre, aux vingt-sept droites sur les surfaces du troisième degré, etc., mais aussi à la cyclotomie [52]. [Klein 1871b, p. 346]

Klein met ensuite en avant le côté intuitif des équations de la géométrie :

> Le grand avantage de ces exemples est qu'ils présentent de façon intuitive les idées abstraites en elles-mêmes si particulières de la théorie des substitutions. Il se rapportent la plupart du temps à des équations de caractère très particulier, entre les racines desquelles ont lieu des groupements particuliers, laissant ainsi voir comment de telles équations peuvent se comporter [53]. [Klein 1871b, p. 346]

Mais il va plus loin qu'une simple constatation, et propose d'incarner géométriquement toute équation algébrique générale [54] :

> Dans ce qui suit, je veux faire remarquer une méthode grâce à laquelle on obtient une image géométrique pour les équations *générales* de degré quelconque, en particulier

---

die Güte hatte. Auf der anderen Seite stehen dieselben im engsten Zusammenhange mit den Betrachtungen über lineare Transformationen geometrischer Gebilde in sich selbst, wie dieselben von Herrn Lie und mir in dem Aufsatze: „Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen“ (diese Annalen, IV.1), auseinandergesetzt worden sind. »

50. Ces travaux avaient fait l'objet de deux notes conjointes (en français) aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, [Klein & Lie 1870]. La dénomination française « courbes et surfaces V » est celle qu'on y trouve.

51. Voir [Rowe 1989b, p. 236-239 ; Hawkins 2000, chap. 1]. D. Rowe souligne que, au moins dans leur première version dans les *Comptes rendus*, les recherches sur les courbes et surfaces V employaient un langage « si sec et si vague que personne ne semble les avoir comprises, à part Max Noether. »

52. « Die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen wird in schönster Weise durch eine Anzahl besonderer geometrischer Beispiele illustrirt; ich erinnere nur (Vergl. Camille Jordan. Traité des Substitutions. 1, p. 301 ff.) an das Problem der Wendepunkte der Curven 3$^{\text{ter}}$ Ordnung, an die 28 Doppeltangenten der Curven 4$^{\text{ter}}$ Ordnung, an die 27 Linien auf den Flächen 3$^{\text{ten}}$ Grades etc., dann aber namentlich auch an die Kreistheilung. »

53. « Der hohe Nutzen dieser Beispiele liegt darin, daß sie die an und für sich so eigenartig abstrakten Vorstellungen der Substitutionstheorie in anschaulicher Weise dem Auge vorführen. Sir beziehen sich zumeist auf Gleichungen von sehr partikulärem Character, zwischen deren Wurzeln besondere Gruppierungen statthaben, und lassen also übersehen, wieso derartige besondere Gleichungen auftreten können. »

54. Ici, « équation générale » désigne une équation algébrique entre les racines de laquelle il n'existe aucun relation non triviale. En termes actuels, il s'agit donc d'une équation ayant pour groupe de Galois le groupe symétrique tout entier.

> pour les groupements des racines d'une telle équation, comme on en a besoin pour établir des résolvantes [55]. [Klein 1871b, p. 346]

C'est là le point essentiel de l'article de Klein. La méthode permettant de réaliser cette incarnation consiste à prendre n éléments d'un espace à $n-2$ dimensions comme image des n racines d'une équation, et à remplacer les substitutions entre les racines par des transformations linéaires de l'espace transformant entre eux les n éléments. Klein insiste bien sur l'importance des transformations et ajoute que les équations qui ne sont pas générales peuvent aussi être vues géométriquement :

> Le cœur de ces idées est que les permutations des n racines entre elles sont remplacées, dans l'image géométrique, par des transformations linéaires d'un espace continu. On peut aussi incarner des équations de type particulier de façon analogue, auquel cas non pas toutes, mais seulement les permutations caractéristiques des racines se présentent comme transformations linéaires de l'espace [56]. [Klein 1871b, p. 346-347]

J'ai expliqué au chapitre 3 comment sont alors conçues les résolvantes des équations : elles correspondent à des objets géométriques qui sont (en termes actuels) des orbites des éléments de base sous l'action des transformations de l'espace.

Nous voyons donc apparaître le principe qui sera plus tard au cœur des recherches de Klein sur l'équation du cinquième degré, et qui consistera à interpréter le groupe de cette équation comme le groupe des transformations linéaires laissant invariants les sommets d'un icosaèdre régulier. Mais je voudrais suggérer que l'article de Klein dont j'ai décrit ici les idées principales joue aussi un rôle dans l'élaboration du célèbre *Programme d'Erlangen*, chronologiquement antérieur au début des travaux sur l'icosaèdre [57].

5.2.2 Le *Programme d'Erlangen*

En tant que nouveau professeur à Erlangen, Klein dut s'acquitter de deux tâches. L'une consistait en un discours de présentation auprès de l'ensemble du corpus professoral de l'université, l'autre en l'écriture d'un texte présentant certaines de ses idées pour la recherche mathématique. Le discours fut tenu en décembre 1872 ; à travers lui, Klein avait exprimé ses points de vue sur l'enseignement des mathématiques [58]. Lors de la tenue du

55. « Ich will nun im Folgenden auf eine Methode aufmerksam mache, vermöge deren man ein geometrisches Bild für die *allgemeinen* Gleichungen eines beliebigen Grades erhält, insbesondere für diejenigen Gruppirungen der Wurzeln einer solchen Gleichung, wie man sir zur Aufstellung der Resolventen gebraucht. »

56. « Das Wesentliche an dieser Vorstellungsweise ist, dass die Vertauschungen der n Wurzeln unter sich im geometrischen Bilde ersetzt werden durch lineare Transformationen eines continuirlichen Raumes. Auch Gleichungen von particulärer Art kann man in ähnlicher Weise geometrisch versinnlichen, wobei dann nicht mehr alle, sondern nur die charakteristischen Vertauschungen ihrer Wurzeln im Bilde als lineare Raumtransformationen erscheinen. »

57. J'ai consacré un article à ce lien entre les équations de la géométrie et le *Programme d'Erlangen*, [Lê 2014].

58. Une transcription et un commentaire de cette *Anstrittsrede* sont proposés dans [Rowe 1983 ; Rowe 1985].

discours, le texte de Klein avait été distribué à l'auditoire sous forme d'un livret imprimé. C'est ce texte, originalement intitulé *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*[59], qui est maintenant connu sous le nom de *Programme d'Erlangen*, [Klein 1872].

Le *Programme d'Erlangen* est un texte « semi technique », dans lequel Klein expose des idées exprimant une volonté d'unifier la géométrie par le biais des groupes de transformations et des invariants[60]. Plus précisément, dans son introduction, Klein y exprime que les développements mathématiques de son époque ont produit un éclatement de la géométrie en plusieurs sous-produits[61], qu'il convient de réunifier :

> La publication de considérations destinées à établir un tel lien a paru d'autant plus justifiée que la Géométrie, bien qu'elle soit une par essence, ne s'est que trop scindée, en raison du rapide développement qu'elle a pris dans ces derniers temps, en des disciplines presque séparées [...] dont chacune continue de se développer presque indépendamment des autres. [Klein 1974, p. 4]

Comme il l'explique lui-même dès le début du *Programme*, une des bases de ses considérations provenait de travaux récents ayant réalisé les métriques euclidienne et non-euclidiennes dans un cadre de géométrie projective. Klein ne donne pas de référence précise à ce sujet, mais il avait lui-même publié des recherches sur les géométries non-euclidiennes peu auparavant, [Klein 1871a], prolongeant notamment des travaux de Cayley de la fin des années 1850. Outre la mention aux géométries non-euclidiennes, Klein évoque encore explicitement les travaux qu'il a développés avec Lie : ce sont ceux sur les courbes et surfaces V, que nous avons rencontrés plus haut[62].

Les différentes sections du *Programme d'Erlangen* présentent successivement des principes généraux sur la géométrie, les groupes et les invariants, mais également une série d'exemples à travers lesquels Klein les illustre[63]. Ainsi, parmi les principes généraux se trouve la conception même de la géométrie pour Klein :

---

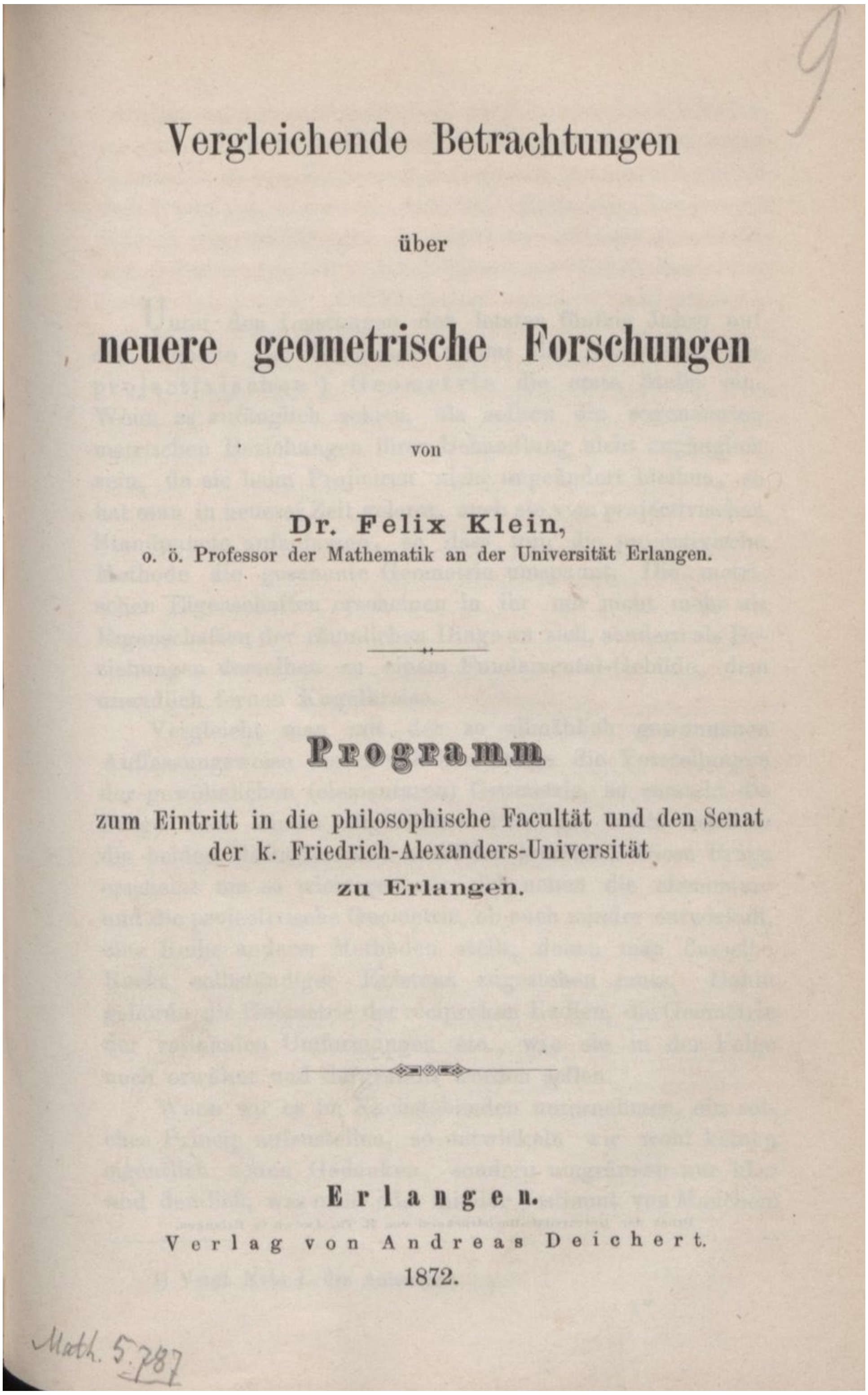
59. En français, le titre est devenu « Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes » dans une traduction de 1891 due à Henri Padé, [Klein 1891] ; elle a été reprise dans une édition de 1974 commentée par Jean Dieudonné et François Russo, [Klein 1974]. Une liste des traductions du *Programme d'Erlangen* se trouve dans [Hawkins 1984].

60. Dans les appropriations plus actuelles du *Programme d'Erlangen*, l'aspect relatif à la théorie des invariants est souvent resté dans l'ombre de celui se rapportant aux groupes. Voir [Perrin 2002], dans lequel Daniel Perrin préconise un renforcement de l'incorporation d'invariants géométriques dans l'enseignement français. Par ailleurs, l'importance du *Programme* dans le développement de la théorie des groupes a été étudiée dans [Wussing 1969].

61. Comme j'ai déjà eu l'occasion de le souligner, cette vision de la géométrie n'est pas objective. Voir [Lorenat 2015a].

62. Sans remettre en question son importance, T. Hawkins a discuté le caractère révolutionnaire qui était souvent attribué au *Programme d'Erlangen*, notamment en mettant en évidence le rôle de Lie et ses émules dans le développement des idées du *Programme*. Voir [Hawkins 1984].

63. Les exemples de Klein sont ce qu'il appelle la géométrie de l'espace réglé, la géométrie des rayons vecteurs réciproques, la géométrie de la sphère de Lie, la géométrie des transformations rationnelles, etc. Voir [Gray 2005] pour une description rapide de ces exemples.


9

Vergleichende Betrachtungen

über

neuere geometrische Forschungen

von

Dr. Felix Klein,

o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen.

Programm

zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen.

Erlangen.

Verlag von Andreas Deichert.

1872.

FIGURE 5.2 – Page de garde du *Programme d'Erlangen*, [Klein 1872].

> Comme généralisation de la Géométrie se pose ainsi la question générale que voici : *Étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité*[64]*, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*
>
> Si l'on adopte la façon actuelle de parler dont, il est vrai, on ne se sert que pour un groupe déterminé, celui des transformations linéaires, on peut encore s'exprimer ainsi : *On donne une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité ; développer la théorie des invariants relatifs à ce groupe.* [Klein 1974, p. 7]

Parmi les autres principes généraux du *Programme d'Erlangen*, Klein indique comment transférer une géométrie associée à une multiplicité A à une deuxième multiplicité A' : si une transformation t change A en A', alors, elle permet de trouver un groupe de transformations associé à A' à partir de celui associé à A — en termes actuels, il s'agit de conjuguer par t le groupe associé à A.

Klein explique aussi quel est l'effet de privilégier certains éléments sur le groupe associé à la multiplicité :

> On donne une multiplicité et, pour en faire l'étude, un de ses groupes de transformations. Soit proposé d'étudier les êtres de la multiplicité eu égard à l'un d'eux. *On peut alors soit adjoindre celui-ci à l'ensemble des êtres et rechercher, au sens du groupe donné, les propriétés du système complet, soit ne rien adjoindre, mais borner les transformations prises pour base de l'étude à celles du groupe donné qui n'altèrent pas l'être considéré (et qui forment nécessairement un groupe).* [Klein 1974, p. 9]

Ici, le verbe « adjoindre » rappelle la notion d'adjonction provenant de la théorie des équations, en particulier de Galois[65] : tout comme l'adjonction d'une racine à une équation donnée réduit le groupe de cette dernière à ses substitutions lui laissent la racine inaltérée, l'adjonction d'un élément de l'espace réduit le groupe de transformations à celles qui le laissent inaltéré.

À part cette allusion, d'autres mentions explicites de la théorie des équations et des substitutions se trouvent dans le *Programme d'Erlangen*. Ainsi, lorsqu'il introduit ce qu'est un groupe de transformations de l'espace, Klein précise que « la notion et la dénomination [en] sont empruntées à la théorie des substitutions où l'on traite, non des transformations d'un champ continu, mais des permutations d'un nombre fini de grandeurs discrètes », [Klein 1974, p. 6, note (2)]. En outre, ces analogies confirmées dans les remarques finales du *Programme* :

> On est conduit à poser les problèmes dont nous voulions encore parler par une comparaison entre les idées que nous avons exposées et ce que l'on nomme la *théorie des équations de Galois.*

64. Le mot de Klein est « Mannigfaltigkeit », que l'on traduirait aujourd'hui plutôt par « variété », même s'il ne s'agit toutefois pas là de la notion actuelle de variété. Voir [Scholz 1980, p. 131].

65. En allemand, Klein emploie le verbe « hinzufügen », mais il parle aussi de « Adjunction der Hauptgruppe invarianten Eigenschaften », [Klein 1872, p. 8].

> Dans la théorie de Galois comme ici, tout l'intérêt réside dans les groupes de transformations. Mais les objets auxquels se rapportent les transformations sont bien différents : là on a affaire à un nombre limité d'éléments distincts, ici à un nombre indéfini d'éléments d'un ensemble continu [...]. [Klein 1974, p. 36]

Il est intéressant de noter que Klein ne s'arrête pas à une comparaison superficielle et, « par l'identité de la notion de groupe, [pousse] plus loin la comparaison » entre théorie de Galois et géométrie :

> Dans la théorie de Galois telle qu'elle est exposée, par exemple, dans le *Traité d'Algèbre supérieure* de *Serret* ou dans le *Traité des substitutions* de *C. Jordan*, ce qui fait proprement l'objet des recherches, c'est la théorie même des groupes ou des substitutions ; la théorie des équations en découle comme application. Par analogie, nous voudrions une *théorie des transformations*, une théorie des groupes qui peuvent être engendrés par des transformations d'une nature donnée. [Klein 1974, p. 36]

Cet extrait a souvent été mis en avant par l'historiographie pour souligner le parallèle fait, par la notion de groupe, entre théorie de Galois et géométrie [66]. Sans remettre ce point en cause, je voudrais insister sur le fait que Klein n'avait pas ici en tête que des principes généraux sur les groupes de substitutions.

La suite de l'extrait précédent montre en effet que Klein faisait aussi référence à des aspects plus techniques de la théorie des substitutions et des équations :

> Les notions de commutativité, de similitude, etc., trouveraient emploi comme dans la théorie des substitutions. Le traitement d'une multiplicité tiré de la considération d'un groupe fondamental de transformations apparaîtrait comme une application de la théorie des transformations.
>
> Dans la théorie des équations ce sont tout d'abord les fonctions symétriques des coefficients qui offrent de l'intérêt, mais ensuite ce sont les expressions qui demeurent inaltérées, sinon par toutes les permutations des racines, au moins par un grand nombre d'entre elles. Dans le traitement d'une multiplicité avec un groupe pris comme fondamental, nous voudrions d'abord, par analogie, déterminer les corps [...], les figures qui demeurent inaltérées par toutes les transformations du groupe ; mais il est des figures qui n'admettent pas toutes les transformations du groupe, mais seulement quelques-uns d'entre elles, et ces figures, au sens du traitement basé sur le groupe, sont particulièrement intéressantes, elles jouissent de propriétés remarquables. [Klein 1974, p. 36-37]

Ces mentions aux techniques de la théorie des substitutions renvoient donc à des savoirs que Klein avait probablement acquis en particulier dans les livres qu'il cite : le *Cours d'algèbre supérieure* de Serret (peut-être dans sa version allemande) et le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Jordan. Elles montrent donc que l'analogie voulue par Klein

66. [Hawkins 1984, p. 444 ; Rowe 1989b, p. 211]. Voir aussi [Wussing 1969, p. 142 ; Eckes 2011, p. 115], qui insistent sur le côté classificatoire provenant de la théorie des groupes.

entre théorie de Galois et géométrie n'est pas que nourrie par des principes généraux portant sur les groupes, mais aussi par des considérations qu'il a pu développer en travaillant lui-même sur le sujet des équations et des substitutions.

Pour repérer de tels travaux, on peut regarder les *Gesammelte mathematische Abhandlungen* de Klein. Dans ces œuvres, il existe une section dévolue à la théorie des équations et des groupes de substitutions — distincte de celle consacrée à ce qui relève du *Programme d'Erlangen* —, et une seule des publications qui y sont listées est antérieure au *Programme*. Il s'agit de l'article intitulé « Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen » qui faisait partie du corpus des équations de la géométrie et dont j'ai ré-exposé les principales idées précédemment, [Klein 1871b].

Soulignons que les œuvres complètes de Klein avaient été publiées de son vivant : les trois tomes sont parus en 1921, 1922 et 1923 respectivement, alors que Klein est mort en 1925. Dans la préface du premier tome, les éditeurs Fricke et Ostrowski indiquent que Klein avait lui-même activement participé à l'édition de ses œuvres, et en particulier à leur organisation [67]. L'existence et les intitulés des différentes sections sont donc fortement empreints des choix de Klein, et peuvent donner une image de ses recherches éclatées en plusieurs lignes disjointes et indépendantes. Je veux montrer qu'au contraire, il existe des rapprochements entre elles : ici, entre la section sur le *Programme d'Erlangen* et celle sur la théorie des équations et des substitutions.

L'article [Klein 1871b] se présente donc comme un point d'entrée pour évaluer les connaissances de Klein en théorie des équations au moment où il élabore le *Programme d'Erlangen*. Or, comme nous l'avons vu, cet article se basait explicitement sur des considérations liées aux équations de la géométrie, décrits comme des exemples particuliers et intuitifs. Klein y mentionnait le *Traité des substitutions et des équations algébriques*, ouvrage également cité dans *Programme d'Erlangen*. Et, comme dans le *Programme*, l'accent était mis sur les groupes de transformations de l'espace, en tant que remplaçants des groupes de substitutions dans une incarnation géométrique des équations algébriques générales.

Les mentions de la théorie de Galois dans le *Programme* renvoient donc au corpus des équations de la géométrie, dont nous avons vu que Klein était un des contributeurs principaux. Elles montrent ainsi des connaissances et des manières de faire autour d'objets liant théorie des équations (et des substitutions) et géométrie avec lesquelles Klein était familier en 1872. Le point ici est de remarquer que ces connaissances et manières de faire ont participé à l'élaboration du *Programme d'Erlangen*. Les équations de la géométrie se présentent donc comme une des influences plus cachées ayant joué sur la constitution du *Programme d'Erlangen*, aux côtés des géométries non-euclidiennes ou des travaux communs avec Lie sur les courbes et surfaces V.

Comme T. Hawkins l'a montré, le *Programme d'Erlanegn* lui-même a connu une diffu-

67. [Klein *Œuvres 1*, p. IV].

sion assez faible entre 1872 et le début des années 1890 — je reviendrai sur ce point dans la conclusion du chapitre, préférant suivre la chronologie, et présenter quelques travaux d'avant 1890. En revanche, une série d'articles ont permis de répandre les idées de Klein : ceux sur les équations algébriques, et notamment sur l'équation du cinquième degré.

5.2.3 L'icosaèdre et le mémoire de Clebsch

Les travaux de Klein sur l'équation du cinquième degré et l'icosaèdre ont déjà fait l'objet de descriptions historiques, et il n'est pas question pour moi d'y revenir en détail [68]. Je voudrais toutefois d'abord souligner que les idées générales que Klein exposait dans son article sur la représentation géométrique des résolvantes, [Klein 1871b], y sont bien mises en œuvre. En effet, un des points de l'approche de Klein consiste à considérer les cinq racines de l'équation du cinquième degré comme autant de coordonnées pentaédriques d'un point de l'espace [69] et à montrer que leur groupe de substitutions est isomorphe au groupe des transformations de l'espace laissant invariant un icosaèdre régulier [70].

Par ailleurs, le mémoire de Clebsch que nous avons étudié précédemment est cité à quelques reprises dans le livre, [Klein 1884], mais pas pour la méthode générale d'interprétation géométrique de l'équation du cinquième degré basée sur les substitutions quadratiques. En effet, Clebsch est mentionné pour avoir étudié la surface cubique diagonale [71], sans que les rapports qu'il a établis entre cette surface et l'interprétation géométrique de la quintique soient mis en avant par Klein.

On peut se demander pour quelles raisons Klein a ainsi évité de mentionner plus précisément les travaux de Clebsch qui portaient sur la même thématique. Une piste possible est de voir cela comme un effet de la volonté de la part de Klein de promouvoir l'utilisation des groupes de transformations. En effet, comme je l'ai expliqué, Clebsch se basait sur de considérations touchant au quintilatère et autres courbes associés sans jamais faire appel à de groupes (de quelque nature que ce soit). Passer sous silence ces méthodes permet donc à Klein d'augmenter son autorité sur ce qui est une bonne interprétation géométrique. L'utilisation des groupes en géométrie, comme préconisé par le *Programme d'Erlangen*, était bien vue comme une nouveauté, notamment en comparaison avec les façons de faire de Clebsch. C'est ce que souligne rétrospectivement Klein (en 1921), se souvenant des temps ayant tout juste précédé le *Programme* :

68. Voir [Gray 2000] que j'ai déjà pu citer.

69. Cinq coordonnées homogènes définissent un point dans un espace de dimension 4, mais demander que leur somme soit nulle permet de les voir comme des coordonnées pentaédriques d'un point d'un espace de dimension 3 — cette condition revient à considérer des équations du cinquième degré n'ayant pas de terme en x^4.

70. L'article [Klein 1871b] est cité dans [Klein 1884, p. 160]. En citant cet article, Klein fait également mention de l'interprétation géométrique des résolvantes et de la transformation de Tschirnhaus. Notons toutefois que cette dernière n'est pas abordée dans l'article en question, mais qu'elle l'est dans [Clebsch 1871b].

71. [Klein 1884, p. 166, 218, 226].

> Durant l'élaboration de mon programme, j'ai naturellement toujours pensé à ce que mon cher professeur Clebsch (que je devais certainement remercier pour ma nomination précoce à Erlangen) aurait dit sur mes explications, qui diffèrent tant de sa façon de penser systématico-projective. En vain ! Car Clebsch succomba soudainement à un cas de diphtérie le 7 novembre 1872, à seulement 39 ans. Son opinion, que j'attendais avec un mélange d'espoir et de crainte, ne vint donc jamais [72]. [Klein *Œuvres 1*, p. 412]

Cette citation montre bien les changements que Klein avait conscience de provoquer en insistant toujours plus sur l'importance des groupes de transformations, surtout en regard de la géométrie de son professeur.

Une autre piste pouvant expliquer la disparition presque totale de Clebsch dans le livre sur l'icosaèdre est plus indirecte. Nous avons vu que Clebsch n'avait pas remis en question les approches de Hermite et de Kronecker sur l'équation du cinquième degré. Au contraire, il les considérait comme deux façons possibles de résoudre cette équation, et son objectif était uniquement de les revêtir d'un habillement géométrique. Or, les historiens ont souligné le fait que Klein avait voulu se démarquer des méthodes de Hermite et de Kronecker [73]. Il est donc possible que la contribution de Clebsch sur le sujet ait été minimisée par ce biais, prenant pour acquis des travaux que Klein comptait remanier à sa façon.

5.2.4 La résolution de l'équation aux vingt-sept droites par Klein, 1888

Pour voir sur un exemple comment Klein a mis plus tard en application ses principes de l'icosaèdre, revenons sur le lien entre les vingt-sept droites et les fonctions hyperelliptiques. Nous avons déjà vu qu'en 1888, Klein était revenu sur ce lien dans un article du corpus des équations de la géométrie, [Klein 1888]. Cet article est un extrait d'une lettre écrite par Klein et adressée à Jordan. Comme je l'ai expliqué au chapitre 3, Klein explique que les idées qui y sont exprimées proviennent des travaux que son élève Alexander Witting avait fait sur les fonctions hyperelliptiques quelques temps auparavant [74].

Klein avait alors pressenti une nouvelle façon de rapprocher les fonctions hyperelliptiques et les vingt-sept droites et l'avait fait savoir à Jordan, qui lui avait écrit en retour (juillet 1886) :

> Ce que vous m'écrivez sur les études de M. Witting m'intéresse vivement. Je suis persuadé que le rapprochement que j'ai signalé entre la trisection des fonctions elliptiques et les droites des surfaces cubiques n'est pas dû à un hasard et que les deux problèmes

72. « Bei der Ausarbeitung meines Programms habe ich selbsverständlich immer daran gedacht, was wohl mein verehrter Lehrer Clebsch (dem ich zweifellos auch die frühzeitige Berufung nach Erlangen zu verdanken hatte) zu meinen Darlegungen, die so vielfach von seiner systematisch-projectiven Denkweise abwischen, sagen würde. Vergeblich! Denn Clebsch ist am 7. November 1872, im Alter von nur 39 Jahren, einem Anfall von Diphteritis plötzlich erlegen. Es kam also nicht zu der Stellungsnahme, der ich mit einer Mischung von Hoffnung und Furcht entgegensah. »

73. [Goldstein 2011a ; Petri & Schappacher 2004].

74. Ces travaux ont été publiés dans [Witting 1887a ; Witting 1887b].

> doivent être identiques au fond, et j'aimerais fort qu'on me le montrât [75].

Klein lui avait alors envoyé la lettre qui devait paraître un peu plus tard sous la forme de l'article [Klein 1888] dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, dont Jordan avait pris la direction en 1885. Ce dernier écrivit à Klein, en août 1887 :

> Merci de l'envoi de votre lettre sur les 27 droites. Elle est non seulement intéressante, mais admirablement claire, et quoi que vous en disiez, en très-bon style. À peine si j'ai eu à y faire ça et là quelques retouches tout à fait insignifiantes avant de l'adresser à Gauthier Villars [76].

L'article de Klein s'intitule *Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique.* Klein commence par poser le problème : « L'équation des 27 droites d'une surface cubique et la trisection des fonctions hyperelliptiques du premier ordre ayant le même groupe, il [s'agit] de réduire, s'il [est] possible, le premier problème au second. » [Klein 1888, p. 169].

Pour cela, il rappelle d'abord les grandes lignes de sa méthode de résolution des équations du cinquième degré en lien avec l'icosaèdre. Klein expose ensuite la trame des « considérations tout à fait analogues sur les fonctions hyperelliptiques (du premier ordre) et les équations du vingt-septième degré », qu'il a en tête, [Klein 1888, p. 171]. La première étape consiste donc à construire une forme normale pour l'équation de transformation des fonctions hyperelliptiques, et la seconde à pouvoir réduire l'équation aux vingt-sept droites à cette forme normale. Tout juste esquissé ici par Klein, ce procédé de résolution a ensuite été complètement détaillé par Heinrich Burkhardt dans trois imposants mémoires publiés en 1890, 1891 et 1893 [77].

Ces travaux s'inscrivent donc bien dans la lignée des recherches de Klein des années 1870-1880 sur les équations algébriques. La remarque suivante de Burkhardt est d'ailleurs révélatrice des rapprochements de domaines mathématiques caractéristiques de ces recherches :

> Les résultats auxquels nous sommes parvenus n'ont pu être atteints que par la conjonction de tous les outils qu'offrent à la recherche la théorie de fonctions de Riemann, la théorie des invariants au sens strict, la *Liniengeometrie* et la théorie des équations de Galois. Les présentes recherches veulent être comprises comme une contribution à l'effort pénétrant, maintenant toujours plus puissant, consistant à libérer ces différentes disciplines de leur isolement mutuel [78]. [Burkhardt 1893, p. 343]

75. Extrait d'une lettre de Jordan à Klein, datée du 26 juillet 1886 et conservée aux archives de Göttingen sous la référence Cod. Ms. F. Klein 10 : 13. La lettre entière est retranscrite en annexe E.

76. Extrait d'une lettre de Jordan à Klein, datée du 28 août 1887 et conservée aux archives de Göttingen sous la référence Cod. Ms. F. Klein 10 : 16. La lettre entière est retranscrite en annexe E.

77. [Burkhardt 1890 ; Burkhardt 1891 ; Burkhardt 1893].

78. « [D]ie Resultate zu welchen wir gelangt sind, haben wir nur erreicht durch Heranziehung aller Hilfsmittel, welche die Riemann'sche Functionentheorie, Invariantentheorie in engeren Sinne, Liniengeometrie,

Comme le laisse entendre cette citation, la géométrie à l'œuvre dans ces travaux n'est pas en rapport direct avec la configuration des vingt-sept droites : c'est la géométrie des droites, la *Liniengeometrie* telle que Klein l'avait exposée dans [Klein 1870] qui est mise en valeur.

Effectivement, Klein écrit lui-même que la provenance géométrique du groupe des vingt-sept droites n'importe pas pour le problème :

> Considérons maintenant l'équation du vingt-septième degré des droites d'une surface cubique. Comme vous l'avez prouvé dans votre Traité, le groupe de cette équation, après adjonction d'une racine carrée, se trouve isomorphe sans mériédrie au groupe des 25920 substitutions fractionnaires des quotients des z. Or je ne considérerai pas quelques autres qualités spéciales de cette équation, mais je m'occuperai, dans ce qui suit, de toutes les équations du vingt-septième degré ayant le même groupe. [Klein 1888, p. 173-174]

De ce point de vue, on constate ainsi la disparition de l'objet « équation aux vingt-sept droites » au profit d'un groupe dont Klein ne retient que des propriétés désincarnées géométriquement. Autrement dit, si les vingt-sept droites (et de leur équation) donnent encore lieu à des recherches à la fin des années 1880, leurs relations d'incidence et les objets comme les triangles ou les doubles-six ne sont plus évoquées.

En outre, il est intéressant de relever que Jordan désire qu'on lui montre pourquoi les problèmes des vingt-sept droites et des fonctions hyperelliptiques sont les mêmes « au fond ». Cela suggère en effet que la réponse qu'il avait lui-même apportée plus de quinze auparavant avec les ennéaèdres n'est pas, ou plus, satisfaisante. J'avais interprété ce recours aux ennéaèdres comme un problème de communication dans un groupe social pour lequel les bonnes réponses (compréhensibles) étaient celles faisant appel à ce que j'ai appelé les objets dérivés. Le changement est donc manifeste : ces objets ne sont plus ceux qui attirent l'attention, et la bonne réponse au problème est celle provenant de l'analogie avec les travaux sur l'icosaèdre.

5.3 Des groupes d'équations de la géométrie

J'en viens maintenant à deux autres textes datés de la même époque que les précédents, à partir desquels je vais continuer à illustrer la disparition des façons de faire caractéristique liées aux équations de la géométrie autour de 1870. Le premier de ces textes est un article de Heinrich Weber de 1884, [Weber 1884], consacré à l'étude du groupe de Galois de l'équation aux vingt-huit tangentes doubles. Le second est la thèse faite par Friedrich Kühnen en 1888, sur le sujet du groupe de l'équation aux vingt-sept droites. Notons que ces deux textes étaient listés par Henderson dans son livre sur les vingt-sept droites des

Galois'sche Gleichungstheorie der Untersuchung darbieten. Als ein Beitrag zu den jetzt immer mächtiger durchdringenden Bestrebungen, diese verschiedenen Disciplinen aus ihrer gegenseitigen Isolierung zu befreien, wollen diese Untersuchungen verstanden sein. »

surfaces cubiques, dans son paragraphe sur l'approche du sujet par la théorie des groupes. En outre, l'article de Weber a été par la suite repris en grande partie dans le chapitre de son *Lehrbuch der Algebra* sur les vingt-huit tangentes doubles que j'avais laissé de côté au chapitre 3.

5.3.1 Un article de Weber sur les vingt-huit tangentes doubles, 1884

L'article de Weber est intitulé *Ueber die Galois'sche Gruppe der Gleichung 28ten Grades, von welcher die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung abhängen*, [Weber 1884]. Weber commence par y expliquer qu'il va utiliser des résultats sur les fonctions thêta à trois variables qu'il a développés dans un livre qu'il a écrit sur ce sujet quelques années auparavant, [Weber 1876]. D'après lui, ces résultats conduisent à « une présentation claire et élégante du groupe de Galois de l'équation du vingt-huitième degré dont dépendent les tangentes doubles, lequel groupe permet de déceler facilement et simplement les particularités algébriques de cette équation [79] ».

Remarquons que Weber aborde dès le début de son article la question du domaine de rationalité à considérer. Il indique ainsi qu'il faut considérer pour cela l'ensemble des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation de la courbe quartique donnée. En outre, il précise qu'il n'est pas important de distinguer si les coefficients eux-mêmes sont des nombres rationnels ou non [80]. En fait, dans toute la suite de l'article, Weber ne revient pas sur la question du domaine de rationalité. Son approche du groupe de Galois est basée sur des considérations de substitutions de racines, comme dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Jordan : c'est le genre de considération que l'on retrouvera dans une partie du *Lehrbuch der Algebra*. En particulier, les considérations de Weber au sujet du groupe de Galois étudié dans l'article discuté ici ne sont pas celles inspirées de celle de Richard Dedekind, mettant en valeur les extensions du domaine de rationalité [81].

Le résultat principal provenant des recherches de Weber sur les fonctions thêta est que les racines de l'équation aux vingt-huit tangentes doubles peuvent se grouper sept par sept, et ce de 288 façons différentes. Plus précisément, la propriété de ces ensembles de sept racines, appelés *Siebenersysteme*, est que les sept racines de chacun d'eux permettent de trouver rationnellement les vingt-et-une restantes. Ainsi, Weber note $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_7$ les racines d'un *Siebenersystem* donné ; il existe alors une fonction rationnelle f telle que

$$\xi_{12} = f(\xi_1, \xi_2 \mid \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7)$$

est encore une racine de l'équation aux vingt-huit tangentes doubles. Le symbole « | » qui

79. « [Diese Resultate führen] zu einer übersichtlichen und eleganten Darstellung der Galois'schen Gruppe der Gleichung 28ten Grades, von welcher die Doppeltangenten abhängen, welche die algebraischen Eigenthümlichkeiten dieser Gleichung leicht und einfach erkennen lässt. » [Weber 1884, p. 489].

80. Voir [Weber 1884, p. 489].

81. Cette approche est exposée une dizaine d'années plus tard, dans [Weber 1893]. Voir à ce sujet [Corry 2004, p. 34].

apparaît dans la formule signifie que la fonction f est invariante par substitution des cinq racines situées à droite de la barre ou par transposition de celles à gauche. De plus, une substitution remplaçant ξ_1, ξ_2 par deux autres racines ξ_h, ξ_k change la valeur de f, laquelle devient une nouvelle racine [82] notée ξ_{hk}.

Cette propriété est à la base de l'étude du groupe G de l'équation aux vingt-huit tangentes doubles [83]. En effet, Weber montre que G est formé des substitutions entre les racines ξ obtenues de la façon suivante. Pour un *Siebenersystem* donné $\xi_1, \ldots, \xi_7$, on considère les substitutions entre ces sept racines ; les relations données par la formule f montrent que ces substitutions induisent alors des permutations entre les racines restantes, et ceci de façon entièrement déterminée par la substitution opérant sur les sept premières. Comme il y a 288 *Siebenersysteme*, Weber en déduit que le groupe G est formé de $288 \cdot 7!$ substitutions.

À partir de cela, Weber entame la recherche de sous-groupes de G. Par exemple, il montre que G possède comme sous-groupe le groupe symétrique $\mathfrak{S}_8$ et exhibe 35 substitutions notées $U_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''}$ telles que [84]

$$G = \mathfrak{S}_8 + \sum \mathfrak{S}_8 U_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''}.$$

En termes actuels, les trente-cinq substitutions $U_{\iota,\iota',\iota'',\iota'''}$ ainsi que l'identité sont ainsi les représentants des classes de $G/\mathfrak{S}_8$.

En utilisant de telles décompositions du groupe G, et grâce à la forme explicite de ses générateurs, Weber parvient ensuite à montrer par exemple que le discriminant de l'équation aux vingt-huit tangentes doubles est le carré d'une quantité rationnelle, ou encore que G est un groupe simple. Weber se propose aussi de chercher les sous-groupes non distingués (il parle de « diviseurs impropres »), qui correspondent à des équations « dont les racines abaissent le groupe de l'équation aux vingt-huit tangentes doubles [85] ». Il renvoie d'ailleurs, à cette occasion, au *Traité des substitutions et des équations algébriques*, indiquant que Jordan a déjà répondu à cette question, mais de façon différente.

Parmi les sous-groupes ainsi trouvés, Weber met en particulier en évidence un sous-groupe d'indice 336, et exhibe une fonction formée de 18 des racines ξ qui lui correspond :

$$w = \xi_{16}\xi_{26}\xi_{36}\xi_{46}\xi_{56}\xi_7 + \xi_{17}\xi_{27}\xi_{37}\xi_{47}\xi_{57}\xi_6 + \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5\xi_{67}.$$

Ce qu'il est intéressant de remarquer est que Weber en propose une interprétation géomé-

82. Il y a donc bien $\binom{7}{2} = 21$ racines du type ξ_{hk}, avec $1 \leqslant h, k \leqslant 7$ et $\xi_{hk} = \xi_{kh}$.

83. Dans le chapitre du *Lehrbuch der Algebra*, Weber établit la propriété f non pas par les fonctions thêta, mais par de propriétés géométriques : les *Siebenersysteme* correspondent à des ensembles de sept tangentes doubles liées entre elles par des relations d'incidence particulières. La suite du chapitre est quant à elle quasiment identique à l'article que nous sommes en train de décrire.

84. Dans cette notation, les indices $\iota, \iota', \iota'', \iota'''$ sont des entiers.

85. « Um solche Gleichungen zu ermitteln, deren Wurzeln die Gruppe der Doppeltangentengleichung erniedrigen, hat man uneigentliche Divisoren der Gruppe [G] aufzusuchen. » [Weber 1884, p. 498].

trique :

> On peut donner l'interprétation géométrique suivante à ce groupe : on peut choisir 18 tangentes doubles qui forment trois hexagones de Brianchon, et ceci de 336 manières différentes [86]. [Weber 1884, p. 503]

Aucune explication n'est donnée par Weber [87]. On pourra toutefois noter que les résolutions spécifiques aux équations de la géométrie ne se retrouvent pas ici ; l'attention est portée surtout sur les groupes et sous-groupes de substitutions. En particulier, cet exemple montre que Weber ne fait pas appel à ce que j'avais appelé des « réduites géométriques » : c'est au contraire le résultat algébrique (l'existence d'un sous-groupe particulier) qui est transcrit en termes de configuration géométrique. De plus, Weber ne semble pas vouloir formuler le résultat cité précédemment en termes d'une équation de la géométrie dont les racines seraient des triplets d'hexagones de Brianchon.

5.3.2 La thèse de Friedrich Kühnen, 1888

Freidrich Kühnen (1858-1940) a étudié les mathématiques, la physique et la géodésie à divers endroits : Bonn, Paris, Göttingen, Berlin, Genf et Marburg [88]. C'est dans cette dernière ville que Kühnen a préparé sa thèse, laquelle fut publiée en 1888 et intitulée *Ueber die Galois'sche Gruppe der Gleichung 27. Grades, von welcher die Geraden auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung abhängen*, [Kühnen 1888]. Après cette thèse, Kühnen resta quelque temps à Marburg en tant que professeur assistant, puis partit à l'Institut de géodésie de Potsdam en 1891. Au vu des titres de ses publications listées dans [Engelmann 1982], Kühnen n'a abordé le sujet des vingt-sept droites ou de la théorie de Galois que dans sa thèse ; le reste des publications se rapporte à la géodésie.

Je n'ai trouvé aucune mention explicite du professeur avec lequel Kühnen a préparé sa thèse. Plusieurs indices laissent penser qu'il s'agit de Weber. Outre le fait que ce dernier était à Marburg entre 1884 et 1892 [89], on trouve dans la thèse de Kühnen une référence à l'article décrit précédemment, [Weber 1884] — Kühnen le cite pour signaler qu'il en a emprunté les notations et les méthodes. D'ailleurs, comme le laisse présager la ressemblance de leurs titres, les sujets de la thèse de l'un et de l'article de l'autre sont apparentés : il s'agit de l'étude du groupe de Galois de l'équation aux vingt-huit tangentes doubles pour l'un, et aux vingt-sept droites pour l'autre. Enfin, on pourra ajouter qu'une thèse plus tardive de Fritz Glaser, [Glaser 1911], porte encore un titre tout à fait similaire [90] et partage également

86. Dieser Grupper kann die folgende geometrische Interpretation gegeben werden : Es lassen sich auf 336 Arten 18 Doppeltangenten auswählen, welche drei Brianchon'sche Sechsecke bilden.

87. Je rappelle qu'un hexagone de Brianchon est un hexagone dont les diagonales joignant les sommets opposés sont concourantes. La théorème de Brianchon dit qu'un hexagone est de ce type si et seulement s'il est circonscrit à une conique.

88. Les informations de ce paragraphe sur Kühnen sont tirées de [Engelmann 1982].

89. [Schappacher & Volkert 2005].

90. *Ueber die Galoissche Gruppe der Gleichung 16. Grades, von der die 16 Knotenpunkte der Kummerschen Fläche 4. O. abhängen.*

notations et méthodes avec l'article de Weber ; de plus, Glaser y signale explicitement qu'il l'a effectuée avec Weber.

Venons-en maintenant au contenu de cette thèse de Kühnen, dévolue au groupe de Galois de l'équation aux vingt-sept droites. Kühnen y rappelle d'abord la définition des doubles-six de Schläfli ainsi que la notation des vingt-sept droites qui en découle, et les règles d'incidences associées : un double-six est un ensemble de douze droites $a_1, \ldots, a_6$, $b_1, \ldots, b_6$ parmi les vingt-sept d'une surface cubique, telles que si on les représente avec le tableau

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6, \end{matrix}$$

alors chaque droite intersecte uniquement celles qui ne sont situées ni sur la même ligne, ni sur la même colonne. Ainsi, lorsque $i \neq j$, les droites a_i et b_j sont sécantes ; il existe alors une troisième droite (parmi les vingt-sept), notée c_{ij}, avec laquelle elles forment un triangle. Il y a 36 doubles-six et ils permettent notamment de retrouver les 45 triangles formés à partir des vingt-sept droites.

Kühnen présente alors ces relations d'incidence comme la base d'étude pour le groupe de l'équation aux vingt-sept droites :

> Les relations entre les droites de la surface se transposent aux racines de l'équation algébrique de degré 27 dont dépendent les 27 droites de la surfaces générale du troisième ordre, et elles peuvent ainsi servir à mettre en place le groupe de Galois de l'équation[91]. [Kühnen 1888, p. 7]

Pour réaliser cela, Kühnen note d'abord ij les racines correspondant aux droites c_{ij}, pour $1 \leqslant i, j \leqslant 6$, puis $i7$ et $i8$ les racines correspondant respectivement aux droites b_j et a_i. Les relations d'incidence entre les droites sont alors traduites en relations entre les racines. Par exemple, Kühnen explique qu'il existe une fonction rationnelle f telle que l'on ait par exemple

$$17 = f(18 \mid 28, 38, 48, 58, 68),$$

ce qui correspond au fait que la droite b_1 est sécante aux droites $a_2, \ldots, a_6$. Le symbole « | » qui apparaît dans cette formule permet à Kühnen de préciser que toute permutation entre $28, 38, 48, 58, 68$ ne change pas la valeur de f, mais que si 18 est changé en $i8$, alors la valeur 17 de f est changée en $i7$ — on voit ici de façon claire la ressemblance avec l'article de Weber. Des relations analogues sont données en lien avec les droites c_{ij}. Ainsi, il existe, d'après Kühnen, une fonction rationnelle φ telle que

$$12 = \varphi(18, 27) = \varphi(17, 28),$$

91. « Die Beziehungen zwischen den Geraden der Fläche lassen sich auf die Wurzeln der algebraischen Gleichung 27. Grades übertragen, von welcher due 27 Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung abhängen, und sir können dazu dienen die Galois'sche Gruppe der Gleichung aufzustellen. »

car les droites c_{12}, a_1 et b_2 (resp. c_{ij}, a_2 et b_1) sont sécantes. Kühnen indique alors que le groupe de Galois G de l'équation aux vingt-sept droites est formé de toutes les substitutions de ses racines qui préservent les relations f et φ.

On pourra observer que le groupe de Galois de l'équation aux vingt-sept droites est ainsi relié aux relations d'incidence existant entre les droites, comme c'était le cas dans le *Traité* de Jordan. Mais, au contraire de l'approche de ce dernier, ces relations sont uniquement exprimées en termes de relations rationnelles entre les racines : il n'y a pas de création d'une fonction algébrique de ces racines dont le groupe est égal à celui de l'équation.

Kühnen utilise ensuite les relations f et φ pour lister des substitutions qui engendrent G, en chercher l'ordre ainsi que des sous-groupes distingués ou non. Il cite d'ailleurs le *Traité* de Jordan pour le résultat selon lequel G ne possède qu'un seul sous-groupe distingué (d'indice 2), mais que Kühnen propose de démontrer de façon différente. Noter que, comme chez Jordan, les résultats sur G sont pour la plupart traduits en des propriétés de l'équation aux vingt-sept droites : par exemple, Kühnen déduit que le discriminant de cette équation est le carré d'une quantité rationnelle à partir du fait que toutes les substitutions de G sont composées d'un nombre pair de transpositions.

En revanche, une différence frappante entre la thèse de Kühnen et les travaux de Jordan concerne la recherche des sous-groupes qui ne sont pas transitifs [92]. Kühnen écrit :

> Pour l'équation du vingt-septième degré considérée, les diviseurs intransitifs du groupe sont de grand intérêt à cause de leur signification géométrique, comme c'est en général le cas. Ces diviseurs peuvent servir à déduire les positions mutuelles et les figures des vingt-sept droites sur la surface générale du troisième ordre [93]. [Kühnen 1888, p. 24]

L'accent est ensuite mis sur le fait que c'est l'algèbre qui permet de retrouver les « figures » associées aux vingt-sept droites :

> [Ces positions mutuelles et figures] ont déjà été exposées de façon complètement claire par des considérations géométriques de Steiner, Cremona, Schläfli [...], mais nous voulons ici déduire les mêmes résultats d'une manière algébrique [94]. [Kühnen 1888, p. 24-25]

Comme il le précise un peu plus loin dans sa thèse, Kühnen entend ainsi montrer la « fécondité de la méthode algébrique [95] ». Il va ainsi mettre en évidence un sous-groupe d'indice 45, à la suite de quoi il en déduit qu'il existe 45 triangles formés à partir des vingt-sept droites. D'autres sous-groupes sont trouvés, associés aux triplets de doubles trièdres de Steiner, etc.

92. C'est-à-dire ceux qui ne permettent pas de remplacer n'importe quelle racine par n'importe qu'elle autre.

93. « Bei der betrachteten Gleichung 27. Grades sind die intransitiven Divisoren der Gruppe wegen ihrer geometrischen Deutung von grösserem Interesse, als dies allgemein der Fall ist. Dieselben können dazu dienen, die gegenseitige Lage und Figurationen der 27 Geraden auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung zu ermitteln. »

94. « Diese sind zwar von Steiner, Cremona, Schläfli [...] durch geometrische Betrachtung bereits vollständig klar gelegt, doch wollen wir hier dieselben Resultate in algebraischer Weise ableiten. »

95. « Um jedoch die Fruchtbarkeit der algebraischen Methode zu zeigen... », [Kühnen 1888, p. 25].

Il est donc intéressant de remarquer que le processus est ici inversé par rapport à la présentation de Jordan de ce que j'avais appelé les « réduites géométriques ». Alors que dans le *Traité*, les réduites étaient directement déduites de l'existence des objets comme les triangles, les trièdres de Steiner ou les doubles-six de Schläfli, c'est maintenant l'étude du groupe qui doit servir à retrouver les différentes configurations géométriques. La façon de faire propre aux équations de la géométrie dans les textes du corpus de ces équations et datés d'autour de 1870 n'apparaît donc pas du tout dans la thèse de Kühnen. C'est même le contraire (la recherche de sous-groupes qui sont interprétés géométriquement *a posteriori*) qui est présenté comme une « méthode algébrique fructueuse ».

5.4 Groupes et géométrie : une acculturation ?

En suivant les équations de la géométrie à partir de 1871, plusieurs rapports entre groupes et géométrie ont été vus dans ce chapitre. Nous avons ainsi constaté que si un intérêt subsistait encore dans les années 1880 pour le sujet des groupes de Galois associés à ces équations, certaines des façons de faire typiques que j'ai mises en évidence au chapitre précédent étaient absentes des travaux correspondants. La même constatation pourrait d'ailleurs être faite sur d'autres textes du tournant du siècle : outre le *Lehrbuch der Algebra* de Weber que j'ai déjà discuté, certaines équations de la géométrie font encore l'objet de chapitres dans le manuel de Julius Petersen, [Petersen 1897], ou les livres sur les groupes finis auxquels Dickson avait participé, [Dickson 1901b ; Miller et al. 1916], mais on n'y trouve plus de procédés de résolution par les objets dérivés [96].

J'ai aussi insisté sur le rôle des équations de la géométrie dans la constitution du *Programme d'Erlangen*, en montrant que Klein avait en tête ces objets liant groupes (de substitutions) et géométrie au moment où il insistait sur l'importance des groupes de transformations. Les derniers textes que j'ai étudiés dans ce chapitre datent de la fin des années 1880 ; c'est justement à partir de cette époque que le *Programme d'Erlangen* et ses idées ont commencé à être largement diffusés [97], notamment à travers une réimpression allemande (1893) et des traductions en italien (1890), français (1891), anglais (1893), hongrois (1897), russe (1895-1896) et polonais (1905). Sur le sujet des vingt-sept droites, il est possible de repérer des traces de rapprochements entre groupes et géométrie dans des travaux de ces années-là. Par exemple, on peut lire dans des articles d'Ernesto Pascal, [Pascal 1892 ; Pascal 1893], des considérations de « sous-groupes de substitutions laissant fixes un plan tangent triple [98] », qui indiquent bien que les substitutions sont vues comme agissant sur les objets géométriques eux-mêmes, et pas sur des racines d'une équation.

96. En revanche, on ne trouve pas d'équations de la géométrie dans le manuel de Henri Vogt, [Vogt 1895].
97. Voir [Hawkins 1984], déjà cité.
98. « Sottogruppo di sostituzioni che lasciano fisso un piano tritangente ». Remarquer qu'à la fin des années 1880, Pascal avait fait une partie de ses études à Göttingen, où il travailla avec Klein. Voir [Berzolari 1939-40].

Nous voyons donc que les équations de la géométrie ont d'une part subsisté au moins jusqu'au début du XX^e siècle en tant qu'exemples d'équations particulières, au même titre que les équations cyclotomiques, modulaires, etc., et d'autre part participé aux modifications de points de vue sur la géométrie elle-même. Si l'on pense en termes de cultures, nous pouvons donc décrire la situation comme celle d'une acculturation entre théorie des groupes (en constitution) et géométrie, initiée autour des équations de la géométrie dont le système culturel ne formerait qu'une étape transitoire [99]. Ce concept d'acculturation a été défini par les anthropologues Robert Redfield, Ralph Linton et Melville Herskovits pour rendre compte des contacts entre groupes culturels :

> L'acculturation est l'ensemble des phénomènes qui résultent d'un contact continu et direct entre des groupes d'individus de cultures différentes et qui entraînent des changement dans les modèles culturels initiaux de l'un ou des deux groupes [100]. [Redfield et al. 1936, p. 149]

Dans le cas présent, nous voyons donc, à moyen terme, les équations de la géométrie devenir des exemples usuels de la théorie des groupes (ou des équations) et même en modifier la vision, Klein voulant incarner géométriquement toute équation ; nous constatons aussi leur effet sur l'incorporation de la théorie des groupes en géométrie.

Je voudrais ainsi d'abord revenir sur le sujet des équations de la géométrie lui-même. Le corpus que j'ai créé pour l'étudier se basait sur une section du chapitre de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* consacré à la théorie de Galois. J'ai par conséquent été conduit à privilégier un certain type de travaux dans lesquels j'ai étudié des articulations entre groupes et équations d'une part, et géométrie d'autre part. D'autres domaines de recherche mathématique en lien avec les neuf points d'inflexion, les vingt-sept droites, etc., ne sont pas apparus par ce biais. Nous pouvons ainsi penser à l'approche des configurations géométriques mise en place par Karl Theodor Reye à partir de 1876, [Reye 1876], ou encore à la géométrie énumérative que Hermann Schubert expose dans son livre de 1879, [Schubert 1879] — on pourra d'ailleurs noter que ces voies de recherche datent de la fin des années 1870, soit après la période forte des équations de la géométrie. Ces travaux mériteraient bien sûr un examen détaillé pour en déterminer le statut vis à vis des équations de la géométrie, mais aussi du rapprochement entre groupes et géométrie.

Un autre aspect essentiel à prendre en compte pour la question d'acculturation est d'ordre social. Roger Bastide a en effet souligné que lors d'une analyse de contact culturels, il est important d'étudier les facteurs sociaux et politiques présidant à ces contacts [101]. On peut ainsi se demander si des raisons politiques ont joué un rôle dans l'intérêt porté aux

99. Ce que j'ai interprété au chapitre précédent comme une réinterprétation serait un indice supplémentaire de cette acculturation.
100. « Acculturation comprehends phenomena which result when groups of individuals having different cultures come into continuous first-hand contact, with subsequent changes in the original cultural patterns of either of both groups. » La traduction est celle de [Cuche 2010, p. 59].
101. [Bastide 1998 ; Bastide 2007].

équations de la géométrie. Par exemple, une question serait de savoir si Clebsch n'a pas voulu récupérer par leur biais les travaux de Galois d'une manière géométrique, présentée comme intuitive, et concurrente à ce qui était fait à Berlin. Cela renforcerait encore davantage la filiation déjà décrite entre Clebsch et Klein : car la fin des années 1880, période sur laquelle le présent chapitre s'est terminé, est le moment où Klein commence la construction du « grand Göttingen », usant notamment l'intuition géométrique comme bannière de ralliement contre les points de vue Berlinois [102].

102. Voir [Rowe 1989a] et, plus spécifiquement au sujet de l'arithmétisation, [Petri & Schappacher 2007].

Conclusion

L'objectif présenté dans l'introduction générale de la thèse était de suivre l'équation aux vingt-sept droites afin de capter certaines dynamiques à l'œuvre dans les rapprochements entre théorie des groupes et géométrie dans la seconde moitié du XIXe siècle. Arrivé au terme des cinq chapitres, il est temps pour moi de récapituler les principaux résultats obtenus. Faute de l'avoir strictement suivie au fil des chapitres, je voudrais commencer par tracer une chronologie fine de la rencontre entre théorie des substitutions et géométrie.

Comme je l'ai montré aux chapitres 1 et 3, il existait, dans le deuxième tiers du XIXe siècle, un savoir-faire géométrique sur le sujet des courbes et des surfaces algébriques de petit degré. Ce savoir-faire consistait d'abord à mettre en évidence des points ou des droites particulières associés à ces courbes et surfaces. Ces points ou droites étaient alors étudiés du point de vue de leurs relations d'incidence, ou utilisés comme base de travail pour comprendre les courbes ou surfaces auxquelles ils étaient associés. Par exemple, en 1849, Cayley et Salmon avaient montré l'existence des vingt-sept droites des surfaces cubiques et avaient immédiatement mis en évidence les quarante-cinq triangles reflétant leurs relations d'incidence. En 1856, Steiner était arrivé aux mêmes résultats, et avait exhibé d'autres objets créés à partir des vingt-sept droites, comme les triplets de doubles trièdres. Un peu plus tard, en 1858, Schläfli avait quant à lui approfondi la question de la notation des vingt-sept droites (laquelle devait refléter le mieux possible leurs relations d'incidence), prouvant au passage l'existence des trente-six doubles-six ; mais il avait également utilisé les vingt-sept droites et les quarante-cinq triangles pour classifier les surfaces cubiques selon les possibilités pour ces objets d'être réels.

Il est important de noter que ce savoir-faire des configurations géométriques existait avant que ces dernières ne donnent lieu chacune tour à tour à des équations algébriques. Ainsi, lorsqu'en 1847, Hesse étudia l'équation aux neuf points d'inflexion, l'alignement trois à trois de ces points en douze droites était déjà connu au moins depuis le début des années 1830. Hesse avait alors transcrit ce résultat en termes algébriques de relations rationnelles entre des racines, sur lesquelles il s'était basé pour montrer la résolubilité par radicaux de l'équation correspondante — toute la démarche de Hesse se situait encore dans la lignée des travaux de Gauss et d'Abel sur les équations algébriques.

Le cas de l'équation aux seize droites des surfaces quartiques à conique double étudiée par Clebsch est un peu différent, car celui-ci mettait en évidence à la fois les relations d'incidence entre ces droites et les résultats de résolubilité de l'équation associée dans un même article de 1868. La cohabitation dans une même publication de ces deux aspects ne doit toutefois pas faire penser que la théorie des équations y précédait la géométrie : il y a bien dans cet article une manifestation de certaines façons de faire géométriques usuelles pour Clebsch (dont certaines apparaissaient également dans un texte de Kummer de 1863), mobilisées dans un second temps pour la déduction de résultats sur l'équation aux seize droites.

Avec cet article de Clebsch, nous sommes arrivés dans la période de temps dans laquelle se concentre l'essentiel des activités liées aux équations de la géométrie, 1868-1872. C'est dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Jordan (1870) qu'ont été regroupées pour la première fois dans un même chapitre et sous une même appellation « équations de la géométrie » les principales équations du corpus, associées aux neuf points d'inflexion, à un problème de contact entre courbes cubiques et courbes quartiques, aux seize droites des surfaces quartiques à conique double, aux seize points singuliers de la surface de Kummer, aux vingt-sept droites des surfaces cubiques et à d'autres problèmes de contact dont font partie les vingt-huit tangentes doubles des courbes quartiques. Pour chacune de ces équations, Jordan s'était basé sur des résultats géométriques déjà connus, démontrés par Hesse, Clebsch, Steiner ou Kummer. Ces résultats étaient à chaque fois des relations d'incidence, que Jordan exprimait sous la forme de fonctions particulières des racines de l'équation correspondante. L'égalité du groupe d'une équation avec le groupe de la fonction des racines permettait à Jordan de déployer les méthodes de Galois et de montrer par là leur efficacité pour déterminer les propriétés de résolubilité de l'équation. Ces considérations lui avaient aussi permis d'établir un lien entre les équations aux vingt-huit tangentes doubles, aux vingt-sept droites et aux seize droites. Ce faisant, Jordan « retrouvait » une relation entre les vingt-sept droites et les vingt-huit tangentes vue par Geiser un peu auparavant, ce dernier voulant ensuite « confirmer » la « conjecture » de Jordan sur le lien entre les vingt-sept droites et les seize droites. Enfin, un autre outillage que celui des méthodes de Galois était mobilisé par Jordan dans le chapitre des applications géométriques du *Traité*. Il s'agissait des « réduites géométriques » de l'équation aux vingt-sept droites, associées à des objets dérivées de ces dernières, comme les quarante-cinq triangles, les trente-six doubles-six ou encore les quarante ennéaèdres. Ces derniers étaient d'ailleurs apparus en tant que « réponse définitive » au problème du lien entre les vingt-sept droites et la trisection des périodes des fonctions hyperelliptiques. Toutes ces « réduites géométriques » étaient des équations de la géométrie, équivalentes à d'autres équations en raison de l'existence même de certains objets dérivés. Elles se trouvaient non seulement dans le *Traité*, mais aussi dans la majorité des textes du corpus des équations de la géométrie.

L'année 1871 est celle durant laquelle sont parus les textes de Clebsch et de Klein présentant des interprétations géométriques de certaines parties de la théorie des équations.

Clebsch avait proposé un « habillement géométrique » des méthodes de Hermite et de Kronecker de résolution de l'équation du cinquième degré, datées des années 1850 et basées sur la théorie de transformations des fonctions elliptiques. Cet habillement passait notamment par des résultats (déjà vus par Hermite) permettant de relier les méthodes de Hermite et de Kronecker à des annulations d'invariants. Les équations de la géométrie étaient alors mobilisées par Clebsch en tant que moyen de contrôler les irrationalités introduites dans son interprétation géométrique. Inspiré en partie par ce mémoire de Clebsch, Klein avait ensuite décrit une manière de représenter géométriquement les résolvantes d'équations algébriques. Le point essentiel de sa méthode consistait à remplacer les racines d'une équation par des objets géométriques d'un espace, et les substitutions de racines par des transformations linéaires de l'espace. Peu après l'écriture de ce texte sur la représentation géométrique des résolvantes, Klein élabora son *Programme d'Erlangen* de 1872. Comme il l'écrivit lui-même dans les remarques finales du *Programme*, il avait cherché à établir une analogie entre géométrie et théorie des équations au moyen de la notion de groupe : groupes de transformation d'un côté, groupes de substitutions de l'autre.

Après 1872, les activités concernant les équations de la géométrie perdent en concentration, à l'exception peut-être de l'article de Noether de 1879 sur le lien entre l'équation du huitième degré et l'équation aux vingt-huit tangentes doubles. À partir des années 1880, les équations de la géométrie que j'ai trouvées mettent en lumière plusieurs phénomènes. Certaines de ces équations — le plus souvent, l'équation aux neuf points d'inflexion — ont rejoint des traités d'algèbre comme le *Susbtitutionentheorie* de Netto ou le *Lehrbuch der Algebra* de Weber et deviennent des exemples d'équations particulières, au même titre que les équations cyclotomiques, les équations d'Abel, etc. On assiste aussi à la disparition de façons de faire particulières des années 1868-1872, dont l'emblématique usage des « réduites géométriques ». Ainsi, la thèse de Kühnen de 1888 témoigne d'un renversement de la situation, puisqu'il s'agissait pour lui de focaliser ses recherches sur le groupe de l'équation aux vingt-sept droites et d'interpréter l'existence de sous-groupes particuliers en termes géométriques *a posteriori*. Enfin, la résolution par Klein en 1888 de l'équation aux vingt-sept droites par les fonctions hyperelliptiques est aussi révélatrice de certains changements, puisque Klein prenait en considération tout groupe identique à celui de l'équation aux vingt-sept droites, sans plus s'occuper de ces droites. Il y appliquait ensuite les méthodes développées quelques années plus tôt dans ses travaux sur l'équation du cinquième degré et l'icosaèdre.

Cette chronologie des équations de la géométrie étant ainsi écrite, je voudrais maintenant m'y appuyer pour présenter les autres résultats principaux de la thèse.

D'abord, le *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Jordan s'est avéré être un ouvrage central pour la circulation du savoir relatif aux équations de la géométrie. Première publication étudiant l'équation aux vingt-sept droites, le *Traité* rassemble aussi en tant que sujet à part entière les principales équations de la géométrie. Par une analyse minutieuse des mathématiques, j'ai analysé précisément comment théorie des substitutions et géométrie y étaient entrelacées. En particulier, en démêlant les fils du va-et-vient entre Jordan et Geiser, j'ai également pu souligner qu'en 1870, il n'y avait pas encore de dictionnaire entre ces deux domaines : les rapprochements entre théorie des substitutions et géométrie étaient encore en train d'être constitués, justement par le biais des équations de la géométrie. Cette analyse du chapitre des applications géométriques et de celui des applications à la théorie des transcendantes a également mis en évidence des aspects techniques du *Traité* et, par conséquent, précisé ce que Klein avait pu en tirer, notamment pour la constitution de son *Programme d'Erlangen*.

La thèse a aussi fait ressortir un mathématicien important pour le sujet des équations de la géométrie : Alfred Clebsch. Si celui-ci s'est distingué par sa contribution massive dans le corpus de ces équations, son importance tient aussi à son rôle dans la transmission du savoir. J'ai en effet souligné que Clebsch avait été intéressé par les équations de la géométrie à travers les recherches de Hesse, et qu'il avait ensuite eu une influence décisive sur l'écriture du chapitre des applications géométriques du *Traité* de Jordan. Par ailleurs, si son rôle dans le début de la carrière de Klein était déjà décrit par l'historiographie, en particulier en ce qui concerne la façon dont il avait accueilli celui-ci à Göttingen en 1869 ou l'avait aidé à devenir professeur à Erlangen en 1872, ce qui a été transmis mathématiquement de l'un à l'autre reste encore peu clair. Le mémoire de Clebsch sur l'interprétation géométrique de l'équation du cinquième degré était complètement oublié par l'historiographie. En le décrivant, j'ai montré une certaine configuration disciplinaire entre géométrie, invariants et équations, différente de celle existant dans les célèbres travaux sur l'icosaèdre de Klein, plus tardifs et reprenant des éléments du mémoire de Clebsch.

J'ai cherché à deux reprises au cours des chapitres de la thèse à explorer la notion de culture pour décrire certaines organisations du savoir mathématique. J'ai d'abord essayé de donner des éléments suggérant des cultures algébrique et géométrique dans le deuxième tiers du XIX^e siècle, en tout cas pour une partie de l'algèbre en rapport avec les travaux de Galois et pour ce qui relève des configurations géométriques. Mettre en évidence ces éléments a surtout été pour moi l'occasion d'insister sur le sérieux avec lequel considérer la question des cultures associées à des domaines mathématiques durant une période relativement longue, et sur la difficulté de savoir y répondre. De façon plus positive, j'ai par ailleurs recouru à la notion de culture pour décrire l'organisation du savoir lié aux équations de la géométrie, en particulier dans la période 1868-1872. Par ce biais, j'ai été invité à prendre en considération la question de communautés liées par un sentiment de cohésion provenant d'objets mathématiques ; cet aspect m'a en fait convaincu d'abandonner le mot « culture » pour le cas des équations de la géométrie. En revanche, après avoir analysé en détail chacun des traits caractéristiques du savoir lié à ces équations, j'en suis venu à utiliser l'expression « système culturel » pour rendre compte de la façon dont ils formaient un tout intriqué, empreint de valeurs et partagé entre une poignée individus sur une période éphémère.

Pour finir, je souhaite revenir sur les modalités de l'acculturation de la théorie des groupes de substitutions en géométrie, chez des géomètres allemands liés principalement à l'université de Göttingen. On pourra déjà remarquer que cette acculturation s'est surtout produite dans un sens. En effet, si le programme de Klein consistant à géométriser toutes les équations algébriques pour les rendre intuitives a été partiellement mis en œuvre avec l'icosaèdre et ses avatars, il semble qu'il n'y en ait pas eu d'autre réalisation, en particulier hors du cercle de Klein — Jordan lui-même abandonne les équations de la géométrie après 1870. En revanche, j'ai expliqué comment les géomètres allemands que nous avons rencontrés ont réussi à comprendre intuitivement la théorie des substitutions grâce à un savoir-faire géométrique préexistant, consistant à savoir chercher des groupements d'objets associés à des courbes et des surfaces de petit degré. Ils sont ainsi parvenus à intégrer des notions qui leur étaient étrangères en mobilisant des connaissances qui leur étaient familières. Le système des activités intellectuelles de 1868-1872 apparaît finalement comme une étape transitoire de ce processus d'intégration ; les produits de ce processus sont les équations de la géométrie, incarnations des rapprochements entre équations, groupes et géométrie.

Annexe A

Publications de Henderson recensées par le *Jahrbuch* et *MathSciNet*

Les travaux d'Archibald Henderson recensés par le *Jahrbuch* et par *MathSciNet* sont au nombre de 19. Ce nombre comprend une redondance correspondant à la recension d'une réimpression de l'édition de 1911 du livre sur les vingt-sept droites, [Henderson 1911]. Notons *MathSciNet* renvoie à une réimpression d'une autre publication de Henderson, mais l'article original n'apparaît lui-même pas dans la liste donnée par le *Jahrbuch*.

1903 — « The Derivation of the *Brianchon* configuration from two spatial point-triads », *The American Mathematical Monthly* **10**, p. 36–41.

1903 — « Harmonic Pairs in the Complex Plane », *The American Mathematical Monthly* **10**, p. 90–97.

1911 — *The Twenty-seven Lines upon the Cubic Surface*, Cambridge : Cambridge University Press.

1920 — *The Teaching of Geometry. The University of North Carolina Record*, Extension Series, Nr. 39.

1923 — *Relativity. A Romance of Science*, Chapell Hill : University of North Carolina Press.

1924 — *The Theory of Relativity. Studies and Contributions*, London : H. Milford (avec A. W. Hobbs et J. W. jr. Lasley).

1924 — *The Theory of Relativity. Studies and Contributions*, Chapell Hill : University of North Carolina Press (avec A. W. Hobbs et J. W. jr. Lasley).

1925 — « Is the Universe Finite? », *The American Mathematical Monthly* **32**, p. 213–223.

1928 — « Observations on Simultaneous Quadratic Equations », *The American Mathematical Monthly* **35**, p. 337–346.

1930 — « The Cubic and Biquadratic Equations. Vieta's Transformations in the Complex Plane », *The American Mathematical Monthly* **37**, p. 515–521.

1936 — « New Aspects of Relativity. Geometrical Treatment of the Voigt and Page Transformations », *Journal of the Elisha Mitchell Scientific Society* **52**, p. 1–19.

1937 — « A Classic Problem in Euclidean Geometry. A Basic Study », *Journal of the Elisha Mitchell Scientific Society* **53**, p. 246–281.

1936 — « On Harmonic Separation », *National Mathematics Magazine* **13**, p. 3–21 (avec J. W. jr. Lasley).

1941 — « A New Geometrical Interpretation of Einstein's Special Relativity Theory », *Journal of the Elisha Mitchell Scientific Society* **57**, p. 284–293.

1945 — « The Geometry of Tensors of the First Order », *Journal of the Elisha Mitchell Scientific Society* **61**, p. 33–47.

1945 — « Mathematics and the Physical Sciences », dans *A State University Surveys the Humanities*, Lauren C. MacKinney, Nicholson B. Adams & Harry K. Russell (éds.), Chapell Hill : University of North Carolina, p. 144-159.

1945 — « Differential Equations with Quadrilateral Envelope. Cuspidal and Nodal Loci », *National Mathematical Magazine* **20**, p. 51–68.

1960 — *The Twenty-seven Lines upon the Cubic Surface*, New-York : Hafner Publishing Co., réimpression de la version de 1911.

1985 — *The Elisha Mitchell Scientific Society : Its History and Achievements. Reprint of the 1934 Original.*, *Journal of the Elisha Mitchell Scientific Society* **99**, p. 87–99.

Annexe B

Références bibliographiques du livre de Henderson

Cette annexe présente la totalité des références bibliographiques données dans le livre de Henderson sur les vingt-sept droites, [Henderson 1915], listées par ordre chronologique de leur année de publication. Dans le tableau qui les contient, les références dont le titre est suivi d'une astérisque sont celles dont le titre est erroné dans [Henderson 1915]. Les colonnes intitulées « Biblio. » et « Histo. » indiquent si ces références apparaissent dans la section bibliographique du livre de Henderson ou son résumé historique respectivement. Le tableau comporte deux colonnes supplémentaires donnant les classifications respectives du *Catalogue of Scientific Papers* et du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Les items correspondant à ces classifications sont décrites ci-après.

Je commence par donner un extrait de la classification du *Catalogue* correspondant aux numéros apparaissant dans le tableau qui suit. Par souci de précision, j'ai occasionnellement ajouté à ces numéros des exposants. Ces ajouts se produisent dans deux situations se rapportant à l'article concerné : lorsque celui-ci apparaît dans l'appendice de l'index du *Catalogue*, auquel cas l'exposant est un « a », et lorsqu'il est dans la section 7640 des surfaces algébriques de degré supérieur au second. Pour cette dernière éventualité, les différents exposants sont détaillés dans la liste qui suit.

Catalogue of Scientific Papers. Subject Index, Pure Mathematics

0032 Bibliographies

0080 Intruments, including Calculating Machines. Models

Arithmetic and Algebra

Theory of groups

1210 Discrete groups of finite and of infinite order (including groups of permutations)

Analysis [1]

Algebraic functions and their integrals

4060 Abelian integrals

4070 Periodic functions of several variables ; general theta functions

Geometry

Geometry of conics and quadrics

7210 Metrical and projective properties of conics

Algebraic curves and surfaces of degree higher than the second

7610 Metrical and projective properties of algebraic plane curves of degree higher than the second

7640 Algebraic surfaces of degree higher than the second

- 7640^{G} [Généralités]
- 7640^{F_3} Surfaces, 3rd degree
- 7640^{C} Configurations
- 7640^{27} Configurations [avec mots-clés comprenant « 27 straight lines »]

7650 Special algebraic surfaces

Transformations and General Methods for algebraic configurations

8010 Collineation ; duality

8020 Other algebraic transformations

8075 Special configurations of points, lines or other elements. Space partitioning.

8080 Line geometry. Connexes, complexes, congruences ; higher elements of space

8100 Algebraic configurations in hyperspace

1. Entre cette section et la précédente représentées ici, en existe une autre, appelée Algebra and Theory of Numbers.

Je donne à présent un extrait de la classification du *Jahrbuch.* Dans la période concernée, cette classification bouge un peu, surtout lors du passage entre le premier et le deuxième numéro de la revue, où les sections de géométries analytique et synthétique sont interverties [2]. Les deux seuls articles concernés par le premier numéro sont classifiés dans sa section IX, « Synthetische Geometrie », chapitre 1, « Allgemeines » ; pour les différencier des suivants, les numéros IX-1 correspondant ont été mis en italiques dans le tableau des références bibliographiques.

À part ce changement, les autres entrées sont toutes quasiment stables, à ajout ou suppression de mots près. Ces modifications ont été indiquées entre crochets. Enfin, j'ai écrit deux fois la section II-3 car outre l'ajout de « Gruppentheorie », l'ordre des mots est renversé à partir de l'année 1901 : la version la plus nouvelle est indiquée par les numéros II-3'.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik

I. Geschichte und Philosophie

   1. Geschichte

II. Algebra

   1. Gleichungen [(Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)]
   2. Theorie der Formen
   3. Elimination und Substitution, Determinanten, [Invarianten, Covarianten und] symmetrische Functionen
   3'. Substitutionen und Gruppentheorie, Determinanten, Elimination und symmetrische Funktionen

VII. Functionentheorie

   2. Besondere Functionen

VIII. Reine, elementare und synthetische Geometrie

   2. Kontinuitätsbetrachtungen (Analysis Situs [Topologie])
   5. Neuere synthetische Geometrie

IX. Analytische Geometrie

   1. Coordinaten [Lehrbücher, Koordinaten, Prinzipien. Weitere Literatur]
   3. Analytische Geometrie des Raumes
   5. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen

2. Le changement majeur dans la classification de la géométrie a lieu en 1916. Voir [Folta & Nový 1965, p. 16].

Référence	**Titre**	**Biblio.**	**Histo.**	*Catalogue*	*Jahrbuch*
[Mossbrugger 1841]	« Untersuchungen über die geometrische Bedeutung der constanten Coefficienten in den allgemeinen Gleichungen der Flächen des zweiten und dritten Grades »		•	7640^{G}	/
[Cayley 1849]	« On the Triple Tangent Planes of Surfaces of Third Order »	•	•	7640^{T}	/
[Salmon 1849]	« On the Triple Tangent Planes to a Surface of the Third Order »	•	•	7640^{T}	/
[Brioschi 1855]	« Intorno ad alcune proprieta delle superficie del terzo ordine »	•		7640^{C}	/
[Steiner 1856a]	« Ueber die Flächen dritten Grades »	•	•	7640^{27}	/
[Steiner 1856b]	« Ueber die Flächen dritten Grades »	•	•	/	/
[Schläfli 1858]	« An Attempt to Determine the Twenty-seven Lines upon a Surface of the Third Order and to Divide such Surfaces into Species in Reference to the Reality of the Lines upon the Surface »	•	•	7640^{27}	/
[de Jonquières 1859]	« Solution de la question 376 »*	•		7640^{27}	/
[Sylvester 1861a]	« Note sur les 27 droites d'une surface du 3ᵉ degré »	•		7640^{26}	/
[Sylvester 1861b]	« Note sur l'involution de six lignes dans l'espace »	•		8080	/
[August 1862]	*Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis*	•	•	/	/

Référence	**Titre**	**Biblio.**	**Histo.**	*Catalogue*	*Jahrbuch*
[Schläfli 1863]	« On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species, in Reference to the Absence or Presence of Singular Points, and the Reality of Their Lines »	•	•	7640^{F_3}	/
[Schröter 1863]	« Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung »	•		7640^{27}	/
[Sturm 1867]	*Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*	•	•	/	/
[Cayley 1868a]	« A “Smith's Prize” Paper ; Solutions »	•		/	*IX-1*
[Cayley 1868c]	« On Pascal's Theorem »	•		7210	*IX-1*
[Cremona 1868]	« Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre »	•	•	7640^{F_3}	/
[Cayley 1869a]	« A Memoir on Cubic Surfaces »	•	•	7640^{F_3}	IX-3
[Cayley 1869b]	« On the Six Co-ordinates of a Line »	•		8080	IX-1
[Geiser 1869b]	« Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curven vierten Grades »	•	•	7610 8075	VIII-5
[Jordan 1869a]	« Sur la trisection des fonctions abéliennes et sur les vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre »	•	•	4060 7640^{27}	II-1 VII-2 IX-3
[Jordan 1869b]	« Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré »*	•		7640^{27}	II-1 IX-3

Référence	**Titre**	**Biblio.**	**Histo.**	*Catalogue*	*Jahrbuch*
[Sylvester 1866-69]	« Outline Trace of the Theory of Reducible Cyclodes, *i.e.* A Particular Family of Successive Involutes to a Circle whose Determination Depends on the Solutions of an Algebraico-Diophantine Equation, and of the Number and Classification of the Forms of such Family for any given Order of Succession »		•	?	/
[Cayley 1870]	« On the Double-sixers of a Cubic Surface »	•		7640^{C}	IX-3
[Cremona 1870]	« Sulle ventisette rette di una superficie del terzo ordine »	•		7640^{27}	IX-3
[Jordan 1870a]	« Sur une nouvelle combinaison des vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre »	•		7640^{27}	II-1 IX-3
[Jordan 1870b]	*Traité des substitutions et des équations algébriques*		•	/	II-3
[Schläfli 1871]	« Quand è che dalla superficie generale di terz'ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale ? »	•		7640^{F_3}	?
[Cayley 1873]	« On Dr. Wiener's Model of a Cubic Surface with 27 Real Lines ; and on the Construction of a Double-sixer »	•	•	0080 7640^{F_3}	IX-3
[Folie 1873]	« Note sur l'extension des théorèmes de Pascal et de Brianchon aux courbes planes et aux surfaces du 3e ordre ou de la 3e classe »*	•		7640^{C}	IX-3
[Klein 1873]	« Ueber Flächen dritter Ordnung »	•	•	7640^{F_3}	VIII-5

Référence	**Titre**	**Biblio.**	**Histo.**	*Catalogue*	*Jahrbuch*
[Spottiswoode 1873]	« Sur les plans tangents triples à une surface »*	•		7640^{T}	IX-3
[Affolter 1874]	« Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung »*	•		7640^{27}	VIII-5
[Zeuthen 1874]	« Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre »	•	•	7610	VIII-5
[Zeuthen 1875]	« Études des propriétés de situation des surfaces cubiques »	•	•	7640^{F_3}	XI-3
[Brioschi 1876]	« Sopra una proprietà dei piani tritangenti ad una superficie cubica »*	•		7640^{T}	II-2
[Smith 1876]	« Geometrical Intruments and Models »	•	•	/	/
[Cremona 1876-77]	« Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal »	•	•	7610	/
[Rodenberg 1879]	« Zur Classification der Flächen dritter Ordnung »	•	•	7640^{F_3}	IX-3
[Caron 1880]	« Sur l'épure des vingt-sept droites d'une surface du troisième degré, dans le cas où ces droites sont réelles »*	•		7640^{27}	VIII-5
[Schur 1881]	« Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen »	•		8010	VIII-5
[Frost 1882]	« On the 27 Lines, the 45 Triple Tangent Planes, and the 36 Double-sixers of a Cubic Surface, with a Hint for the Construction of Models which Give the Position of the Lines when They Are All Real »	•		0080^{a} 7640^{27}	IX-3

Référence	**Titre**	**Biblio.**	**Histo.**	*Catalogue*	*Jahrbuch*
[Salmon 1882]	*A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions*	•	•	/	IX-1
[Bauer 1883]	« Von den gestaltlichen Verhältnissen der parabolischen Curve auf einer Fläche dritter Ordnung »*	•		7640^{27}	VIII-5
[Bertini 1883-84]	« Contribuzione alla teoria delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti di una superficie di 3º ordine »	•	•	7640^{27}	VIII-5
[Bertini 1884]	« Sulla superficie di 3° ordine »*	•		7640^{T}	VIII-5
[Sturm 1884]	« Ueber die 27 Geraden der cubischen Flächen »	•		7640^{27}	VIII-5
[Weber 1884]	« Ueber die Galois'sche Gruppe der Gleichung 28^{ten} Grades, von welcher die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung abhängen »		•	7610	II-3
[Petot 1886]	« Sur une extension du théorème de Pascal aux surfaces du troisième ordre »*	•		7640^{C}	VIII-5
[Maschke 1887]	« Ueber die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln »		•	1210	II-3
[Witting 1887b]	« Ueber Jacobi'sche Functionen k^{ter} Ordnung zweier Variabler »		•	4070	VII-2
[C. Segre 1887]	« Sulla varietà cubica con dieci punti dopii dello spazio a quattro dimensioni »		•	8100	VIII-5

Référence	**Titre**	**Biblio.**	**Histo.**	*Catalogue*	*Jahrbuch*
[Klein 1888]	« Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique »		•	7640^{27}	VII-2 IX-3
[Kühnen 1888]	*Ueber die Galois'sche Gruppe der Gleichung 27. Grades, von welcher die Geraden auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung abhängen*		•	/	II-1
[Maschke 1888]	« Ueber eine quaternäre Gruppe von 51 840 linearen Substitutionen, welche die ternäre Hesse'sche Gruppe als Untergruppe enthält »		•	1210	II-3
[Maschke 1889]	« Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternären Gruppe von 51 840 linearen Substitutionen »		•	1210	II-3
[Richmond 1889]	« A Symmetrical System of Equations of the Lines on a Cubic Surface which has a Conical Point »	•		7650	IX-3
[C. Segre 1889]	« Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario »		•	8100	VIII-5
[Maschke 1890]	« Ueber eine merkwürdige Configuration gerader Linien im Raume »		•	1210 8075	VIII-5
[Kohn 1891a]	« Beweis eines Satzes von Cayley »*	•		1210 7640^{T}	VIII-5

Référence	**Titre**	**Biblio.**	**Histo.**	*Catalogue*	*Jahrbuch*
[Kohn 1891b]	« Ueber die Sextupel von geraden Linien, welche von sämtlichen Punkten einer kubischen Fläche als sechs Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden »*	•		7640^{C}	VIII-5
[Pascal 1892]	« Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3º ordine, e sui gruppi ad esso isomorfi »		•	7640^{27} 8075	VII-2 IX-3
[Burkhardt 1893]	« Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen. Dritter Theil »		•	4060	VII-2
[Pascal 1893]	« Continuazione del saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le rette della superficie cubica »		•	7640^{27}	IX-3
[Korteweg 1893]	« Over de Rodenberg'sche modellen van kubische oppervlakken, met historische inleiding »	•		0080 7640^{F_3}	I-1
[Schoute 1893]	« Sur le moyen de déduire d'une représentation plane d'une surface cubique la position des 27 droites les unes par rapport aux autres »*	•		7640^{27}	/
[G. 1894]	« Sur les droites qu'on peut placer sur une surface de troisième classe ou de troisième ordre »*	•		7640^{C}	IX-3
[Klein 1894]	*The Evanston Colloquium : Lectures on mathematics*	•	•	/	I-1
[Taylor 1894]	« On a Special Form of the General Equation of a Cubic Surface and on a Diagram Representing the Twenty-seven Lines on the Surface »	•	•	7640^{F_3}	IX-3

Référence	**Titre**	**Biblio.**	**Histo.**	*Catalogue*	*Jahrbuch*
[Hill 1897]	« Bibliography of Surfaces and Twisted Curves »		•	0032	I-1
[Blythe 1898a]	« On the Construction of Models of Cubic Surfaces »	•		0080 7640^{F_3}	IX-3
[Blythe 1898b]	« On the Forms of Cubic Surfaces Containing 27 Real Straight Lines »	•		0080 7640^{C}	/
[Timerding 1900]	« Ueber die Gruppierungen der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung »	•	•	7610	VIII-5
[E. H. Moore 1900]	« The Cross-ratio Group of $n!$ Cremona-transformations of Order $n-3$ in Flat Space of $n-3$ Dimensions »		•	8100	IX-5
[Slaught 1900]	« The Cross-ratio Group of 120 Quadratic Cremona-transformations of the Plane. Part First : Geometric Representation »		•	1210^{a} 8020	IX-5
[Blythe 1901]	« On Models of Cubic Surfaces »	•		/	IX-3
[Dickson 1901a]	« Canonical Forms of Quaternary Abelian Substitutions in an Arbitrary Galois Field »		•	/	II-3'
[Dickson 1901b]	*Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory*		•	/	II-3'
[Dickson 1901c]	« The Configurations of the 27 Lines on a Cubic Surface and the 28 Bitangents to a Quartic Curve »		•	/	VIII-2
[Funck 1901]	« Die Konfiguration $(15_6, 20_3)$, ihre analytische Darstellung und ihre Beziehungen zu gewissen algebraischen Flächen »	•		/	IX-3

Référence	**Titre**	**Biblio.**	**Histo.**	*Catalogue*	*Jahrbuch*
[de Vries 1901]	« La Configuration formée par les vingt-sept droites d'une surface cubique »	•		/	VIII-2
[Blythe 1902]	« To Place "a Double-six" in Position »	•		/	VIII-5
[Dickson 1902]	« A Class of Groups in an Arbitrary Realm Connected with the Configuration of the 27 Lines on a Cubic Surface »		•	/	II-3'
[Richmond 1902]	« Concerning the Locus $\sum(x_r^3) = 0; \sum(x_r) = 0$ $(r = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ »		•	/	IX-3
[Henderson 1903]	« The Derivation of the Brianchon Configuration from Two Spatial Point-triads »	•		/	VIII-5
[Kasner 1903]	« The Double-Six Configuration Connected with the Cubic Surface and a Related Group of Cremona Transformations »	•	•	/	VIII-2
[Zacharias 1903]	*Ueber die Beziehungen zwischen den 27 Geraden auf einer Fläche 3. Ordnung und den 28 Doppeltangenten einer ebenen Kurve 4. Ordnung*	•		/	IX-3
[Blythe 1904]	« Notes on the Geometry of Cubic Surfaces »	•		/	IX-3
[Henderson 1904]	« On the Graphic Representation of the Projection of Two Triads of Planes into the Mystic Hexagram »	•		/	/
[Blythe 1905]	*On Models of Cubic Surfaces*	•	•	/	IX-3
[Henderson 1905]	« A Memoir on the Twenty-seven Lines on the Cubic Surface »	•		/	/

Référence	**Titre**	**Biblio.**	**Histo.**	*Catalogue*	*Jahrbuch*
[Dixon 1908]	« An Elementary Discussion of Schläfli's Double-six »	•	•	/	IX-3
[Richmond 1908]	« On the Property of a Double-six of Lines, and its Meaning in Hypergeometry »	•	•	/	IX-3
[Burnside 1910]	« On Double-sixes »	•	•	/	VIII-2
[Dixon 1910]	« Note on the Double-six »	•	•	/	IX-3
[Baker 1911a]	« A Geometrical Proof of the Theorem of a Double-six of Straight Lines »	•	•	/	VIII-2 VIII-5
[Baker 1911b]	« Notes on the Theory of Cubic Surfaces »	•	•	/	IX-3
[G. T. Bennett 1911]	« The Double-six »	•	•	/	VIII-2
[Long 1911]	« On Geiser's Method on Generating a Plane Quartic »	•	•	/	VIII-5

Annexe C

Les recherches de Jordan sur le lien entre les fonctions hyperelliptiques et les vingt-sept droites

Cette annexe consiste en des explications détaillées des recherches de Jordan sur l'équation de division des périodes des fonctions hyperelliptiques et ses liens avec l'équation aux vingt-sept droites présentées dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques*, [Jordan 1870b]. Pour mieux comprendre certains points que Jordan mobilise dans ces recherches, je commence par quelques commentaires à leur sujet.

C.1 Prolégomènes

Dans cette première section, j'introduis les intégrales et fonctions hyperelliptiques, leurs périodes, ainsi que les groupes de monodromie et le « groupe abélien » qui sont en rapport avec ces objets.

C.1.1 Intégrales abéliennes, intégrales hyperelliptiques

Niels Abel présente en 1826 un mémoire à l'Académie des Sciences — il ne sera publié que 15 ans plus tard, [Abel 1841] — portant sur des fonctions qui ont ensuite été qualifiées d'*abéliennes*[1] : ce sont des intégrales indéterminées de la forme $\int f(x, y)\,\mathrm{d}x$, où f est une fonction rationnelle en deux variables et où x et y sont liés par une équation algébrique $\chi(x, y) = 0$. Voyons tout de suite quelques exemples fondamentaux.

Les intégrales abéliennes comprennent plusieurs fonctions usuelles, comme le logarithme

1. Le sujet des intégrales abéliennes est très vaste ; je me restreins ici à ce qui se rattache directement aux travaux de Jordan sur les fonctions hyperelliptiques. Pour plus de détails sur ces questions, voir [Brill & Noether 1892-93 ; Houzel 1978 ; Krazer & Wirtinger 1920].

ou les fonctions circulaires réciproques [2]. Les *intégrales elliptiques* sont aussi des intégrales abéliennes particulières, correspondant à $\chi(x, y) = y^2 - P(x)$, où P est un polynôme (séparable) de degré 3 ou 4. Enfin, les *intégrales hyperelliptiques* [3] sont les intégrales abéliennes obtenues avec $\chi(x, y) = y^2 - \Delta^2(x)$, où Δ^2 est un polynôme de degré supérieur à 5 ; ce degré est égal à 6 dans les intégrales hyperelliptiques considérées par Jordan. Plus précisément, les intégrales introduites par Jordan dans le *Traité* sont de la forme

$$\int \frac{\mu + \nu x}{\Delta(x)} \, \mathrm{d}x,$$

où μ et ν sont des constantes et $\Delta^2 = x^6 + ax^5 + \cdots + f = (x - m_0)(x - m_1) \cdots (x - m_5)$.

Comme le souligne [Houzel 1978], la définition même d'intégrale abélienne n'était pas précise à l'époque d'Abel, car l'équation $\chi(x, y) = 0$ ne permet pas toujours de définir y comme fonction uniforme (ou, en termes plus actuels, univaluée) de x : par exemple, pour les intégrales hyperelliptiques, y correspond à la racine carrée d'un polynôme. Une telle fonction est multiforme, c'est-à-dire qu'à une valeur de x peut correspondre plusieurs valeurs [4] de y. Un point de vue plus tardif a été de considérer que l'intégration doit se faire le long d'un chemin sur la surface de Riemann attachée à l'équation $\chi(x, y) = 0$ — ce point de vue est présenté dans plusieurs manuels d'analyse de la fin du XIXᵉ siècle, comme [Jordan 1894 ; Appell & Goursat 1895].

Dans le cadre des intégrales elliptiques, Leonhard Euler avait montré un théorème d'addition : si I désigne une telle intégrale, alors pour tous x et y, il existe une relation de la forme

$$I(x) + I(y) = I(z) + F(x, y),$$

où z est une fonction algébrique de x et de y, et où $F(x, y)$ est une fonction rationnelle ou le logarithme d'une fonction rationnelle de x et y. Dans son mémoire, Abel avait généralisé ce théorème pour les intégrales abéliennes :

> Si l'on a plusieurs fonctions dont les dérivées peuvent être racines d'une *même équation algébrique* dont les coefficients sont des fonctions *rationnelles* d'une même variable, on peut toujours exprimer la somme d'un nombre quelconque de semblables fonctions par une fonction *algébrique* et *logarithmique*, pourvu qu'on établisse entre les variables des fonctions en question un certain nombre de relations *algébriques*. [Abel 1841, p. 177]

---

2. En effet, $\mathrm{Log}\, x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$, ce qui correspond à $f(x, y) = 1/x$ et $\chi(x, y) = 0$; $\mathrm{Arcsin}\, x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}$, qui correspond cette fois à $f(x, y) = 1/y$ et $\chi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

3. Ces intégrales sont parfois également appelées intégrales « ultraelliptiques ». [Brill & Noether 1892-93] distinguent les deux épithètes en attribuant à « ultraelliptique » le cas où le polynôme Δ^2 est de degré 5 ou 6 et à « hyperelliptique » le cas où ce degré est supérieur à 6. Cette distinction ne semble pas avoir été systématique ; par exemple, dans [Jordan 1870b], Jordan emploie le terme « hyperelliptique » pour Δ^2 de degré 6.

4. L'exemple plus simple $\chi(x, y) = y^2 - x$ est peut-être aussi plus parlant : la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'admet pas de détermination univaluée pour tous les nombres complexes.

Autrement dit, si I désigne une intégrale abélienne, alors, si $x_1, x_2, \dots, x_m$ sont des nombres complexes vérifiant un certain système d'équations algébriques, on a

$$I(x_1) + I(x_2) + \cdots + I(x_m) = F(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

où F est une fonction algébrique et logarithmique en ses m variables [5]

C.1.2 Jacobi et le problème d'inversion

Les « fonctions elliptiques » avaient été définies au début du XIX$^{\text{e}}$ siècle comme fonctions inverses des intégrales elliptiques : si P est un polynôme de degré 3 ou 4, alors on définit une *fonction elliptique* λ par

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{P(x)}} \iff x = \lambda(u).$$

Cette inversion ne peut se faire dans un premier temps que sur un intervalle réel, mais le théorème d'Euler sur l'addition des intégrales elliptiques a pour conséquence que la quantité $\lambda(u+u')$ s'exprime rationnellement en fonction de $\lambda(u)$ et $\lambda(u')$, ce qui permet de prolonger la fonction elliptique λ sur l'ensemble des nombres complexes (exceptés quelques points isolés). En outre, il avait été montré que les fonctions elliptiques possèdent deux périodes indépendantes [6]. Cela signifie qu'il existe ω, ω' tels que $\omega/\omega' \notin \mathbf{R}$ et tels que pour tout u et tous entiers p, q, on a $\lambda(u + p\omega + q\omega) = \lambda(u)$.

Le problème d'inversion des intégrales abéliennes consiste, de façon analogue, à définir des *fonctions abéliennes*, réciproques des intégrales abéliennes. Je me bornerai ici à décrire le cas des fonctions hyperelliptiques [7]. C'est à Jacobi qu'on attribue le succès de cette inversion, traitée dans deux articles de 1832 et 1835, [Jacobi 1832 ; Jacobi 1835]. Dans la fin de ce paragraphe, les notations de Jacobi des intégrales et fonctions hyperelliptiques seront légèrement modifiées afin de les faire coïncider avec celles de Jordan.

Dans son article de 1832, Jacobi pose

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} \qquad \text{et} \qquad \Phi_1(x) = \int_0^x \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{X}},$$

5. Pour plus de renseignements sur le théorème d'Abel, voir [Houzel 1978, p. 72-78].

6. En termes actuels, une fonction elliptique est une fonction doublement périodique et méromorphe sur $\mathbf{C}$, avec un pôle simple en chaque point du réseau des périodes $\mathbf{Z}\omega \oplus \mathbf{Z}\omega'$.

7. Pour le problème d'inversion des intégrales abéliennes générales, voir par exemple [Krazer & Wirtinger 1920]. Je ne parlerai pas non plus de la résolution de l'inversion des intégrales hyperelliptiques par Göpel et Rosenhain, *via* l'introduction de fonctions thêta à deux variables.

où X désigne un polynôme de degré 5 ou 6. Il inverse alors le système

$$\begin{cases} u = \Phi_0(x) + \Phi_0(y) \\ v = \Phi_1(x) + \Phi_1(y) \end{cases}$$

afin d'exprimer x et y comme fonctions de u et v :

$$\begin{cases} x = \lambda_0(u, v) \\ y = \lambda_1(u, v). \end{cases}$$

Comme dans le cas des fonctions elliptiques, cette inversion n'est valable *a priori* que localement, mais tout comme le théorème d'Euler avait permis le prolongement des fonctions elliptiques, celui d'Abel va servir au prolongement de λ_0 et λ_1. En effet, une conséquence de ce théorème est que les quantités $\lambda(u + u', v + v')$ et $\lambda_1(u + u', v + v')$ s'expriment algébriquement en fonction de $\lambda(u, v)$, $\lambda(u', v')$, $\lambda_1(u, v)$ et $\lambda_1(u', v')$. Les fonctions λ_0 et λ_1 se prolongent ainsi sur l'ensemble des couples de nombres complexes (exceptés quelques points isolés) ; ce sont des *fonctions hyperelliptiques*.

Dans son mémoire de 1835, Jacobi met l'accent sur la périodicité des fonctions hyperelliptiques. Plus précisément, il commence par y montrer qu'une fonction d'une seule variable complexe ne peut pas avoir trois périodes (indépendantes) ou plus. Comme il prouve par ailleurs qu'une fonction λ supposée provenir d'une inversion d'une intégrale hyperelliptique strictement calquée sur celle des intégrales elliptiques, à savoir

$$x = \lambda(u) \iff u = \int_0^x \frac{f(x)}{\sqrt{X}}\, \mathrm{d}x$$

avec f polynôme de degré inférieur à 6, admet nécessairement quatre périodes indépendantes, il en déduit l'impossibilité d'une telle inversion. L'inversion des intégrales hyperelliptiques se fait donc bien comme précédemment, avec des fonctions de deux variables, et non pas avec des fonctions d'une variable [8]. Ces fonctions possèdent ainsi quatre périodes par rapport à chacune des variables [9] : il existe $P_1, \ldots, P_4, Q_1, \ldots, Q_4$ tels que pour tous u et v et tous entiers p_1, q_1, p_2, q_2,

$$\begin{cases} \lambda_0(u + \delta_1 P_1 + \varepsilon_1 P_2 + \delta_2 P_3 + \varepsilon_2 P_4, v + \delta_1 Q_1 + \varepsilon_1 Q_2 + \delta_2 Q_3 + \varepsilon_2 Q_4) = \lambda_0(u, v) \\ \lambda_1(u + \delta_1 P_1 + \varepsilon_1 P_2 + \delta_2 P_3 + \varepsilon_2 P_4, v + \delta_1 Q_1 + \varepsilon_1 Q_2 + \delta_2 Q_3 + \varepsilon_2 Q_4) = \lambda_1(u, v). \end{cases}$$

8. En faisant référence à ce problème d'inversion, [Houzel 2002, p. 191] écrit : « une des caractéristiques essentielles des mathématiques du vingtième siècle comparées à celles du siècle précédent est le passage à plusieurs variables pour un certain nombre de problèmes que le dix-neuvième siècle avait abordés dans le cas d'une seule variable ; [...] le passage à plusieurs variable était inévitable et [...] ne résulte pas d'un pur souci de généralisation. »

9. Prendre des intégrales hyperelliptiques définies par un polynôme de degré $2g + 1$ ou $2g + 2$ conduit à des fonctions hyperelliptiques méromorphes sur $\mathbf{C}^g$, ayant $2g$ périodes indépendantes.

Dans le *Traité de substitutions et des équations algébriques*, Jordan introduit d'emblée les périodes des fonctions hyperelliptiques avec des chemins d'intégration. Ce point de vue c'est pas celui de Jacobi [10], mais plutôt celui de Victor Puiseux, qui sera vu un peu plus tard dans cette annexe. Avant cela, continuons encore avec les travaux de Jacobi sur les fonctions hyperelliptiques.

C.1.3 Division des fonctions hyperelliptiques

En 1835, Jacobi pose le problème de la *division des fonctions hyperelliptiques* [11] : étant donnés des nombres complexes u et v ainsi qu'un entier n, il s'agit de déterminer les quantités $x = \lambda_0(u, v)$ et $y = \lambda_1(u, v)$ en fonction de $x_n = \lambda_0(nu, nv)$ et $y_n = \lambda_1(nu, nv)$. Il montre que x_n et y_n sont les deux solutions d'une équation quadratique

$$U_n z^2 - U_n' z + U_n'' = 0,$$

où U_n, U_n' et U_n'' sont des fonctions rationnelles en x, y, $\sqrt{X(x)}$ et $\sqrt{X(y)}$. Inversement, si x_n et y_n sont supposés connus, les quantités x et y sont solutions du système

$$\begin{cases} U_n x_n^2 - U_n' x_n + U_n'' = 0 \\ U_n y_n^2 - U_n' y_n + U_n'' = 0. \end{cases}$$

L'élimination d'une des deux inconnues donne lieu à une équation, dite *équation de la division* des fonctions hyperelliptiques.

Toujours dans son article de 1835, Jacobi conjecture que l'équation de la division est de degré n^4 et que dans le cas particulier où $x_n = y_n = 0$ et où n est impair, elle se ramène à une équation de degré $1 + n + n^2 + n^3$ et à des équations de degré $(n-1)/2$ résolubles par radicaux. Dans ce cas particulier, l'équation en question prend le nom d'*équation de division des périodes* des fonctions hyperelliptiques.

Une dizaine d'années plus tard, Charles Hermite démontre ces conjectures dans [Hermite 1846], en prouvant notamment que les solutions x, y du problème de division sont de la forme

$$x = \lambda_0\left(u + \frac{I}{n}, v + \frac{J}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad y = \lambda_1\left(u + \frac{I}{n}, v + \frac{J}{n}\right),$$

où I et J sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes. Dans le cas de la division des périodes où $u = v = 0$, ces solutions sont donc les $\lambda_0\left(I/n, J/n\right)$ et $\lambda_1\left(I/n, J/n\right)$ pour toutes les combinaisons linéaires à coefficients entiers I, J des périodes.

10. Voir la note 6 de [Krazer & Wirtinger 1920, p. 614].

11. Un problème analogue existe également pour les fonctions elliptiques : si λ est une telle fonction, le problème de division consiste à déterminer $\lambda(u)$ en fonction de $\lambda(nu)$.

C.1.4 Périodes *alla* Puiseux

En 1850 et 1851, Victor Puiseux publie deux articles consacrés à l'étude de fonctions $u(z)$ définies implicitement par des équations algébriques $f(u,z)=0$, [Puiseux 1850 ; Puiseux 1851]. L'idée sur laquelle se construisent ces articles est qu'une fonction définie de cette sorte est en général multiforme [12] car, si l'on veut qu'elle soit continue, les valeurs qu'elle prend en un point z dépendent du chemin suivi jusqu'à ce point. Dans la suite de cette section, je ne détaillerai pas l'ensemble des travaux de Puiseux et me contenterai de relever ce qui sera utile pour en comprendre les grandes lignes, notamment pour ce qui concerne les intégrales hyperelliptiques [13].

Regardons le premier exemple pris par Puiseux, à savoir l'équation $u^2-z=0$. Pour un z donné, elle définit les deux racines carrées u_1, u_2 de z ; intéressons-nous à l'une des deux. Si on définit u_1 par $u_1(re^{it})=\sqrt{r}e^{it/2}$ en choisissant à chaque fois $t\in[-\pi\,,\pi]$, alors cette fonction n'est pas continue [14]. En effet, si t tend vers π^- ou $-\pi^+$, alors z tend à chaque fois vers $-r$, mais u_1 tend une fois vers $\sqrt{r}e^{i\pi/2}=i\sqrt{r}$ et l'autre fois vers $\sqrt{r}e^{-i\pi/2}=-i\sqrt{r}$.

Une solution proposée par Puiseux est de poser $u_1(re^{it})=\sqrt{r}e^{it/2}$ pour tout t, de fixer une valeur initiale de u_1, par exemple $u_1(1)=1$, puis de déterminer les autres valeurs de u_1 par continuité. Dans ce cas, u_1 devient une fonction multiforme : cherchons $u_1(i)$ avec cette définition. À partir de $z=1$, on peut d'une part faire varier z le long du quart de cercle paramétré par $t\in[0\,,\pi/2]\mapsto e^{it}$ et dans ce cas, $u_1(i)=e^{i\pi/4}$. Mais on peut d'autre part également faire varier z le long des trois quarts de cercle $t\in[0\,,-3\pi/2]\mapsto e^{it}$; alors $u_1(i)=e^{3i\pi/4}=-e^{i\pi/4}$. On trouve ainsi deux valeurs différentes pour $u_1(i)$.

Retour au cas général. Si une fonction continue u_1 définie par une équation $f(u,z)=0$ par la méthode précédente peut prendre plusieurs valeurs en un point z suivant le chemin qu'à parcouru z depuis une origine fixée c, alors l'intégrale d'une telle fonction dépend également du chemin d'intégration. Reprenons l'exemple précédent et essayons d'évaluer l'intégrale $\int_0^i u_1(z)\,\mathrm{d}z$. Comme avant, on peut aller de 0 à i soit en suivant le quart de cercle dans le sens trigonométrique, soit en suivant les trois quarts de cercle complémentaires dans le sens horaire. Dans le premier cas, l'intégrale vaut

$$\int_0^i u_1(z)\,\mathrm{d}z=\int_0^{\pi/2} e^{i\theta/2}ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}(e^{3i\pi/4}-1),$$

12. Ou « multivaluée », c'est-à-dire qu'à une valeur de départ peut correspondre plusieurs valeurs d'arrivée.

13. Voir [Goldstein 2011a, p. 250-257], où les mémoires de Puiseux sont mis en relation avec les travaux de Hermite. On y trouvera aussi d'autres références, en particulier [Brill & Noether 1892-93, p. 197-202] pour une description poussée des articles de Puiseux.

14. Elle n'est même pas bien définie si l'on prend l'intervalle fermé $[-\pi\,,\pi]$. Je laisse ces détails de côté, le but ici étant simplement de faire comprendre de quoi parlent les mémoires de Puiseux. Bien entendu, il s'agit de problèmes liés à l'absence de détermination d'un logarithme sur tout le plan complexe.

alors que dans le second cas, elle vaut

$$\int_0^i u_1(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{-3\pi/2} e^{i\theta/2} i e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}(-e^{3i\pi/4} - 1).$$

De façon générale, la fonction $\int_c^z u_1(z)\,\mathrm{d}z$ est donc également multiforme :

> Comme l'a remarqué M. Cauchy [15], la notation $\int_c^k u_1 \mathrm{d}z$ n'offre un sens déterminé qu'autant qu'on donne, outre les limites c et k, le chemin CMK par lequel le point mobile Z est supposé aller de C à K. À la vérité, tant que le chemin CMK, en se déformant, ne franchit aucun des points A, A', A'', etc., pour lesquels l'équation
>
> $$f(u, z) = 0$$
>
> a des racines égales ou infinies [16], l'intégrale $\int_c^k u_1 \mathrm{d}z$ conserve la même valeur [...] ; mais s'il vient à franchir quelques-uns de ces points, l'intégrale pourra changer et acquérir un nombre limité ou illimité de valeurs différentes. [Puiseux 1850, p. 430]

Puiseux consacre une grande partie de ses deux articles à déterminer les différentes valeurs que peut prendre une telle intégrale suivant les chemins d'intégration.

Une origine des chemins d'intégration C étant choisie une fois pour toutes, Puiseux définit le *contour élémentaire* relatif au point $A^{(i)}$: il s'agit d'un « contour fermé infiniment petit [...] qui entoure le point $[A^{(i)}]$, en ne faisant autour de ce point qu'une circonvolution », et relié à l'origine par un segment (parcouru dans les deux sens). Il appelle ensuite *intégrale élémentaire* la valeur A_i de l'intégrale $\int u_1\,\mathrm{d}z$ prise le long du contour élémentaire relatif à $A^{(i)}$.

Dans le cas particulier des intégrales hyperelliptiques $\int (\alpha + \beta z)/\sqrt{P}\,\mathrm{d}z$, où P est un polynôme de degré 6, Puiseux montre qu'il existe quatre quantités $p', \ldots, p^{(4)}$ distinctes telles que tout changement de chemin d'intégration entraîne l'augmentation de l'intégrale hyperelliptique de multiples entiers de ces quantités. Ces dernières sont appelées *périodes* [17] et valent

$$\begin{aligned} p' &= A - A' \\ p'' &= A - A'' \\ p''' &= A - A''' \\ p^{(4)} &= A - A^{(4)}. \end{aligned}$$

Puiseux raccorde ses résultats à ceux de Jacobi :

15. À la fin du mémoire de 1850, Puiseux veille à bien distinguer les résultats qu'il a établis de ceux qui reviennent à Cauchy, comme par exemple la « véritable idée qu'on doit se faire d'une intégrale prise entre des limites imaginaires et de ses valeurs multiples » [Puiseux 1850, p. 478-479].

16. Autrement dit, les points $A, A', \ldots$ sont les points d'affixe $z, z', \ldots$ tels que l'équation $f(u, z^{(m)}) = 0$ admet des racines multiples ou infinies. Dans l'exemple $u^2 - z = 0$, il n'y a qu'un point A, c'est l'origine du plan O.

17. Puiseux définit plus généralement les périodes d'une intégrale $\int u_1\,\mathrm{d}z$ en [Puiseux 1850, p. 438].

> On retrouve ainsi pour les fonctions [hyperelliptiques λ_0 et λ_1] le caractère de quadruple périodicité signalé par M. Jacobi. [Puiseux 1850, p. 464]

Signalons encore que Puiseux démontre que les intégrales élémentaires sont liées par la relation $A - A' + A'' - A''' + A^{(4)} - A^{(5)} = 0$, qui sera utilisée par Jordan dans le *Traité*. Puiseux clôt son mémoire de 1850 en soulignant la concordance de ses travaux avec ceux de Hermite, tout en mettant en avant son approche par les chemins d'intégration imaginaires :

> Je dois dire encore que les résultats auxquels je suis arrivé concordent avec ceux obtenus par M. Hermite dans un travail dont l'extrait se trouve au tome XVIII des *Comptes Rendus* (séance du 17 juin 1844) [18]. Par une heureuse généralisation de la marche qu'a suivie M. Jacobi pour les fonctions abéliennes, l'auteur obtient les expressions des périodes des fonctions inverses des intégrales de différentielles algébriques ; mais, pour bien comprendre la signification de ces résultats, il me semble nécessaire de prendre pour point de départ la définition donnée par M. Cauchy des intégrales prises entre des limites imaginaires : c'est à ce point de vue seulement qu'on peut se rendre compte des valeurs multiples de l'intégrale. [Puiseux 1850, p. 480]

Continuons encore sur ces questions autour de valeurs de fonctions définies par des équations $f(u, z) = 0$ avec ce que Jordan appelle les groupes de monodromie de ces équations.

C.1.5 Groupe de monodromie

La notion de groupe de monodromie intervient lors de l'étude d'équations qui sont de la forme $f(u, z) = 0$, où u est l'inconnue et z un paramètre [19]. La citation suivante de Joseph Bertrand, que j'emprunte à [Goldstein 2011a, p. 250], montre l'idée sous-jacente à cette notion et en souligne les liens avec les travaux de Puiseux :

> Ch. Sturm [...] m'aborda un jour par cette question que personne avant Puiseux ne s'était proposée : « Si vous suivez le long d'un contour fermé la racine d'une équation dont un paramètre représente un point du contour, qu'obtiendrez-vous en revenant au point de départ ? » — « Je retrouverai ma racine, répondis-je sans hésiter. » — « Eh bien, non ! vous ne la retrouverez pas : ce Puiseux le démontre. [...] » [Bertrand 1884, p. 231]

Reprenons pour exemple l'équation $u^2 - z = 0$, où u est l'inconnue et z le paramètre. Si l'on pose $z = re^{it}$, les deux racines de l'équation sont

$$u_1(re^{it}) = \sqrt{r}e^{it/2} \qquad \text{et} \qquad u_2(re^{it}) = -\sqrt{r}e^{it/2}.$$

18. Il s'agit de [Hermite 1844].
19. Tout comme Jordan, je ne présente ici que le cas où il n'y a qu'un paramètre en jeu et me contente d'indiquer que ce suit s'étend *mutatis mutandis* au cas où il y a plusieurs paramètres.

Faisons décrire à z un cercle complet autour de 0, dans le sens trigonométrique ; autrement dit, faisons varier t de 0 à 2π dans les formules précédentes. Lorsque $t = 0$, on a

$$u_1(re^{i0}) = \sqrt{r} \qquad \text{et} \qquad u_2(re^{i0}) = -\sqrt{r},$$

alors que quand $t = 2\pi$, on a

$$u_1(re^{2i\pi}) = -\sqrt{r} \qquad \text{et} \qquad u_2(re^{2i\pi}) = \sqrt{r}.$$

Les deux racines ont donc été échangées après que z a décrit le cercle un cercle. Si l'on faisait faire à z un tour supplémentaire, alors il y aurait un nouvel échange, qui équivaudrait donc à laisser u_1 et u_2 invariantes par un chemin consistant en deux tours autour de 0.

Plus généralement, lorsque z parcourt un chemin fermé, les racines de l'équation $f(u, z)$ sont permutées entre elles. Une fonction de z qui reprend les mêmes valeurs à chaque fois que z reprend la même valeur est appelée *fonction monodrome* de z — dans l'exemple précédent, on peut voir que la fonction $u_1 + u_2$ est monodrome. Cette notion permet à Jordan d'énoncer :

> Théorème. — Soit $f(u, z) = 0$ une équation dont les coefficients contiennent un paramètre indéterminé z. On peut déterminer entre les racines de cette équation un groupe de substitutions H tel, que toute fonction rationnelle des racines et de z monodrome par rapport à z soit invariable par les substitutions de H (indépendamment de toute valeur particulière donnée à z), et réciproquement. [Jordan 1870b, p. 277]

Le groupe H ainsi défini est le *groupe de monodromie*[20] de l'équation $f(u, z)$ par rapport à z. Dans la démonstration de ce théorème, Jordan montre en particulier que le groupe de monodromie est formé des permutations de racines provenant de toutes les lois de variations possibles de z.

Par exemple, pour l'équation $u^2 - z = 0$, il est aisé de voir que le groupe de monodromie par rapport à z est formé de l'identité et de la transposition correspondant à l'échange des racines u_1 et u_2 : en termes modernes, les lacets entourant 0 avec un indice pair induisent l'identité tandis que ceux avec indice impair induisent la transposition. La fonction $u_1 + u_2$ est monodrome par rapport à z et est effectivement invariante par la transposition échangeant u_1 et u_2.

Dans le *Traité*, Jordan montre un résultat permettant de relier groupes de monodromie et groupe algébrique d'une équation : le groupe de monodromie de $f(u, z)$ par rapport à z est (en termes modernes) un sous-groupe distingué du groupe algébrique de l'équation $f(u, z) = 0$, où le paramètre z est considéré comme une quantité adjointe. Dans l'exemple de $u^2 - z$, il y a même égalité entre groupe de monodromie et groupe algébrique.

20. Le groupe de monodromie d'une équation avait déjà été introduit par Hermite en 1851, suite aux travaux de Puiseux. Mais le terme « monodromie » semble être apparu avec Jordan. Voir [Goldstein 2011a, p. 255-256].

C.1.6 Groupe abélien

L'étude (par Jordan) de l'équation de division des fonctions hyperelliptiques fait intervenir à de nombreuses reprises des substitutions particulières, que Jordan nomme « abéliennes » et qui forment un groupe appelé « abélien ». Ce groupe est défini et étudié dans le paragraphe VIII du chapitre II, livre II « Des substitutions linéaires », du *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Dans cette section sont présentées la définition [21] et les principales propriétés de ce groupe telles que Jordan les énonce dans ledit paragraphe, en ajoutant çà et là des éclaircissements en termes modernes.

Comme dans le *Traité*, la lettre p désignera dans la suite de cette section un nombre premier. Jordan entame son paragraphe sur le « groupe abélien » de la façon suivante :

> Dans ses importantes recherches sur la transformation des fonctions abéliennes, M. Hermite [22] a dû résoudre le problème suivant :
>
> *Soient $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n; \xi_1, \eta_1, \cdots, \xi_n, \eta_n$ deux suites de $2n$ indices, répartis en n couples dans chacune d'elles ; et soit donnée la fonction*
>
> $$\varphi = x_1\eta_1 - \xi_1 y_1 + \ldots + x_n\eta_n - \xi_n y_n.$$
>
> *Trouver, parmi les substitutions du groupe linéaire du degré p^{2n}, celles qui, étant opérées à la fois sur chacune des deux suites d'indices qui entrent dans la fonction φ, multiplieront cette fonction par un simple facteur constant (abstraction faite des multiples de p).* [Jordan 1870b, p. 171]

Jordan indique que ces substitutions forment un groupe qu'il baptise *groupe abélien*, les substitutions le formant étant qualifiées d'*abéliennes* [23]. Il écrit ensuite qu'une substitution

21. Jordan donne en fait deux définitions différentes du groupe abélien. Nous nous contentons d'exposer la première de ces définitions : c'est celle qui apparaît naturellement dans l'étude de l'équation de division des fonctions hyperelliptiques. D'après Jordan, c'est également celle-ci qui s'est dégagée en premier dans le temps (voir la note 22).

22. Dans sa Notice destinée à sa candidature à l'Académie des Sciences, Jordan attribue explicitement la découverte du groupe abélien à Hermite : « Groupe découvert par M. Hermite dans ses recherches sur la transformation des fonctions abéliennes. » Dans sa préface des Œuvres complètes d'Hermite, Émile Picard écrit à ce sujet : « la notion importante de substitution abélienne, telle qu'elle est utilisée par M. Jordan, trouve son point de départ dans une importante remarque du Mémoire sur la transformation des fonctions abéliennes », [Hermite *Œuvres*, p. xxv] — le mémoire en question est [Hermite 1855]. Au sujet des transformations des fonctions abéliennes, voir par exemple [Houzel 1978, p. 84-85].

23. En termes modernes, le groupe abélien est donc le sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(\mathbf{F}_p^{2n})$ formé des transformations g pour lesquelles il existe $m \in \mathbf{F}_p^*$ tel que

$$\forall X, \Xi \in \mathbf{F}_p^{2n}, \quad \varphi(gX, g\Xi) = m\varphi(X, \Xi).$$

Matriciellement, une matrice $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$ est abélienne s'il existe $m \in \mathbf{F}_p^*$ tel que

$${}^tSAS = mA,$$

où A désigne la matrice de la forme bilinéaire alternée φ dans la base canonique (A est diagonale par blocs, tous les blocs diagonaux étant égaux à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$). Ainsi, le groupe abélien est le groupe $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{F}_p) \rtimes \mathbf{F}_p^*$.

linéaire S donnée sous la forme

$$S = \left| \begin{array}{ll} x_1 & a'_1 x_1 + c'_1 y_1 + \ldots + a'_n x_n + c'_n y_n \\ y_1 & b'_1 x_1 + d'_1 y_1 + \ldots + b'_n x_n + d'_n y_n \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_n & a_1^{(n)} x_1 + c_1^{(n)} y_1 + \ldots + a_n^{(n)} x_n + c_n^{(n)} x_n \\ y_n & b_1^{(n)} x_1 + d_1^{(n)} y_1 + \ldots + b_n^{(n)} x_n + d_n^{(n)} x_n \end{array} \right|$$

est abélienne et multiplie φ par m lorsque les relations

$$\begin{cases} \sum_\nu a_\mu^{(\nu)} d_\mu^{(\nu)} - b_\mu^{(\nu)} c_\mu^{(\nu)} \equiv m, \\ \sum_\nu a_\mu^{(\nu)} d_{\mu'}^{(\nu)} - b_{\mu'}^{(\nu)} c_\mu^{(\nu)} \equiv 0, \quad \mu \neq \mu' \\ \sum_\nu a_\mu^{(\nu)} b_{\mu'}^{(\nu)} - b_\mu^{(\nu)} a_{\mu'}^{(\nu)} \equiv 0, \\ \sum_\nu c_\mu^{(\nu)} d_{\mu'}^{(\nu)} - d_\mu^{(\nu)} c_{\mu'}^{(\nu)} \equiv 0, \end{cases}$$

sont toutes satisfaites[24] (donc pour tous les indices μ et μ' compris entre 1 et n).

Parmi les substitutions abéliennes, Jordan distingue celles qui laissent φ invariante, c'est-à-dire celles pour lesquelles $m = 1$; ces substitutions forment un sous-groupe H de G[25]. Jordan montre que ce sous-groupe est engendré par les substitutions L_μ, M_μ

24. Pour vérifier cela, on peut utiliser une notation matricielle plus moderne : si on pose

$$S = \begin{pmatrix} a'_1 & c'_1 & \ldots & a'_n & c'_n \\ b'_1 & d'_1 & \ldots & b'_n & d'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{(n)} & c_1^{(n)} & \ldots & a_n^{(n)} & c_n^{(n)} \\ b_1^{(n)} & d_1^{(n)} & \ldots & b_n^{(n)} & d_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

alors la transformation linéaire représentée par S multiplie φ par m si, et seulement, si ${}^t SAS = mA$ (voir la note 23). On voit ensuite facilement que cette condition est équivalente à celles annoncées par Jordan. Par exemple, si on note $T^1, \ldots, T^n$ les blocs 2×2 formant la première colonne de S, pour que ${}^t SAS = mA$, il faut que

$$\sum_{\nu=1}^{n} {}^t T^\nu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T^\nu = m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais ${}^t T^\nu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T^\nu = (a_1^{(\nu)} d_1^{(\nu)} - b_1^{(\nu)} c_1^{(\nu)}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui amène par conséquent à la condition suivante : $\sum_\nu a_1^{(\nu)} d_1^{(\nu)} - b_1^{(\nu)} c_1^{(\nu)} \equiv 0$.

25. Dans un langage actuel, H est donc le groupe symplectique $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{F}_p)$.

et $N_{\mu,\nu}$ (avec $1 \leqslant \mu, \nu \leqslant n$) définies par

$$\begin{array}{lcl} L_\mu & = & | \ldots, x_\mu, y_\mu, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots, x_\mu + y_\mu, y_\mu, \ldots\ldots\ldots\ldots | \\ M_\mu & = & | \ldots, x_\mu, y_\mu, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots, y_\mu \quad , -x_\mu, \ldots\ldots\ldots\ldots | \\ N_{\mu,\nu} & = & | \ldots, x_\mu, y_\mu, \ldots x_\nu, y_\nu \ldots \quad \ldots, x_\mu + y_\nu, y_\mu, \ldots x_\nu + y_\mu, y_\nu \ldots |, \end{array}$$

où sont omis, comme dans le *Traité*, les couples de variables laissées inaltérées. Grâce à ces substitutions, Jordan démontre que l'ordre de H est

$$\Omega_n = (p^{2n} - 1)p^{2n-1}(p^{2n-2} - 1)p^{2n-3} \cdots (p^2 - 1)p$$

et que, si p est impair, les facteurs de composition de H sont $\Omega_n/2$ et 2 — la démonstration contient en particulier le fait que ce que nous notons actuellement $\mathrm{PSp}_{2n}(\mathbf{F}_p)$ est simple pour p impair et $n > 2$.

Jordan prouve de plus que le groupe abélien est d'ordre $(p-1)\Omega_n$, qu'il est engendré par les substitutions L_μ, M_μ, $N_{\mu,\nu}$ précédentes jointes à la substitution

$$U = |x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \qquad rx_1, y_1, \ldots, rx_n, y_n|,$$

où r est une racine primitive de la congruence $r^{p-1} \equiv 1$, et enfin que ses facteurs de composition sont les facteurs premiers de $p-1$ ainsi que ceux de H.

C.2 Équation de la division

Dans cette section est présenté le travail de Jordan sur l'équation de la division des fonctions hyperelliptiques. Dans le *Traité des substitutions et des équations algébriques*, le paragraphe concernant les fonctions hyperelliptiques est partagé en deux parties. La première correspond à ce qui est détaillé dans la présente section. Quant à la seconde, consacrée à la trisection des périodes, elle sera vue dans la section suivante.

C.2.1 Rappels et notations de Jordan

Au début de son paragraphe sur les fonctions hyperelliptiques, Jordan pose ses notations. Il définit ainsi un polynôme

$$\Delta^2(x) = (x - m_0)(x - m_1) \ldots (x - m_5) = x^6 + ax^5 + \cdots + f$$

ainsi que les intégrales hyperelliptiques qui y sont attachées :

$$u = \int_0^x \frac{\mu + \nu x}{\Delta(x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^y \frac{\mu + \nu y}{\Delta(y)}\,\mathrm{d}y \qquad \text{et} \qquad v = \int_0^x \frac{\mu' + \nu' x}{\Delta(x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^y \frac{\mu' + \nu' y}{\Delta(y)}\,\mathrm{d}y.$$

Il rappelle que si x et y varient de sorte que leur valeur finale, ainsi que celle de $\Delta(x)$ et $\Delta(y)$, soient identiques à leur valeur initiale, alors les fonctions u et v sont augmentées de multiples entiers de leurs périodes respectives — P_1, P_2, P_3, P_4 pour u ; Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 pour v. Ces périodes sont données par

$$\begin{array}{ll} P_1 = A_0 - A_1 & Q_1 = B_0 - B_1 \\ P_2 = A_1 - A_2 & Q_2 = B_1 - B_2 \\ P_3 = A_3 - A_4 & Q_3 = B_3 - B_4 \\ P_4 = A_4 - A_5 & Q_4 = B_4 - B_5, \end{array}$$

où les A_i et les B_i sont les intégrales élémentaires, qui sont les valeurs respectives des intégrales

$$\int \frac{\mu + \nu x}{\Delta(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int \frac{\mu' + \nu' x}{\Delta(x)}\,\mathrm{d}x$$

calculées le long du chemin élémentaire C_i relatif au point critique m_i. Ces intégrales élémentaires vérifient enfin les équations

$$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - A_5 = B_0 - B_1 + B_2 - B_3 + B_4 - B_5 = 0.$$

Jordan rappelle en outre, en se référant à [Jacobi 1832 ; Jacobi 1835], que les fonctions hyperelliptiques définies par $x = \lambda_0(u, v)$ et $y = \lambda_1(u, v)$ possèdent respectivement les périodes $P_1, \dots, P_4$ et $Q_1, \dots, Q_4$ comme périodes. De plus, les quantités

$$\lambda_0(u_1 + u_2 + \cdots, v_1 + v_2 + \cdots) \qquad \text{et} \qquad \lambda_1(u_1 + u_2 + \cdots, v_1 + v_2 + \cdots)$$

sont les racines d'une équation du second degré dont les coefficients sont des fonctions rationnelles en les $\lambda_i(u_r, v_r)$ et $\Delta(\lambda_i(u_r, v_r))$ et symétriques par rapport aux symboles λ_0 et λ_1.

C.2.2 Formation de l'équation de la division

Comme l'écrit Jordan, il découle des propriétés rappelées dans le paragraphe précédent que $\lambda_0(u, v)$ et $\lambda_1(u, v)$ sont les solutions d'une équation du second degré X dont les coefficients sont rationnels en les quantités $\lambda_0\,(u/n, v/n)$, $\lambda_1\,(u/n, v/n)$, $\Delta\,[\lambda_0\,(u/n, v/n)]$, $\Delta\,[\lambda_1\,(u/n, v/n)]$, et symétriques par rapport aux symboles λ_0 et λ_1. Jordan poursuit : « Réciproquement, substituons dans l'équation X la valeur de $\lambda_0(u, v)$, et celle de $\lambda_1(u, v)$, supposées connues. Nous obtiendrons deux équations algébriques X_0, X_1, qui serviront à déterminer $\lambda_0\,(u/n, v/n)$ et $\lambda_1\,(u/n, v/n)$ », [Jordan 1870b, p. 355].

Pour expliquer ce dernier point, reprenons les notations de Jacobi décrites plus haut et mettons ainsi X sous la forme

$$U\left(\lambda_0\left(\frac{u}{n},\frac{v}{n}\right),\lambda_1\left(\frac{u}{n},\frac{v}{n}\right),\Delta\left[\lambda_0\left(\frac{u}{n},\frac{v}{n}\right)\right],\Delta\left[\lambda_1\left(\frac{u}{n},\frac{v}{n}\right)\right]\right)z^2+U'z+U''=0,$$

où les arguments de U' et U'' ont été omis pour plus de clarté. Substituer z par $\lambda_0(u,v)$ donne l'équation

$$U\left(\lambda_0\left(\frac{u}{n},\frac{v}{n}\right),\lambda_1\left(\frac{u}{n},\frac{v}{n}\right),\Delta\left[\lambda_0\left(\frac{u}{n},\frac{v}{n}\right)\right],\Delta\left[\lambda_1\left(\frac{u}{n},\frac{v}{n}\right)\right]\right)\lambda_0(u,v)^2+ \\ +U'\lambda_0(u,v)+U''=0$$

Un point important que Jordan ne mentionne pas à cet endroit, mais plus tard pour une autre démonstration, est que $\Delta\left[\lambda_0\left(u/n,v/n\right)\right]$, $\Delta\left[\lambda_1\left(u/n,v/n\right)\right]$ peuvent s'exprimer rationnellement en fonction des $\lambda_i(u,v)$, $\Delta(\lambda_i(u,v))$ et $\lambda_i(u/n,v/n)$. L'équation peut donc se mettre sous la forme

$$V\left(\lambda_0\left(\frac{u}{n},\frac{v}{n}\right),\lambda_1\left(\frac{u}{n},\frac{v}{n}\right),\lambda_0(u,v),\lambda_1(u,v),\Delta(\lambda_0(u,v)),\Delta(\lambda_1(u,v))\right)\lambda_0(u,v)^2+ \\ +V'\lambda_0(u,v)+V''=0.$$

Remplaçons $\lambda_0\left(u/n,v/n\right)$ et $\lambda_1\left(u/n,v/n\right)$ par deux inconnues x et y :

$$V\left(x,y,\lambda_0(u,v),\lambda_1(u,v),\Delta(\lambda_0(u,v)),\Delta(\lambda_1(u,v))\right)\lambda_0(u,v)^2+V'\lambda_0(u,v)+V''=0.$$

On ainsi obtient l'équation X_0 mentionnée par Jordan. De même, l'équation X_1 s'écrit

$$V\left(x,y,\lambda_1(u,v),\lambda_0(u,v),\Delta(\lambda_1(u,v)),\Delta(\lambda_0(u,v))\right)\lambda_1(u,v)^2+V'\lambda_1(u,v)+V''=0.$$

La symétrie en les symboles λ_0, λ_1 évoquée précédemment implique que si (α_0,α_1) est un couple de solutions de ce système, alors (α_1,α_0) est également solution.

Continuons à suivre Jordan :

> On obtiendra donc la même équation finale E, quelle que soit celle des deux inconnues qu'on élimine entre les deux équations ci-dessus ; et les racines de cette équation peuvent se grouper en couples, en réunissant ensemble les deux qui vérifient simultanément les équations X_0, X_1. [Jordan 1870b, p. 355]

Cette assertion est laissée sans démonstration par Jordan. Vérifions-la dans un langage plus actuel. Notant P_0, P_1 les polynômes écrits ci-dessus et définissant les équations X_0, X_1, l'équation obtenue en éliminant x (resp. y) correspond au résultant de P_0 et P_1 par rapport à x (resp. y) :

$$\mathrm{Res}_x(P_0,P_1)=\prod_{\substack{\alpha_0 \text{ tel que}\\ P_0(\alpha_0,y)=0}}P_1(\alpha_0,y)\qquad\text{et}\qquad\mathrm{Res}_y(P_0,P_1)=\prod_{\substack{\alpha_1 \text{ tel que}\\ P_1(x,\alpha_1)=0}}P_0(x,\alpha_1).$$

Par conséquent, $\mathrm{Res}_x(P_0, P_1)(\alpha_1) = 0$ équivaut à

$$\exists\alpha_0, \begin{cases} P_0(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \\ P_1(\alpha_0, \alpha_1) = 0, \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire, par symétrie, à} \quad \exists\alpha_0, \begin{cases} P_0(\alpha_1, \alpha_0) = 0 \\ P_1(\alpha_1, \alpha_0) = 0, \end{cases}$$

ce qui équivaut encore à $\mathrm{Res}_y(P_0, P_1)(\alpha_1) = 0$. Les deux polynômes (qu'on peut toujours supposer unitaires) $\mathrm{Res}_x(P_0, P_1)$ et $\mathrm{Res}_y(P_0, P_1)$ sont de même degré, sont scindés et ont mêmes racines : ils sont donc égaux, ce qui démontre la première partie de la proposition de Jordan. La seconde partie se voit dans notre démonstration : il s'agit de grouper les racines de E par couples (α_0, α_1).

En outre, un tel couple est transformé en un autre tel couple par toute substitution du groupe de E, ce qui montre que l'équation E n'est pas primitive. Jordan en déduit qu'elle se décompose en équations du second degré lorsqu'on lui adjoint les racines d'une équation N, dont dépend une fonction symétrique arbitrairement choisie des deux racines d'un même couple.

Pour voir cela, j'adapte à la situation présent un morceau de preuve de Jordan donné à un autre endroit du *Traité*[26]. Notons k le corps de base, et $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_0', \alpha_1', \ldots, \alpha_0^{(m)}, \alpha_1^{(m)}$ les racines de E, regroupées par couples $(\alpha_0^{(r)}, \alpha_1^{(r)})$. L'équation s'écrit ainsi

$$\prod_{r=0}^{m} (x - \alpha_0^{(r)})(x - \alpha_1^{(r)}) = 0.$$

Soit maintenant une fonction $f = f(\alpha_0, \alpha_1)$ symétrique en α_0, α_1, et soient $f^{(r)}$ les fonctions obtenues à partir de f en y remplaçant α_0, α_1 par $\alpha_0^{(r)}, \alpha_1^{(r)}$. Il est aisé de vérifier que toute fonction symétrique de $f, f', \ldots, f^{(m)}$ est invariante par chaque substitution du groupe de E[27]. Par conséquent, l'équation N définie par

$$(x - f)(x - f') \ldots (x - f^{(r)}) = 0$$

est rationnelle, c'est-à-dire à coefficients dans k. D'autre part, toute fonction symétrique en $\alpha_0^{(r)}, \alpha_1^{(r)}$ est rationnelle[28] en $f^{(r)}$, donc $(x - \alpha_0^{(r)})(x - \alpha_1^{(r)}) \in k(f^{(r)})[x]$: tous les facteurs du produit

$$\prod_{r=0}^{m} (x - \alpha_0^{(r)})(x - \alpha_1^{(r)}) = 0$$

sont donc rationnels après adjonction de $f, f', \ldots, f^{(r)}$, c'est-à-dire après résolution de N. C'est précisément ce que Jordan avait annoncé.

26. Il s'agit de la preuve de la réciproque du THÉORÈME IV, [Jordan 1870b, p. 259-260].
27. En effet, une telle substitution σ permute entre elles les paires de racines, et la symétrie des fonctions $f^{(r)}$ entraîne que σ permute entre elles les $f, f', \ldots, f^{(r)}$.
28. Voir [Jordan 1870b, COROLLAIRE II, p. 262].

L'équation N est celle de la division des fonctions hyperelliptiques ; Jordan montre ensuite qu'elle est de degré n^4. Pour cela, il procède de la façon suivante. Soit une de ses racines $f\left[\lambda_0\left(u/n, v/n\right), \lambda_1\left(u/n, v/n\right)\right]$. Les quantités $\lambda_0(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$ ainsi que leur radicaux restent inchangés lorsque u et v sont remplacés respectivement par

$$u + p_1P_1 + q_1P_2 + p_2P_3 + q_2P_4 \qquad \text{et} \qquad v + p_1Q_1 + q_1Q_2 + p_2Q_3 + q_2Q_4,$$

où p_1, q_1, p_2 et q_2 sont des entiers quelconques. Par conséquent, les expressions

$$f\left[\lambda_0\left(\frac{u + p_1P_1 + q_1P_2 + p_2P_3 + q_2P_4}{n}, \frac{v + p_1Q_1 + q_1Q_2 + p_2Q_3 + q_2Q_4}{n}\right),\right.$$
$$\left.\lambda_1\left(\frac{u + p_1P_1 + q_1P_2 + p_2P_3 + q_2P_4}{n}, \frac{v + p_1Q_1 + q_1Q_2 + p_2Q_3 + q_2Q_4}{n}\right)\right]$$

sont toutes des racines de N. Il y en a autant que de quadruplets (p_1, q_1, p_2, q_2) modulo n, ce qui fait en tout n^4 racines [29], que Jordan désigne par les symboles $(p_1q_1p_2q_2)$.

Jordan montre enfin que si n est un entier composé, égal à rs, alors la résolution de N revient à la résolution successives de deux équations analogues à N et de degrés respectifs r^4 et s^4. Je n'en détaille pas ici la preuve, basée sur le fait qu'on peut exprimer les radicaux $\Delta\left[\lambda_i\left(u/r, v/r\right)\right]$ rationnellement en fonction de $\lambda_i(u,v)$, $\Delta(\lambda_i(u,v))$ et $\lambda_i\left(u/r, v/r\right)$. Dans toute la suite, Jordan suppose ainsi que la division se fait par un entier n premier.

C.2.3 Groupes de monodromie

Une grande partie du travail de Jordan consiste à déterminer les groupes de monodromie d'équations associées aux fonctions hyperelliptiques. L'idée est de voir comment les variations des paramètres de ces équations modifient les périodes des fonctions hyperelliptiques et donc les racines desdites équations.

Tout d'abord, Jordan regarde le groupe de monodromie de N par rapport aux quantités $\lambda_0(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, $\Delta(\lambda_0(u,v))$ et $\Delta(\lambda_1(u,v))$. Comme il l'a rappelé au début de son paragraphe sur les fonctions hyperelliptiques, si ces quantités varient de façon quelconque puis reprennent leurs valeurs initiales, alors u et v sont changées en [30]

$$u' = u + \delta_1P_1 + \varepsilon_1P_2 + \delta_2P_3 + \varepsilon_2P_4 \quad \text{et} \quad v' = v + \delta_1Q_1 + \varepsilon_1Q_2 + \delta_2Q_3 + \varepsilon_2Q_4,$$

où $\delta_1, \ldots, \varepsilon_2$ sont des entiers quelconques. Ainsi, la racine $(p_1q_1p_2q_2)$ est changée en la racine $(p_1+\delta_1, q_1+\varepsilon_1, p_2+\delta_2, q_2+\varepsilon_2)$, et donc le groupe de monodromie cherché est formé

29. À noter que Jordan ne montre pas que toutes les racines sont nécessairement de cette forme.

30. Les notations u' et v' sont les miennes et n'apparaissent pas dans le *Traité*. À partir de maintenant, j'utiliserai systématiquement des symboles « prime » pour désigner les valeurs finales de certaines quantités, lorsque d'autres auront parcouru un chemin fermé.

des substitutions

$$|p_1, q_1, p_2, q_2 \qquad p_1 + \delta_1, q_1 + \varepsilon_1, p_2 + \delta_2, q_2 + \varepsilon_2|.$$

En termes modernes, il s'agit donc du groupe des translations de l'espace $\mathbf{F}_n^4$.

Dans un deuxième temps, Jordan adjoint à N sa racine (0000), et note Z l'équation de degré $n^4 - 1$ ainsi obtenue. Il en cherche le groupe de monodromie Γ par rapport aux modules $m_0, \ldots, m_5$ (je rappelle que ce sont les racines du polynôme Δ^2 définissant les intégrales hyperelliptiques). Pour cela, Jordan indique qu'il va utiliser la même méthode qu'il a appliquée dans le paragraphe sur les fonctions elliptiques ; il s'agit d'« une méthode élégante, due à M. E. Mathieu [31] ». Jordan commence par décortiquer le problème : si les $m_1, \ldots, m_5$ restent fixes, alors les variations de m_0 sur des chemins fermés induisent des permutations des racines de Z, qui donnent le groupe de monodromie de Z par rapport à m_0. On obtient de même les groupes de monodromie par rapport à chacun des modules, et le groupe de monodromie par rapport à tous les modules s'obtient en « combinant entre elles les substitutions de tous ces groupes partiels [32] », [Jordan 1870b, p. 338].

Jordan explique ensuite que tout déplacement de m_0 suivant une courbe fermée peut se décomposer suivant plusieurs courbes fermées particulières : d'une part, des courbes enveloppant chacun des autres modules m_i sans couper les autres contours élémentaires — ces courbes sont notées D_{0i} par Jordan —, et d'autre part, une courbe n'entourant aucun des modules. Pour ce dernier type de courbe, les périodes des fonctions hyperelliptiques sont inchangées, donc les racines de Z également : ce mouvement de m_0 ne contribue donc pas au groupe de monodromie. La figure suivante représente le déplacement D_{01} :

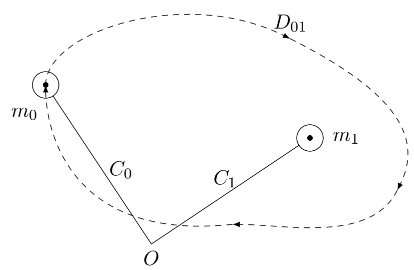


FIGURE C.1 – Le déplacement D_{01}.

Il reste donc à voir comment un déplacement D_{0i} modifie les périodes.

31. Aucune référence précise n'est donnée par Jordan, mais il s'agit très probablement de [Mathieu 1867]. Dans ce mémoire sur les fonctions elliptiques, Mathieu utilise effectivement des techniques similaires en tout point à ce que Jordan fait ici. En particulier, Jordan semble avoir repris exactement le même type de dessins explicatifs. Voir en particulier [Mathieu 1867, p. 283-284] et comparer les figures de [Mathieu 1867, p. 283] et de [Jordan 1870b, p. 339].

32. [Jordan 1870b, p. 358].

Comme Jordan, regardons par exemple le déplacement D_{01}, en nous aidant de la figure C.2, reproduite à partir du *Traité*. Il faut comprendre qu'au fur et à mesure que m_0

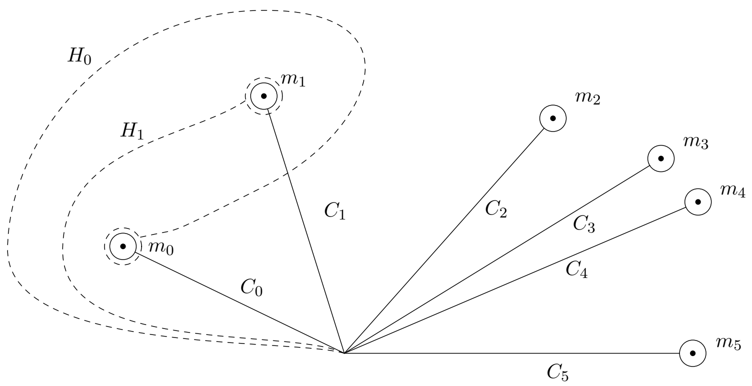


FIGURE C.2 – Reproduction de la figure située à [Jordan 1870b, p. 358]. Les chemins en pointillés sont les déformations des chemins C_0 et C_1 à la fin du mouvement D_{01} ; la notation H_0 et H_1 de Jordan est ici changée en C'_0, C'_1.

parcourt D_{01}, les chemins C_0 et C_1 se déforment par continuité, jusqu'à donner les chemins en pointillés de la figure C.2. Jordan invoque cette figure pour justifier que C_0 et C_1 sont changés en [33]

$$C'_0 = C_0C_1C_0C_1C_0 \qquad \text{et} \qquad C'_1 = C_0C_1C_0.$$

Pour expliquer cela, je reproduis sur la figure C.3 les chemins C'_0 et C'_1 séparément. Avec

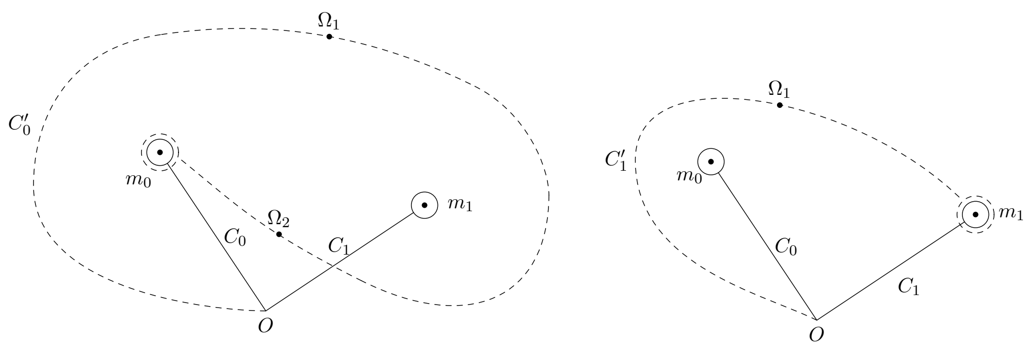


FIGURE C.3 – Les chemins C'_0 et C'_1, sur lesquels j'ai introduit les points Ω_1 et Ω_2.

les points Ω_1 et Ω_2 introduits sur cette figure, le chemin C'_0 est la somme des chemins $O\Omega_1$, puis $\Omega_1\Omega_2$, puis $\Omega_2\Omega_2$ en enlaçant m_0, puis $\Omega_2\Omega_1$, puis enfin $\Omega_1 O$, ce qui donne bien $C'_0 = C_0C_1C_0C_1C_0$. On peut s'aider de même du point Ω_1 pour voir que $C'_1 = C_0C_1C_0$.

33. La notation $C_0C_1C_0$, qui est celle de Jordan, désigne naturellement la concaténation successive des contours C_0, C_1 puis C_0.

Il faut ensuite voir comment sont transformées les intégrales élémentaires ; pour cela, il ne faut pas oublier qu'à chaque fois qu'un contour élémentaire est parcouru, le radical $\Delta(x)$ présent dans l'intégrale hyperelliptique change de signe. Ainsi, seules A_0 et A_1 sont changées, et deviennent

$$\begin{cases} A_0' = A_0 - A_1 + A_0 - A_1 + A_0 = 3A_0 - 2A_1 \\ A_1' = A_0 - A_1 + A_0 = 2A_0 - A_1, \end{cases}$$

et par conséquent, les périodes P_1 et P_2 sont changées en

$$\begin{cases} P_1' = A_0' - A_1' = A_0 - A_1 = P_1 \\ P_2' = A_1' - A_2' = 2A_0 - A_1 - A_2 = 2P_1 + P_2, \end{cases}$$

alors que les autres périodes restent inchangées.

Regardons maintenant l'exemple du déplacement D_{02} — il est un peu plus compliqué que le précédent et révèle des difficultés qui y étaient restées cachées. La figure C.4 montre que les chemins C_0 et C_2 deviennent

$$C_0' = C_0C_1C_2C_1C_0C_1C_2C_1C_0 \qquad \text{et} \qquad C_2' = C_1C_0C_1C_2C_1C_0C_1.$$

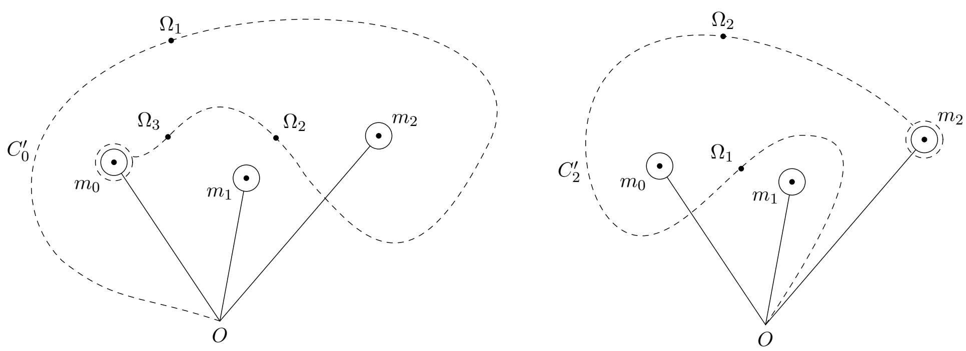


Figure C.4 – Les chemins C_0' et C_2' à l'issue du déplacement D_{02}. On peut s'aider des points Ω pour les décomposer en fonction des chemins C_0, C_1 et C_2.

Ainsi, A_0 et A_2 deviennent

$$\begin{cases} A_0' = A_0 - A_1 + A_2 - A_1 + A_0 - A_1 + A_2 - A_1 + A_0 \\ A_2' = A_1 - A_0 + A_1 - A_2 + A_1 - A_0 + A_1, \end{cases}$$

et on calcule ensuite

$$\begin{cases} P_1' = A_0' - A_1' = 3A_0 - 5A_1 + 2A_2 = 3P_1 - 2P_2 \\ P_2' = A_1' - A_2' = 2A_0 - 3A_1 + A_2 = 2P_1 - P_2. \end{cases}$$

Plus généralement, le déplacement $D_{0\mu}$ transforme A_0 et A_μ en

$$\begin{cases} A_0' = 3A_0 - 4A_1 + 4A_2 - \cdots + (-1)^{\mu-1}2A_\mu \\ A_\mu' = -A_\mu + 4A_{\mu-1} - 4A_{\mu-2} + \cdots + (-1)^{\mu-1}2A_0 \end{cases}$$

et laisse les autres intégrales élémentaires inchangées[34]. De cela découle que les valeurs finales $P_1', \ldots, P_4'$ des périodes s'expriment linéairement en fonction de $P_1, \ldots, P_4$.

Jordan indique ensuite que les changements dus à un déplacement $D_{\rho\mu}$ de m_ρ autour de m_μ s'obtiennent de façon analogue[35]. Enfin, pour les périodes $Q_1, \ldots, Q_4$, leurs valeurs finales $Q_1', \ldots, Q_4'$ s'expriment en fonction de $Q_1, \ldots, Q_4$ exactement de la même façon que $P_1', \ldots, P_4'$ s'expriment en fonction de $P_1, \ldots, P_4$.

Jordan affirme qu'« après chacun des déplacements considérés, on aura l'identité facile à vérifier[36] »

$$P_1'Q_2' - Q_1'P_2' + P_3'Q_4' - Q_3'P_4' = P_1Q_2 - Q_1P_2 + P_3Q_4 - Q_3P_4.$$

Il recompose alors tous les mouvements : un déplacement quelconque de $m_0, \ldots, m_5$ est composé de déplacements $D_{01}, \ldots, D_{05}, D_{10}$, etc., et tous ces déplacements transforment linéairement $P_1, \ldots, P_4$ et $Q_1, \ldots, Q_4$. Par conséquent, un mouvement quelconque des modules $m_0, \ldots, m_5$ transforme également les périodes de façon linéaire avec coefficients entiers :

$$\begin{aligned} P_1' &= \alpha_1'P_1 + \beta_1'P_2 + \alpha_1''P_3 + \beta_1''P_4, \qquad & P_2' &= \gamma_1'P_1 + \delta_1'P_2 + \gamma_1''P_3 + \delta_1''P_4, \\ P_3' &= \alpha_2'P_1 + \beta_2'P_2 + \alpha_2''P_3 + \beta_2''P_4, \qquad & P_4' &= \gamma_2'P_1 + \delta_2'P_2 + \gamma_2''P_3 + \delta_2''P_4, \end{aligned}$$

34. Jordan semble faire une erreur, car il écrit que A_μ est changée en

$$-2A_\mu + 4A_{\mu-1} - 4A_{\mu-2} + \cdots + (-1)^{\mu-1}A_0,$$

ce qui ne concorde pas avec les calculs faits pour D_{01}. La formule que nous avons donnée semble correcte : elle s'applique à D_{02} et à D_{03} (je ne retranscris pas ici ces derniers calculs), et elle concorde surtout avec la suite. Voir la note 36. À noter que pour D_{03}, il est nécessaire d'utiliser la formule $A_0 - A_1 + \ldots - A_5 = 0$ afin de montrer que $P_1' = P_1 - 2P_2 - 2P_4$ et $P_3' = -2P_2 + P_3 - 2P_4$.

35. On peut le faire pour D_{12} ; effectivement, des considérations tout à fait similaires à ce qui précède montrent que seuls sont changés C_1 et C_2. Plus précisément, on a

$$C_1' = C_1C_2C_1C_2C_1 \qquad \text{et} \qquad C_2' = C_1C_2C_1,$$

d'où l'on déduit successivement $A_1' = 3A_1 - 2A_2$, $A_2' = 2A_1 - A_2$ puis $P_1' = P_1 - 2P_2$ et $P_2' = P_2$.

36. Je l'ai vérifié, ce qui fastidieux mais sans difficulté. D'ailleurs, cette vérification prouve que la formule donnée par Jordan pour A_μ' est effectivement erronée (voir la note 34).

et de même pour $Q'_1, \dots, Q'_4$. L'invariance de $P_1Q_2 - Q_1P_2 + P_3Q_4 - Q_3P_4$ impose alors les conditions

$$\begin{array}{rclcl} \alpha'_1\delta'_1 - \beta'_1\gamma'_1 + \alpha'_2\delta'_2 - \beta'_2\gamma'_2 & = & \alpha''_1\delta''_1 - \beta''_1\gamma''_1 + \alpha''_2\delta''_2 - \beta''_2\gamma''_2 & = & 1 \\ \alpha'_1\delta''_1 - \gamma'_1\beta''_1 + \alpha'_2\delta''_2 - \gamma'_2\beta''_2 & = & \alpha''_1\delta'_1 - \gamma''_1\beta'_1 + \alpha''_2\delta'_2 - \gamma''_2\beta'_2 & = & 0 \\ \alpha'_1\gamma''_1 - \gamma'_1\alpha''_1 + \alpha'_2\gamma''_2 - \gamma'_2\alpha''_2 & = & \beta'_1\delta''_1 - \delta'_1\beta''_1 + \beta'_2\delta''_2 - \delta'_2\beta''_2 & = & 0. \end{array}$$

Ensuite, remplacer dans la racine $(p_1q_1p_2q_2)$ les périodes P_i et Q_i par P'_i et Q'_i, revient à effectuer sur p_1, q_1, p_2, q_2 une substitution

$$\left| \begin{array}{lll} p_1,\ q_1 & a'_1p_1 + c'_1q_1 + a'_2p_2 + c'_2q_2, & b'_1p_1 + d'_1q_1 + b'_2p_2 + d'_2q_2 \\ p_2,\ q_2 & a''_1p_1 + c''_1q_1 + a''_2p_2 + c''_2q_2, & b''_1p_1 + d''_1q_1 + b''_2p_2 + d''_2q_2 \end{array} \right|$$

dont les coefficients $a'_1, \dots, d''_2$ sont des entiers congrus à $\alpha'_1, \dots, \delta''_2$ modulo n, donc vérifiant les conditions

$$\left\{ \begin{array}{rclcll} a'_1d'_1 - b'_1c'_1 + a'_2d'_2 - b'_2c'_2 & \equiv & a''_1d''_1 - b''_1c''_1 + a''_2d''_2 - b''_2c''_2 & \equiv & 1 & \bmod n \\ a'_1d''_1 - c'_1b''_1 + a'_2d''_2 - c'_2b''_2 & \equiv & a''_1d'_1 - c''_1b'_1 + a''_2d'_2 - c''_2b'_2 & \equiv & 0 & \bmod n \\ a'_1c''_1 - c'_1a''_1 + a'_2c''_2 - c'2a''_2 & \equiv & b'_1d''_1 - d'_1b''_1 + b'_2d''_2 - d'_2b''_2 & \equiv & 0 & \bmod n. \end{array} \right.$$

Jordan note H le groupe des substitutions satisfaisant à ces dernières conditions : il s'agit d'un sous-groupe du groupe abélien [37], et le groupe de monodromie Γ est contenu dans H.

Jordan montre alors que Γ est égal à H, lorsque n est impair. Pour cela, il exhibe les cinq substitutions suivantes :

$$\begin{array}{rcll} S_1 & = & |p_1, q_1, p_2, q_2 & p_1 + 2q_1, q_1, p_2, q_2| \\ S_2 & = & |p_1, q_1, p_2, q_2 & p_1, q_1 - 2p_1, q_1, p_2, q_2| \\ S_3 & = & |p_1, q_1, p_2, q_2 & p_1, q_1, p_2 + 2q_2, q_2| \\ S_4 & = & |p_1, q_1, p_2, q_2 & p_1, q_1, p_2, q_2 - 2p_2| \\ S_5 & = & |p_1, q_1, p_2, q_2 & p_1 + 2q_1 - 2p_2, q_1, p_2, 2q_1 - 2p_2 + q_2|, \end{array}$$

qui appartiennent à Γ car elles proviennent des déplacements D_{01}, D_{12}, D_{34}, D_{45} et D_{23} respectivement [38]. Il montre ensuite que ces cinq substitutions engendrent le groupe H. Ce point-là ne sera pas détaillé ici ; il se prouve avec quelques manipulations sur diverses substitutions [39].

37. Plus précisément, H est, en termes actuels, le groupe symplectique $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_n)$. Voir C.1.6.

38. Voir par exemple ce qui précède pour D_{01} et la note 35 pour D_{12}.

39. Voir [Jordan 1870b, p. 360-361]. Les idées sont les suivantes. Si $V \in H$, on montre qu'il existe U dérivée de $S_1, \dots, S_5$ telle que $U(p_1) = V(p_1)$. Ensuite, on montre qu'il existe U_1 dérivée de $S_2, \dots, S_5$ telle

Enfin, Jordan traite le cas où $n = 2$. Les substitutions provenant de chacun des déplacements élémentaires des points critiques $m_0, \ldots, m_5$ sont alors toutes égales à l'unité, ce qui prouve que le groupe de monodromie est trivial. Jordan en conclut que « les racines de l'équation seront toutes des fonctions monodromes de $m_0, \ldots, m_5$ », [Jordan 1870b, p. 361].

Jordan passe ensuite à la recherche du groupe de monodromie Γ_1 de Z par rapport aux coefficients $a, \ldots, f$ du polynôme Δ^2. Pour cela, il remarque d'abord que si ces coefficients varient d'une manière quelconque puis reprennent leurs valeurs initiales, alors les modules $m_0, \ldots, m_5$ suivent certains chemins au terme desquels ils sont permutés entre eux. Ainsi, le groupe Γ_1 contient le groupe de monodromie de Z par rapport à $m_0, \ldots, m_5$ (ce qui correspond au cas où ces points reprennent tous leur valeur initiale) ainsi que les substitutions obtenues par les permutations de ces points entre eux.

Jordan explique le cas particulier de l'échange de m_ρ et $m_{\rho+1}$ et suppose que le mouvement de ces points est tel que « le point $m_{\rho+1}$ passe entre l'origine des coordonnées et le point m_ρ », [Jordan 1870b, p. 361]. Comme précédemment, il faut regarder comment sont transformés les contours élémentaires par ce mouvement. La figure suivante montre à gauche le déplacement d'échange entre m_ρ et $m_{\rho+1}$, et à droite les déformations de C_ρ et $C_{\rho+1}$.

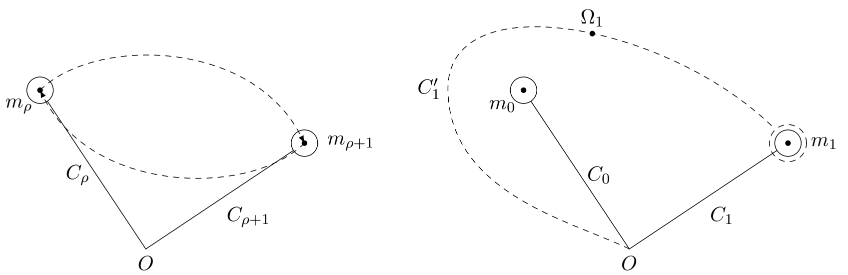


FIGURE C.5 – À gauche, le déplacement échangeant m_ρ et $m_{\rho+1}$. À droite, une reproduction de la figure placée en [Jordan 1870b, p. 361] à laquelle a été ajouté le point Ω_1.

Ces derniers deviennent respectivement

$$C'_\rho = C_\rho C_{\rho+1} C_\rho \qquad \text{et} \qquad C'_{\rho+1} = C_\rho.$$

Ainsi, les intégrales élémentaires modifiées sont les suivantes :

$$A'_\rho = 2A_\rho - A_{\rho+1} \qquad \text{et} \qquad A'_{\rho+1} = A_\rho.$$

que $U_1(q_1) = VU^{-1}(q_1)$ (et $U_1(p_1) = VU^{-1}(p_1) = p_1$ par construction). On continue ainsi de suite jusqu'à pouvoir exprimer V comme produit de substitutions dérivées de $S_1, \ldots, S_5$. L'hypothèse de l'imparité de n sert ici à pouvoir inverser 2 modulo n, ce qui nécessaire pour trouver les substitutions U et U_1.

Jordan indique alors que les nouvelles périodes se calculent aisément et qu'on peut immédiatement en déduire que les substitutions sur les racines $(p_1q_1p_2q_2)$ qui y correspondent appartiennent [40] au groupe H.

Jordan écrit ensuite que toutes les substitutions induites par les diverses permutations sur $m_0, \dots, m_5$ proviennent de celles induites par les transpositions précédentes [41], échangeant m_ρ et $m_{\rho+1}$. Tout cela lui permet de conclure que le groupe Γ_1 est inclus dans le groupe H.

Si n est impair, comme $\Gamma = H$ et Γ_1 contient Γ, alors les groupes Γ_1 et H sont confondus. Pour clore la partie sur les groupes de monodromie, Jordan traite enfin le cas $n = 2$. Il écrit [42] :

> Il est évident que Γ_1 est isomorphe au groupe I d'ordre $\Omega = 1.2.3.4.5.6$, formé par toutes les substitutions possibles entre les modules ; et son ordre sera Ω/O, O étant l'ordre du groupe partiel L formé par celles des substitutions de I qui ont pour correspondante l'unité dans le groupe Γ_1 ; en outre L est permutable aux substitutions de I. [Jordan 1870b, p. 362]

Comme les seuls groupes partiels de I permutables à ses substitutions sont I, le groupe trivial et le groupe alterné, l'ordre de Γ_1 peut être égal à 1, 2 ou Ω. Jordan écarte sans le prouver les deux premiers cas [43] et conclut que Γ_1 est isomorphe sans mériédrie (entre termes actuels : isomorphe tout court) à I. Jordan fait enfin remarquer que Γ_1 se confond avec H car il y est inclus et car leurs ordres sont égaux [44], mais précise toutefois que « cette coïncidence fortuite n'aurait plus lieu pour les fonctions hyperelliptiques à plus de quatre périodes », [Jordan 1870b, p. 362].

Cette remarque achève tout qui a eu trait à la détermination des groupes de monodromie. Résumons tout ce qui y a été fait en ajoutant quelques traductions modernes :

1. Le groupe de monodromie de N par rapport à $\lambda_0(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, $\Delta(\lambda_0(u,v))$ et $\Delta(\lambda_1(u,v))$ est égal au groupe des translations de l'espace $\mathbf{F}_n^4$.

---

40. On peut vérifier que pour $\rho = 0$, toutes les périodes restent inchangées, donc la substitution correspondante est triviale. Pour $\rho = 1$, on trouve que $P_1' = P_1 - P_2$, les autres périodes restant inchangées. La substitution correspondante est

$$|p_1, q_1, p_2, q_2 \qquad p_1 - q_1, q_1, p_2, q_2|,$$

qui appartient effectivement au groupe H.

41. En effet, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_6$ est engendré par les transpositions $(i\, i+1)$.

42. La traduction en terminologie actuelle de cette phrase est : « Il est évident qu'il existe un morphisme surjectif φ de I sur Γ_1, où $I = \mathfrak{S}_6$; et son ordre est Ω/O, où O est l'ordre du noyau de φ ; en outre ce noyau est distingué dans I ». Pour la définition d'« isomorphisme » au sens de Jordan, voir [Jordan 1870b, p. 56].

43. Il n'est pas difficile de prouver cela. En effet, $\Gamma_1 \neq \{1\}$ car il contient la substitution non triviale σ correspondant à l'échange entre m_1 et m_2 n'est pas triviale (cf. note 35). De plus, on peut voir que $\Gamma_1 \neq \{1, \sigma\}$ en vérifiant que la substitution correspondante à la transposition (m_2m_3) n'est ni triviale, ni égale à σ.

44. Pour l'ordre de H, voir le paragraphe C.1.6. On a $\operatorname{Card} H = (2^4-1)2^3(2^2-1)2 = 6! = \operatorname{Card}\Gamma_1$.

2. Le groupe de monodromie Γ de Z par rapport à $m_0, \ldots, m_5$ est égal au groupe symplectique $H = \mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_n)$ si n est impair ; il est trivial si $n = 2$.

3. Le groupe de monodromie Γ_1 de Z par rapport à $a, \ldots, f$ est égal au groupe symplectique $H = \mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_n)$ quelle que soit la valeur de n. Dans le cas $n = 2$, on a un isomorphisme exceptionnel $\mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_6$.

C.2.4 Groupe algébrique

Jordan passe ensuite à la recherche du groupe algébrique de l'équation N en s'aidant des résultats précédents.

D'abord, le groupe algébrique de l'équation N obtenu en adjoignant les quatre quantités $\lambda_0(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$, $\Delta(\lambda_0(u, v))$ et $\Delta(\lambda_1(u, v))$ contient le groupe de monodromie par rapport à ces quantités, et les substitutions de ce dernier lui sont permutables [45]. Jordan indique, en renvoyant au n$^{\text{o}}$ 119 du *Traité*, que cela implique que ce groupe algébrique est obtenu en combinant les substitutions du groupe de monodromie avec celles du groupe linéaire G. En termes modernes, le groupe algébrique est donc le groupe affine $\mathrm{GA}_4(\mathbf{F}_n)$. L'idée du n$^{\text{o}}$ 119 est la suivante. Soit S une substitution permutable au groupe des translations (qui est ici le groupe de monodromie). On exprime que pour toute translation T, il existe une translation T' telle que $ST = T'S$. En choisissant par exemple T qui translate seulement la première variable p_1 de 1, on aura une égalité de la forme $S(p_1+1) = S(p_1)+r$, d'où l'on déduit que $S(p_1)$ est de la forme $S(p_1) = a_1 p_1 + r'$, etc.

Jordan affirme [46] ensuite que l'adjonction de la racine (0000) réduit le groupe algébrique au groupe linéaire G. Or, le groupe de monodromie Γ_1 est un sous-groupe distingué de G, et Jordan montre que cela implique que G est inclus dans le groupe abélien. Donnons sans les détailler les étapes de cette preuve : soit T une substitution de G. Alors :

1. Il existe une substitution U de H telle que $T_1 = TU^{-1}$ soit permutable à H et fixe p_1.

2. Il existe une substitution U_1 dans H et une substitution abélienne V telles que $T_2 = T_1 U_1^{-1} V^{-1}$ soit permutable à H et fixe p_1, p_2.

45. Rappelons que le groupe de monodromie par rapport à un paramètre k d'une équation est un sous-groupe distingué du groupe algébrique de l'équation obtenu en adjoignant k.

46. Jordan n'en donne aucune preuve, et ne fait aucun commentaire à ce propos. La démonstration semble ne pas être évidente : une étape semblable est faite par Jordan dans le cas des fonctions circulaires et dans celui des fonctions elliptiques, et il y donne les démonstrations. Par exemple, pour les fonctions elliptiques (cf. [Jordan 1870b, p. 341-343]), Jordan s'appuie sur leur formule d'addition :

$$\lambda(z+t) = \frac{\lambda(z)\lambda'(t) + \lambda'(z)\lambda(t)}{1 - k^2\lambda^2(z)\lambda^2(t)},$$

et mène des calculs assez ardus pour montrer que la partie affine des substitutions considérées est nulle. Pour les fonctions circulaires, Jordan s'appuie également sur une formule d'addition. On peut donc penser que c'est également le cas pour les fonctions hyperelliptiques. Je n'ai toutefois pas réussi à prouver ce que Jordan annonce ici.

3. Il existe une substitution U_2 de H telle que $T_3 = T_2U_2^{-1}$ soit abélienne.

4. Finalement, $T = T_3U_2VU_1U$ est abélienne[47].

Pour récapituler, Jordan a montré que le groupe algébrique de N obtenu en adjoignant les quantités $\lambda_0(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$, $\Delta(\lambda_0(u, v))$, $\Delta(\lambda_1(u, v))$ et (0000) est inclus dans le groupe abélien de taille 4 (modulo n).

Ensuite, Jordan adjoint en plus à l'équation de la division les quantités $\lambda_r\left(P_\rho/n, Q_\rho/n\right)$ et $\Delta\left[\lambda_r\left(P_\rho/n, Q_\rho/n\right)\right]$, pour tous $0 \leqslant r \leqslant 1$ et $0 \leqslant \rho \leqslant 3$. Comme précédemment, le groupe algébrique ainsi obtenu est inclus dans le groupe des translations, mais Jordan montre qu'il y a à présent égalité. Pour cela, il considère une fonction φ des racines de N ; elle s'écrit

$$\varphi = \psi\left[\lambda_0\left(\frac{u}{n}, \frac{v}{n}\right), \lambda_1\left(\frac{u}{n}, \frac{v}{n}\right)\right],$$

où ψ est une fonction rationnelle et symétrique, à coefficients rationnels en les quantités adjointes. Jordan note $\psi_{\delta_1,\varepsilon_1,\delta_2,\varepsilon_2}$ la fonction obtenue à partir de ψ en y remplaçant u et v par $u + \delta_1P_1 + \varepsilon_1P_2 + \delta_2P_3 + \varepsilon_2P_4$ et $v + \delta_1Q_1 + \varepsilon_1Q_2 + \delta_2Q_3 + \varepsilon_2Q_4$. Ainsi, si φ est supposée invariable par toutes les substitutions du groupe algébrique considéré ici, alors $\varphi = \psi_{\delta_1,\varepsilon_1,\delta_2,\varepsilon_2}$ pour tous les entiers $\delta_1, \ldots, \varepsilon_2$. Donc

$$\varphi = \frac{1}{n^4} \sum_{\substack{\delta_1,\ldots,\varepsilon_2 \\ \text{mod } n}} \psi_{\delta_1,\varepsilon_1,\delta_2,\varepsilon_2}$$

est une fonction symétrique des racines de l'équation de degré n^4 dont ψ est solution ; par conséquent, φ est rationnelle. Cela prouve que le groupe de N obtenu par adjonction de la racine (0000), des quantités $\lambda_r(u, v)$, $\lambda_r\left(P_\rho/n, Q_\rho/n\right)$ et leurs radicaux, est égal au groupe des translations de $\mathbf{F}_n^4$.

Pour finir, Jordan considère le cas où $u = v = 0$, qui correspond, comme on l'a vu précédemment, à l'équation de la division des périodes. L'équation N a alors une de ses racines égale à $f(0, 0)$, qui est rationnelle. Il reste alors une équation de degré $n^4 - 1$, et puisque les quantités précédemment adjointes sont maintenant nulles, cette équation est telle que

1. son groupe de monodromie par rapport aux modules $m_0, \ldots, m_5$ est Γ,

2. son groupe de monodromie par rapport aux coefficients $a, \ldots, f$ est Γ_1,

3. son groupe algébrique est contenu dans le groupe abélien.

Dans la section suivante, Jordan s'occupe du cas particulier de la trisection des périodes, c'est-à-dire $u = v = 0$ et $n = 3$. Avant cela, il conclut en faisant remarquer que tout ce qui

47. Remarquer que T n'est pas nécessairement dans le sous-groupe H du groupe abélien.

précède s'applique *mutatis mutandis* aux fonctions hyperelliptiques à $2k$ périodes[48].

C.3 Équation de la trisection des périodes

Nous arrivons à la seconde partie du paragraphe du *Traité* concernant les fonctions hyperelliptiques. Comme je l'ai souligné plus haut, la note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, [Jordan 1869a], contient les mêmes résultats. Les quelques différences dans les preuves seront signalées lorsque ce sera pertinent.

Jordan continue son travail sur l'équation de la division des périodes des fonctions hyperelliptiques en considérant le cas particulier $n = 3$: il s'agit donc de l'étude de l'*équation de la trisection des périodes*. Comme il l'a montré, cette équation, qu'il note à présent[49] E, est de degré 80 et son groupe est contenu dans le groupe abélien $G = \mathrm{Sp}_4(\mathbf{F}_3) \rtimes \mathbf{F}_3^\times$ de cardinal $2\Omega_2$. Dans [Jordan 1869a], Jordan écrit, sans le montrer, que les deux groupes sont égaux ; mais dans le *Traité*, aucune preuve de l'inclusion du groupe abélien dans celui de l'équation n'est donnée. Bien que Jordan ne fasse aucun commentaire à ce sujet, plusieurs détails mathématiques des démonstrations du *Traité* nous montrent que Jordan suppose implicitement que le groupe de l'équation E est effectivement égal au groupe abélien G. Je signalerai ces détails au fur et à mesure de leur apparition dans la suite de cette annexe.

Le paragraphe du *Traité* sur la trisection des périodes aboutit au résultat suivant : l'équation de la trisection se résout à l'aide d'une équation quadratique et d'une équation identique à celle dont dépendent les vingt-sept droites d'une surface cubique. Afin de faciliter la compréhension de la démarche de Jordan, je la présente en la scindant en trois parties. Jordan introduit d'abord une équation auxiliaire $\mathscr{E}$ de degré 45. Il en étudie ensuite le groupe *via* un certain groupe $\mathscr{F}$ de substitutions affines et cela lui permet enfin de construire vingt-sept fonctions des racines de $\mathscr{E}$ ainsi qu'une fonction φ de ces vingt-sept fonctions qui sera identique à la fonction φ définie lors de l'étude de l'équation aux vingt-sept droites.

48. Cela lui permet d'énoncer et de démontrer le théorème suivant : « Un groupe quelconque de degré q est isomorphe sans mériédrie à un groupe de degré $2^{2k} - 1$, à substitutions linéaires abéliennes, k étant le plus grand entier contenu dans $(q-1)/2$ ». Autrement dit, ce théorème énonce que tout sous-groupe de $\mathfrak{S}_q$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{2^{2k}-1}$ agissant par transformations abéliennes, k étant la partie entière de $(q-1)/2$.

49. Elle avait été notée Z précédemment. Attention donc à ne pas confondre avec l'équation de degré $2n^4$ que Jordan avait notée E auparavant.

C.3.1 Une équation auxiliaire

Jordan commence par définir un sous-groupe H du groupe abélien G formé des substitutions abéliennes de la forme [50]

$$|p_1, q_1, p_2, q_2 \qquad a'_1 p_1 + c'_1 q_1, b'_1 p_1 + d'_1 q_1, a''_2 p_2 + c''_2 q_2, b''_2 p_2 + d''_2 q_2|.$$

Il montre que ce groupe H est d'ordre $\omega = (3^2-1)^2(3^2-3)^2/2$ de la manière suivante : une substitution de la forme précédente est abélienne si et seulement si [51]

$$a'_1 d'_1 - b'_1 c'_1 \equiv a''_2 d''_2 - b''_2 c''_2 \not\equiv 0 \mod 3.$$

La condition $a'_1 d'_1 - b'_1 c'_1 \not\equiv 0 \mod 3$ permet de choisir a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 de $(3^2-1)(3^2-3)$ manières différentes [52]. Les coefficients a'_1, b'_1, c'_1, d'_1 étant choisis, il reste $(3^2-1)(3^2-3)/2$ façons de choisir a''_1, b''_1, c''_1, d''_1 puisque l'on doit avoir la congruence $a''_2 d''_2 - b''_2 c''_2 \equiv a'_1 d'_1 - b'_1 c'_1$ modulo 3.

Jordan poursuit en définissant la substitution abélienne

$$I = |p_1, q_1, p_2, q_2 \qquad p_2, q_2, p_1, q_1|$$

puis le groupe H_1 dérivé de H et de I, c'est-à-dire, en d'autres termes, engendré par H et I. Il affirme que H_1 est de cardinal 2ω et que

> Une fonction φ_1 des racines de E, invariable par les substitutions de H_1, dépendra d'une équation $\mathscr{E}$ de degré 45. [Jordan 1870b, p. 366]

Détaillons la preuve de ces points : la compréhension de ces points éclairera la suite du travail de Jordan. Nous adoptons pour ces explications un langage moderne en essayant toutefois dans l'esprit du *Traité*.

Pour voir que $\operatorname{Card} H_1 = 2\omega$, on peut par exemple constater que H_1 est la réunion

50. Matriciellement, il s'agit des substitutions abéliennes représentées par les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a'_1 & c'_1 & 0 & 0 \\ b'_1 & d'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a''_2 & c''_2 \\ 0 & 0 & b''_2 & d''_2 \end{pmatrix}$$

avec $a'_1, \dots, d''_2 \in \mathbf{F}_3$.

51. Voir en effet le paragraphe C.1.6 avec $n = 2$ et $p = 3$.

52. En termes modernes, il s'agit de trouver le cardinal de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$. Pour cela, on peut par exemple dire qu'une matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbf{F}_3$ est inversible si et seulement si ses deux colonnes forment une famille libre. Cela revient à choisir une première colonne non nulle (3^2-1 choix) puis une seconde colonne non proportionnelle à la première (3^2-3 choix). Ainsi, $\operatorname{Card}\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3) = (3^2-1)(3^2-3)$.

disjointe de H et de $I.H$. En effet, on a

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix},\ M, N \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3) \quad \text{et} \quad \det M = \det N \right\}.$$

On vérifie immédiatement que

$$I.H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & M \\ N & 0 \end{pmatrix},\ M, N \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3) \quad \text{et} \quad \det M = \det N \right\},$$

puis que $H_1 = H \sqcup I.H$. Comme on a évidemment $\mathrm{Card}(I.H) = \mathrm{Card}\, H = \omega$, on en déduit bien que $\mathrm{Card}\, H_1 = 2\omega$.

Ensuite, notons k le corps engendré par les coefficients de E et K un corps de décomposition de cette équation : le groupe de E est donc $\mathrm{Gal}(K/k)$. Si K^{H_1} désigne le sous-corps de K fixé par tous les éléments de H_1, on sait que l'on a $[K^{H_1} : k] = (\mathrm{Gal}(K/k) : H_1)$. Si de plus $G = \mathrm{Gal}(K/k)$, alors [53]

$$[K^{H_1} : k] = (G : H_1) = \frac{2\Omega_2}{2\omega} = \frac{2(3^4-1)3^3(3^2-1)3}{(3^2-1)^2(3^2-3)^2} = 45.$$

Une fonction φ_1 des racines de E invariable par les substitutions de H_1 — il faut d'ailleurs supposer φ_1 variable par toute autre substitution — est un élément primitif de K^{H_1} ; elle dépend d'une équation $\mathscr{E}$ de degré $[K^{H_1} : k] = 45$. Cette équation $\mathscr{E}$ est donc une réduite de l'équation de trisection, et la théorie de Galois actuelle nous apprend que son groupe $\mathrm{Gal}(K^{H_1}/k)$ est isomorphe à G/H_1.

C.3.2 Décompositions de $\mathscr{F}$

Jordan introduit ensuite les substitutions

$$A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta = |p_1, q_1, p_2, q_2 \qquad p_1+\alpha, q_1+\beta, p_2+\gamma, q_2+\delta|$$

et note $\mathscr{F}$ le groupe qu'elles forment [54]. Il suppose que A, B, C et D ont leurs exposants d'échange [55] mutuels congrus à 0, sauf $(AB) \equiv -(BA) \equiv (CD) \equiv -(DC) \equiv 1$. Il énonce

53. On voit donc ici que Jordan suppose que le groupe de l'équation E est effectivement égal au groupe abélien G.

54. Le groupe $\mathscr{F}$ est donc un sous-groupe du groupe affine $\mathrm{GA}_4(\mathbf{F}_3)$ de cardinal 3^4. Plus précisément, $\mathscr{F}$ est le sous-groupe de $\mathrm{GA}_4(\mathbf{F}_3)$ formé des translations.

55. Jordan définit les « exposants d'échange » lors de sa seconde définition du groupe abélien, [Jordan 1870b, p. 180]. Étant données des variables $z_1, \dots, z_n$, il note A_μ la substitution induisant l'identité sur chaque z_ν, sauf sur z_μ, qui est envoyée sur $z_\mu + 1$ modulo un nombre premier p. Il écrit alors :

> Les substitutions $A_\mu A_\nu$ et $A_\nu A_\mu$ sont évidemment identiques, quels que soient μ et ν ; mais, afin de conserver la trace de l'inversion nécessaire pour passer de l'une de ces formes à la suivante, on posera, au lieu de l'égalité $A_\mu A_\nu = A_\nu A_\mu$, la suivante

ensuite la propriété suivante :

> À chaque racine de l'équation $\mathscr{E}$ correspondra une décomposition du groupe $\mathscr{F}$ en deux groupes partiels d'ordre 3^2, tels, que leur combinaison reproduise $\mathscr{F}$, et que les substitutions de l'un d'entre eux aient leurs exposants d'échange avec les substitutions de l'autre tous congrus à zéro. [Jordan 1870b, p. 366]

En d'autres termes, une décomposition de $\mathscr{F}$ est la donnée de deux de ses sous-groupes ayant pour ordre 3^2, disons P et P', tels que le groupe qu'ils engendrent est $\mathscr{F}$ et tels que pour tous S, T respectivement dans P et P', on ait $(ST) \equiv 0$ [56].

Pour démontrer la propriété qui vient d'être citée, Jordan donne une première décomposition de $\mathscr{F}$ en posant $P_1 = (A, B)$ et $P_1' = (C, D)$ — ces notations sont celles de Jordan : elles désignent les sous-groupes engendrés par A et B d'une part, par C et D d'autre part. Il affirme alors que le groupe H_1 est l'ensemble des substitutions abéliennes qui sont permutables à P_1 et P_1' ou qui les transforment l'un dans l'autre [57]. Ensuite, si s

$$A_\mu A_\nu = 1^{(A_\mu A_\nu)} A_\nu A_\mu.$$

Jordan précise que le nombre $(A_\mu A_\nu)$ ainsi introduit est un entier arbitraire (modulo p), qu'il appelle *exposant d'échange* de A_μ et A_ν. Une règle implicite est que, si par certaines manipulations on obtient une égalité du type $A_\mu A_\nu = 1^\alpha A_\nu A_\mu$, alors $\alpha \equiv (A_\mu A_\nu) \mod p$. En découlent par exemple les propriétés suivantes :

$$(A_\mu A_\nu) + (A_\nu A_\mu) \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad (A_\mu A_\mu) \equiv 0.$$

Enfin, pour deux substitutions $S = \prod_\mu A_\mu^{m_\mu}$ et $T = \prod_\nu A_\nu^{n_\nu}$, Jordan indique que l'exposant d'échange entre S et T est

$$(ST) = \sum_{\mu,\nu} m_\mu n_\nu (A_\mu A_\nu).$$

À noter que Jordan ne définit pas explicitement (ST), mais il est clair qu'il s'agit d'un entier tel que $ST = 1^{(ST)} TS$.

56. Dans [Jordan 1869a], Jordan n'utilise à aucun moment la notion d'exposant d'échange. À la place, il considère les décompositions de $\mathscr{F}$ en deux sous-groupes P et P' d'ordre 3^2 qui engendrent $\mathscr{F}$ et tels que pour toutes substitutions $A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta \in P$ et $A^{\alpha'} B^{\beta'} C^{\gamma'} D^{\delta'} \in P'$, on ait

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma\delta' - \gamma'\delta \equiv 0 \mod 3.$$

Cette condition est en fait équivalente à celle sur les exposants d'échange. En effet, notons $S = A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta$ et $T = A^{\alpha'} B^{\beta'} C^{\gamma'} D^{\delta'}$. Alors l'exposant d'échange entre S et T est (cf. 55)

$$(ST) \equiv \alpha\beta'(AB) + \beta\alpha'(BA) + \gamma\delta'(CD) + \delta\gamma'(DC) \mod 3,$$

compte tenu de la nullité de (AC), (AD), (BC) et (BD) imposée par la définition de $\mathscr{F}$. Les conditions sur (AB) et (CD) donnent alors

$$(ST) \equiv \alpha\beta' - \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma' \mod 3.$$

Ainsi, la nullité de (ST) équivaut à celle de $\alpha\beta' - \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma'$.

57. Rappelons que pour Jordan, le *transformé* d'un groupe P par une substitution S est ce que nous appelons maintenant le groupe conjugué SPS^{-1} ; une substitution S est dite *permutable* à P si $SPS^{-1} = P$.

Jordan se contente de qualifier la propriété qu'il donne de « claire ». Pour le vérifier, il est commode d'utiliser un formalisme moderne : pour une application affine ψ, on note $\mathrm{Lin}(\psi)$ sa partie linéaire et $\mathrm{aff}(\psi)$ sa partie affine. Si $S \in H_1$, alors ou bien $S \in H$, ou bien $S \in IH$ (voir la fin du paragraphe C.3.1). Supposons par exemple que $S \in H$ et montrons que $SP_1S^{-1} = P_1$. La substitution SAS^{-1} est affine, et on a

$$\begin{cases} \mathrm{Lin}(SAS^{-1}) = S \circ \mathrm{Lin}(A) \circ S^{-1} = S \circ \mathrm{id} \circ S^{-1} = \mathrm{id} \\ \mathrm{aff}(SAS^{-1}) = S(\mathrm{aff}(A)) = S(1,0,0,0). \end{cases}$$

est une substitution abélienne, Jordan note A_s, B_s, C_s, D_s les transformées de A, B, C, D par s ; les transformés $P_s = (A_s, B_s)$ et $P'_s = (C_s, D_s)$ de P_1 et P'_1 par s forment alors une décomposition de $\mathscr{F}$. Jordan désigne enfin par φ_s la fonction obtenue en faisant opérer s sur φ_1 ; cette fonction φ_s est une solution de l'équation $\mathscr{E}$ et Jordan écrit :

> On a donc obtenu une décomposition de $\mathscr{F}$ en deux groupes partiels P_s, P'_s, correspondante à la racine φ_s. [Jordan 1870b, p. 366]

L'étape suivante est de montrer qu'à chaque racine de $\mathscr{E}$ correspond une unique décomposition de $\mathscr{F}$, et réciproquement. Jordan procède comme suit.

Si s et t sont deux substitutions abéliennes telles que $\varphi_s = \varphi_t$, alors, puisque $\varphi_{s^{-1}t} = \varphi_1$, la substitution $h_1 = t^{-1}s$ appartient [58] à H_1. Par conséquent, h_1 est permutable à P_1 et P'_1 ou les transforme l'un en l'autre (cf. *supra*) ; et comme s transforme P_1, P'_1 en P_s, P'_s, la substitution $t = sh_1^{-1}$ les transforme en P_s, P'_s ou en P'_s, P_s. Autrement dit, les substitutions s et t donnent la même décomposition de $\mathscr{F}$. Réciproquement, si s et t donnent la même décomposition de $\mathscr{F}$, alors $t^{-1}s$ transforme la décomposition P_1, P'_1 en elle-même, donc $t^{-1}s$ est dans H_1, et finalement $\varphi_s = \varphi_t$.

Résumons en termes modernes ce qui a été montré jusqu'à présent. Les racines de $\mathscr{E}$ sont de la forme φ_s, où s est une substitution abélienne — il y a plus précisément une racine φ_s par représentant des classes de G/H_1. On peut en outre définir une application

$$\begin{array}{ccc} \{\text{racines de } \mathscr{E}\} & \longrightarrow & \{\text{décompositions de } \mathscr{F}\} \\ \varphi_s & \longmapsto & \{P_s, P'_s\} \end{array}$$

et cette application est injective.

Il existe donc au moins autant de décompositions de $\mathscr{F}$ que de racines de $\mathscr{E}$, à savoir 45. Jordan montre qu'il est impossible qu'il y en ait plus en raisonnant par l'absurde.

Mais comme $S \in H$, elle est de la forme $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$, et donc $S(1,0,0,0)$ est de la forme $(\alpha,\beta,0,0)$. Cela montre que $SAS^{-1} = A^\alpha B^\beta$, et donc que $SAS^{-1} \in P_1$. La preuve que $SBS^{-1} \in P_1$ est strictement analogue ; comme $P_1 = (A,B)$, on a bien $SP_1S^{-1} = P_1$. De la même façon, on voit que $SP'_1S^{-1} = P'_1$. Le cas où $S \in IH$ se traite de façon similaire. On a dans ce cas $SP_1S^{-1} = P'_1$ et $SP'_1S^{-1} = P_1$.

Réciproquement, si S est une substitution abélienne telle que l'on ait par exemple $SP_1S^{-1} = P_1$ et $SP'_1S^{-1} = P'_1$, il est aisé, toujours en utilisant parties linéaire et affine, que le fait qu'une substitution $SA^\alpha B^\beta S^{-1}$ est de la forme $A^{\alpha'}B^{\beta'}$ implique que S est elle-même de la forme $\begin{pmatrix} M & 0 \\ M' & N \end{pmatrix}$, puis que le fait qu'une substitution $SC^\gamma D^\delta S^{-1}$ est de la forme $C^{\gamma'}D^{\delta'}$ implique que S est de la forme $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$, donc qu'elle appartient à H. Enfin, si S transforme P_1 et P'_1 l'un dans l'autre, alors S est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & N \\ M & 0 \end{pmatrix}$, donc appartient à IH (toujours avec les mêmes arguments).

58. En effet, h_1 transforme φ_1 en $\varphi_{h_1s^{-1}t} = \varphi_1$. Remarquer que les notations que j'utilise ici diffèrent de celles *Traité*, où il est écrit $\varphi_{ts^{-1}}$. Mais rappelons que pour Jordan, la composée de deux substitutions A et B notée AB correspond à la composée notée aujourd'hui $B \circ A$.

En fait, son raisonnement peut être lu tel quel comme une preuve directe de la surjectivité de l'application que nous venons de définir. Le voici : soit P, P' une décomposition quelconque de $\mathscr{F}$. Pour $\mathscr{A} \neq 1$ dans P, il existe une substitution S de P telle que l'exposant d'échange $(\mathscr{A} S)$ soit non nul, sinon les exposants d'échange de $\mathscr{A}$ avec toutes les substitutions de $\mathscr{A}$ seraient nuls ; mais cela est impossible car si $\mathscr{A} = A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta$ avec par exemple $\alpha \neq 0$, alors $(\mathscr{A} B) \equiv \alpha \not\equiv 0$. Jordan considère alors $e = (\mathscr{A} S)$ et définit la substitution[59] $\mathscr{B} = S^{e^{-1}}$. Alors $(\mathscr{A}\mathscr{B}) = 1$ et P, étant d'ordre 3^2, est dérivé de $\mathscr{A}$ et de $\mathscr{B}$: en effet, le groupe engendré par $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ est $\{\mathscr{A}^k\mathscr{B}^l \mid 0 \leqslant k, l \leqslant 2\}$. Il est d'ordre 3^2 et est inclus dans P, donc lui est égal. Jordan indique que de même, P' est dérivé de deux substitutions $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ telles que $(\mathscr{C}\mathscr{D}) = 1$, puis conclut : « la substitution linéaire qui transforme A, B, C, D en $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ est évidemment abélienne[60] », [Jordan 1870b, p. 367].

Finalement, l'application

$$\begin{array}{ccc} \{\text{racines de } \mathscr{E}\} & \longrightarrow & \{\text{décompositions de } \mathscr{F}\} \\ \varphi_s & \longmapsto & \{P_s, P'_s\} \end{array}$$

est bijective, et en particulier, il y a exactement 45 décompositions de $\mathscr{F}$. En outre, l'action de G/H_1 sur les racines de $\mathscr{E}$ et sur les décompositions de $\mathscr{F}$ est compatible à cette bijection. Jordan va dans la suite utiliser ce fait pour comprendre l'équation $\mathscr{E}$.

---

59. Comprendre que l'exposant de S dans cette définition de $\mathscr{B}$ est l'inverse de e modulo 3.

60. Reprenons le langage moderne de parties linéaire et affine pour vérifier ce point. Comme les substitutions $A, B, C, D, \mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ sont toutes des translations, on a, pour toute substitution linéaire S, la caractérisation suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} SAS^{-1}{=}\mathscr{A} \\ SBS^{-1}{=}\mathscr{B} \\ SCS^{-1}{=}\mathscr{C} \\ SDS^{-1}{=}\mathscr{D} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} S(\mathrm{aff}(A)){=}\mathrm{aff}(\mathscr{A}) \\ S(\mathrm{aff}(B)){=}\mathrm{aff}(\mathscr{B}) \\ S(\mathrm{aff}(C)){=}\mathrm{aff}(\mathscr{C}) \\ S(\mathrm{aff}(D)){=}\mathrm{aff}(\mathscr{D}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} S(1,0,0,0){=}\mathrm{aff}(\mathscr{A}) \\ S(0,1,0,0){=}\mathrm{aff}(\mathscr{B}) \\ S(0,0,1,0){=}\mathrm{aff}(\mathscr{C}) \\ S(0,0,0,1){=}\mathrm{aff}(\mathscr{D}) \end{array}\right.$$

Ce dernier système permet donc de définir une substitution linéaire (par ailleurs unique) comme voulu. Il reste alors à voir que S est abélienne. Notons

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \\ \delta & \delta' & \delta'' & \delta''' \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de S sont $\mathrm{aff}(\mathscr{A}), \ldots, \mathrm{aff}(\mathscr{D})$; autrement dit $\mathscr{A} = A^\alpha B^\beta C^\gamma D^\delta$, $\mathscr{B} = A^{\alpha'} B^{\beta'} C^{\gamma'} D^{\delta'}$, etc. Les conditions abéliennes à vérifier sont du type

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma\delta' - \gamma'\delta \equiv \alpha''\beta''' - \alpha'''\beta'' + \gamma''\delta''' - \gamma'''\delta''$$

(voir le paragraphe C.1.6). Or cette égalité provient de l'égalité $(\mathscr{A}\mathscr{B}) \equiv (\mathscr{C}\mathscr{D})$ ($\equiv 1$; voir la note 55). Les autres conditions abéliennes proviennent de $(\mathscr{B}\mathscr{C}) = 0$, $(\mathscr{A}\mathscr{C}) = 0$, etc., qui proviennent elles-même du fait que P, P' est une décomposition de $\mathscr{F}$.

C.3.3 Vers les vingt-sept droites

Jordan donne la liste des quarante-cinq décompositions de $\mathscr{F}$, qu'il présente dans un tableau (reproduit ci-dessous), où les deux groupes partiels d'une décomposition sont séparés par des points-virgules tandis que les deux substitutions dont chaque groupe partiel est dérivé sont séparées par des virgules :

A, B	$; C, D$	A, BD^2	$; CA, D$	A, BD	$; CA^2, D$
AD, B	$; CB, D$	AD, BD^2	$; CAB, D$	AD, BD	$; CA^2B, D$
AD^2, B	$; CB, D$	AD, BD^2	$; CAB, D$	AD, BD	$; CA^2B, D$
A, BC	$; C, DA$	A, BC^2	$; C, DA^2$	AC^2, B	$; C, DB$
AC^2, BC	$; C, DAB$	AC^2, BC^2	$; C, DA^2B$	AC, B	$; C, DB^2$
AC, BC	$; C, DAB^2$	AC, BC^2	$; C, DA^2B^2$	A, BCD	$; CD, DA$
A, BC^2D^2	$; CD, DA^2$	AC^2D^2, B	$; CD, DB$	AC^2D^2, BCD	$; CD, DAB$
AC^2D^2, BC^2D^2	$; CD, DA^2B$	ACD, B	$; CD, DB^2$	ACD, BCD	$; CD, DAB^2$
ACD, BC^2D^2	$; CD, DA^2B^2$	A, BCD^2	$; CD^2, DA$	A, BC^2D	$; CD^2, DA^2$
AC^2D, B	$; CD^2, DB$	AC^2D, BCD^2	$; CD^2, DAB$	AC^2, BC^2D	$; CD^2, DA^2B$
ACD^2, B	$; CD^2, DB^2$	ACD^2, BCD^2	$; CD^2, DAB^2$	ACD^2, BC^2D	$; CD^2, DA^2B^2$
AD, BC^2	$; AD^2, BC$	AD, BC^2D	$; AD^2, BCD^2$	AD, BC^2D^2	$; AD^2, BCD$
AC, BD	$; AC^2, BD^2$	AC, BCD	$; AC^2, BC^2D^2$	AC, BC^2D	$; AC^2, BCD^2$
ACD, BD	$; AC^2D^2, BD^2$	ACD, BCD^2	$; AC^2D^2, BC^2D$	ACD, BC^2	$; AC^2D^2, BC$
ACD^2, BD	$; AC^2D, BD^2$	ACD^2, BC	$; AC^2D, BC^2$	ACD^2, BC^2D^2	$; AC^2D, BCD$

Jordan n'explique pas comment il a trouvé ces décompositions. On peut supposer que Jordan a établi cette liste en partant de la définition des décompositions et en créant les groupes partiels à partir de générateurs. Quoi qu'il en soit, Jordan note ensuite $1, 2, \ldots, 45$ les racines de $\mathscr{E}$ de façon correspondante :

$$\begin{array}{ccc} 1, & 2, & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 43, & 44, & 45, \end{array}$$

et regarde ensuite comment le groupe abélien G agit sur les racines en regardant comment il agit sur les décompositions de $\mathscr{F}$. Il prend l'exemple de la substitution

$$L_1 = |p_1, q_1, p_2, q_1 \qquad p_1 + q_1, q_1, p_2, q_2|$$

qui transforme A, B, C, D en A, AB, C et D respectivement [61]. Par conséquent, L_1 est permutable aux deux groupes partiels (A, B) et (C, D) : elle laisse donc la décomposition $(A, B), (C, D)$ inchangée et fixe ainsi la racine 1.

Jordan traite un autre exemple en regardant en quelle racine est transformée la racine 4 par L_1. Cette substitution transforme la décomposition (AD, B), (CB, D) en la décomposition (AD, AB), (CAB, D). Écrite telle quelle, cette dernière n'apparaît pas dans le tableau des quarante-cinq décompositions, mais Jordan indique qu'elle est « évidemment identique » à la décomposition (AD, BD^2), (CAB, D) [62]. Cela montre ainsi que L_1 remplace la racine 4 par la racine 5. Jordan écrit ensuite :

> Continuant ainsi, on peut écrire sans difficulté les déplacements opérés entre les racines $1, 2, \ldots, 45$ par la substitution $|p_1, q_1, p_2, q_2 \quad p_1, 2q_1, p_2, 2q_2|$ et par les autres substitutions L_1, L_2, M_1, M_2, $N_{1,2}$ dont G est dérivé [63]. [Jordan 1870b, p. 368]

Il affirme alors que chacune de ces six substitutions permute entre elles les vingt-sept expressions suivantes :

$$
\begin{array}{lll}
(1, 37, 34, 41, 45), & (1, 39, 36, 40, 44), & (1, 38, 42, 43, 35), \\
(10, 37, 7, 21, 32), & (11, 37, 4, 25, 30), & (15, 34, 3, 24, 33), \\
(2, 34, 12, 29, 22), & (16, 20, 27, 45, 5), & (26, 9, 14, 45, 23), \\
(19, 41, 13, 6, 31), & (17, 41, 18, 28, 8), & (15, 44, 6, 21, 27), \\
(26, 8, 44, 25, 12), & (17, 36, 3, 23, 32), & (2, 36, 13, 30, 20), \\
(7, 40, 16, 29, 18), & (19, 40, 4, 33, 14), & (10, 39, 9, 22, 31), \\
(11, 39, 5, 24, 28), & (2, 35, 28, 21, 14), & (16, 31, 35, 25, 3), \\
(19, 42, 12, 5, 32), & (15, 42, 18, 30, 9), & (7, 43, 26, 24, 13), \\
(17, 43, 4, 22, 27), & (10, 38, 20, 33, 8), & (11, 38, 23, 29, 6),
\end{array}
$$

où chaque symbole $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ désigne une fonction des racines de $\mathscr{E}$ invariable par les substitutions qui permutent exclusivement entre elles les racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, mais variable

61. Pour le voir, il suffit de vérifier que les parties affines correspondantes sont égales, puisque toutes les substitutions en question ont l'identité pour partie linéaire. Ainsi, on voit aisément que la partie affine de $L_1 A L_1^{-1}$ est $L_1(\mathrm{aff}\, A) = L_1(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0) = \mathrm{aff}(A)$ ce qui montre que $L_1 A L_1^{-1} = A$; et que celle de $L_1 B L_1^{-1}$ est $L_1(\mathrm{aff}\, B) = (1, 1, 0, 0) = \mathrm{aff}(AB)$, ce qui montre que $L_1 B L_1^{-1} = AB$, etc.

62. Il n'est en effet pas difficile de le vérifier :

$$
\begin{aligned}
(AD, AB) &= \{A^{k+l} B^l D^k,\ k, l \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}\} \\
&= \{A^r B^l D^{r-l},\ r, l \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}\} \quad \text{en posant } r = k + l \\
&= \{A^r B^l D^{r+2l},\ r, l \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}\} \\
&= (AD, BD^2).
\end{aligned}
$$

63. Voir plus haut la section C.1.6.

par toute autre substitution [64]. Jordan note ensuite a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, p, q, r, s, t, u, m', n', p', q', r', s', t', u' ces vingt-sept fonctions et X l'équation du vingt-septième degré dont elles dépendent.

Remarquant que chacune des racines $1, 2, \ldots, 45$ apparaît dans exactement trois des fonctions $a, b, \ldots, u'$ (par exemple, 1 apparaît dans a, b et c ; 37 apparaît dans a, d et e), Jordan forme les produits trois à trois correspondant et note φ leur somme. Il observe alors que

$$\varphi = abc + ade + \cdots + ls'p$$

est identique à la fonction φ qu'il avait introduite lors de l'étude de l'équation aux vingt-sept droites.

La dernière étape de Jordan est de montrer que le groupe de l'équation X est égal au groupe des substitutions qui laissent φ invariante. Pour cela, il procède en deux temps.

D'abord, Jordan écrit que si S est une substitution quelconque du groupe abélien G, α une des racines $1, \ldots, 45$ et β la racine sur laquelle est envoyée α par S, alors S remplace une des expressions $a, b, \ldots, u'$ qui contient α par une autre qui contient β ; par conséquent, la substitutions S permute entre eux les termes [65] de φ. Jordan poursuit en indiquant que toute fonction de $a, b, \ldots, u'$ invariable par les substitutions fixant φ est nécessairement invariable par les substitutions de G et est donc rationnelle [66]. Cela signifie exactement que le groupe de l'équation X est contenu dans celui de la fonction φ.

Jordan traite ensuite l'inclusion réciproque par un argument de cardinalité : si l'équation X est supposée résolue, le groupe G se réduit aux substitutions qui fixent $a, b, \ldots, u'$. Ces substitutions fixent donc chaque terme $abc, \ldots, ls'p$ de φ et laissent ainsi invariable chaque racine $1, 2, \ldots, 45$, puisque ces dernières sont les racines communes à chaque terme de φ. Ainsi, les substitutions du groupe réduit de G par adjonction de X transforment chaque décomposition de $\mathscr{F}$ en elle-même. Jordan

64. Regardons par exemple où est envoyée la fonction $(1, 37, 34, 41, 45)$ par L_1. Il faut regarder sur quelles racines sont envoyées 1, 37, 34, 41 et 45. On passe à chaque fois par les décompositions de $\mathscr{F}$. On a déjà vu que $L_1(1) = 1$. Ensuite, la racine 37 est associée à la décomposition (AC, BD), (AC^2, BC^2). Cette décomposition est transformée en (AC, ABD), (AC^2, ABD^2) par L_1 (rappelons que cette substitution transforme A, C, D en elles-mêmes et transforme B en AB). La décomposition ainsi trouvée n'apparaît pas telle quelle dans le tableau. On procède comme précédemment :

$$(AC, ABD) = \{A^{k+l}B^lC^kD^l,\ k, l \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}\} = \{A^rB^lC^{r+2l}D^l,\ r, l \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}\} = (AC, BC^2D).$$

De même, on voit que $(AC^2, ABD^2) = (AC^2, BCD^2)$, et donc la racine 37 est envoyée sur la racine 39. De façon analogue, on montre que $L_1(34) = 36$, $L_1(41) = 40$ et $L_1(45) = 44$. Ainsi, la substitution L_1 envoie la fonction $(1, 37, 34, 41, 45)$ sur la fonction $(1, 39, 36, 40, 44)$.

65. Par exemple, le terme abc est envoyé sur le terme $S(a)S(b)S(c)$. Or, abc apparaît parmi les termes de φ car a, b et c ont la racine 1 en commun. Donc $S(a)$, $S(b)$ et $S(c)$ ont la racine $S(1)$ en commun, et par conséquent, le produit $S(a)S(b)S(c)$ apparaît dans φ.

66. En effet, puisque G est contenu dans le groupe de φ, toute fonction des racines de X invariante sous le groupe de φ est invariante sous G : en notations modernes, $k(a, \ldots, u')^{\mathrm{groupe}(\varphi)} \subset k(a, \ldots, u')^G$. Ensuite, le fait que toute fonction de racines de X invariable sous G est rationnelle s'explique de la façon suivante : $k(a, \ldots, u') \subset K^{H_1}$ (cf. paragraphe C.3.1) et $(K^{H_1})^G = K^G = k$ — ici encore, on voit que Jordan suppose implicitement que G est le groupe de l'équation de la trisection des périodes E ; voir la note 53.

> en déduit immédiatement que ces substitutions se réduisent à celles qui multiplient tous les indices par un même facteur constant ± 1. Donc l'ordre de E, qui était égal à $2\Omega_2$, se trouve réduit à 2 après la résolution de X [67]. [Jordan 1870b, p. 369]

Cela lui permet de voir que le groupe de X a pour ordre Ω_2, qui est également [68] l'ordre du groupe de φ. Jordan conclut :

> L'équation X a donc le même groupe que l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre. [Jordan 1870b, p. 369]

Il indique enfin que, l'équation E ayant pour facteurs de composition 2, $\Omega/2, 2$, ceux de X sont 2 et $\Omega_2/2$. Cette remarque clôt le paragraphe du *Traité des substitutions et des équations algébriques* consacré aux fonctions hyperelliptiques.

Jordan a ainsi démontré que le groupe de l'équation de trisection des périodes des fonctions hyperelliptiques se réduit, après adjonction d'une racine carrée, à un groupe identique à celui associé à l'équation aux vingt-sept droites.

67. La première partie de cette citation signifie que la résolution de X réduit le groupe abélien G à $\{\pm \mathrm{id}\}$. Dans la seconde partie, on voit encore une fois que Jordan suppose que le groupe de E est exactement G, qui est bien d'ordre $2\Omega_2$.

68. Jordan ne justifie pas ce dernier point. Mais φ est identique dans son écriture à la fonction de vingt-sept droites, et les relations des racines $a, b, \dots, u'$ entre elles sont mêmes dans les deux cas — dans le cas des vingt-sept droites, les termes de φ correspondaient aux droites formant un triangle ; les triangles correspondent ici aux racines $1, \dots, 45$. Donc le groupe de la fonctions des vingt-sept droites est le même que celui de la fonction φ introduite ici.

Annexe D

Relevé des équations de la géométrie

Dans les pages qui suivent se trouvent toutes les occurrences d'équations de la géométrie relevées dans le corpus décrit au chapitre 3. Le ou les statuts de chaque équation apparai(ssen)t dans la colonne de droite ; un symbole + a été placé lorsque deux équations de la géométrie se trouvent dans une phrase qui n'a pas été scindée en deux ; un symbole / a été placé lorsque deux statuts peuvent être attribués à une même équation.

[Hesse 1847] – *Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen 9ten Grades, deren Wurzeln die Eigenschaft haben, dass eine gegebene rationale und symmetrische Function $\theta(x_\lambda, x_\mu)$ je zweier Wurzeln x_λ, x_μ eine dritte Wurzel x_k giebt, so dass gleichzeitig:* $x_\chi = \theta(x_\lambda, x_\mu)$, $x_\lambda = \theta(x_\mu, x_\chi)$, $x_\mu = \theta(x_\chi, x_\lambda)$.		
p. 195	– [Eine] Gleichung vom 9ten Grade [...], auf welche die Untersuchung der Wendepunkte einer Curve vom dritten Grade führt.	1
p. 202	– Das Problem der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung [...] führt, wenn man eine Variable eliminirt, auf eine Gleichung neunten Grades mit einer Unbekannten, deren Wurzeln dieselbe Eigenschaft haben, welche ich zwischen den Wurzeln der im Vorhergehenden behandelten Gleichung (1) annahm.	1

[Kummer 1863] – *Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen*		
p. 335	– Eine Gleichung fünften Grades für die Constante λ, deren fünf Wurzeln fünf Kegelflächen geben.	4/2
p. 336	– Die Gleichung fünften Grades, welche die fünf Shaaren doppelt berührender Ebenen bestimmt.	2

[Kummer 1864] – *Ueber die Flächen vierten Grades, mit sechzehn singulären Punkten*		
p. 259	– Die Gleichung sechsten Grades, durch welche auf der allgemeinsten Flächen vierten Grades die sechs Tangenten bestimmnt werden. 259	2

[Clebsch 1868] – *Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen*		
p. 145	– Die Gleichung sechzehnten Grades, von welcher die sechzehn Geraden der Oberfläche abhängen.	2
p. 145	– [Die] Gleichung, welche die fünf Paare von Gruppen (IV.) liefern, ist keine andere, als diejenige, mit deren Hülfe Herr *Kummer* die fünf Kegel [...] erhalten hat.	3+5

p. 169	– [Ich werde] die Gleichungen zur Bestimmung der Geraden direct aufstellen und zeigen, dass sie auf eine Gleichung sechzehnten Grades führen.	4
p. 172	– [Die] Gleichung fünften Grades, von welcher die fünf Kegel abhängen.	3
p. 173	– Durch diese quadratische Gleichung werden die beiden Kegelschnittschaaren (7.), (8.) ermittelt.	3
p. 173	– [Die] Gleichungen (11.), welche die 2.4 Geradenpaare der beiden Kegelschnittschaaren liefern.	3
p. 173	– [Die] acht quadratischen Gleichungen, welche die einzelnen Geraden der acht Paare geben.	3
p. 175	– So haben die biquadratischen Gleichungen, welche jene Schnittpunkte darstellen, die Eigenschaft, zu ihrer Lösung nur die Lösung zweier getrennten quadratischen Gleichungen zu erfordern.	2+3

[Jordan 1869a] – *Sur la trisection des fonctions abéliennes et sur les vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre*		
p. 868	– L'équation qui détermine les vingt-sept droites situées sur une surface du troisième ordre.	3/2

[Jordan 1869b] – *Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré*		
p. 147	– L'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré.	1
p. 148	– Une équation du vingt-septième degré, dont chaque racine correspondra à l'une des vingt-sept droites.	1
p. 155	– L'équation aux vingt-sept droites.	1
p. 155	– Prenons, par exemple, pour inconnue de la question le plan du triangle [...] : ces triangles étant au nombre de quarante-cinq, on aura une équation du quarante-cinquième degré.	3
p. 156	– Prenant pour inconnue ce système de trois doubles trièdres, on aura une équation de degré $45\cdot32/(2\cdot3\cdot2\cdot3) = 40$.	3
p. 156	– Les doubles-six dépendent donc d'une équation du degré $27 \cdot 16/(2 \cdot 6) = 36$.	3

p. 156	– L'équation aux vingt-sept droites.	1
p. 156	– L'équation aux vingt-sept droites.	1

[Jordan 1869c] – *Sur les équations de la géométrie*		
p. 658	– L'équation de degré $2^{2n-1} - 2^n$ qui détermine les lignes de degré $n-3$ qui touchent en $n(n-3)/2$ points une courbe donnée de degré n.	1
p. 658	– L'équation aux vingt-sept droites.	1
p. 659	– L'équation aux vingt-huit doubles tangentes d'une courbe du quatrième ordre.	1
p. 659	– L'équation aux seize droites des surfaces du quatrième degré à conique double.	1
p. 659	– L'équation aux seize points singuliers.	1

[Jordan 1869d] – *Sur une équation du 16^{ième} degré*		
p. 182	– L'équation du 16$^{\text{ème}}$ degré dont dépendent les plans tangents singuliers.	1

[Jordan 1870a] – *Sur une nouvelle combinaison des vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre*		
p. 326	– L'équation aux 45 triangles.	1
p. 326	– Celle aux 27 droites des surfaces du troisième ordre.	1
p. 326	– Rechercher [...] la combinaison des 27 droites (ou des 45 triangles) qui, prise pour inconnue, dépendra d'une équation analogue à celle qui donne la division d'une fonction abélienne.	1/3

p. 327	– L'ennéaèdre étant supposé connu, les neuf triangles dans lesquels il se décompose ne dépendront plus que d'une équation hessienne.	2
p. 328	– La réduite du quarantième degré qui a pour racines nos ennéaèdres.	1
p. 328	– L'équation du même degré qui a pour racines les termes de doubles trièdres de Steiner.	2

[Jordan 1870b] – *Traité des substitutions et des équations algébriques*		
p. 302	– L'équation X dont [les neuf points d'inflexion] dépendent.	1
p. 305	– Le problème de déterminer une courbe du troisième ordre dont les points d'intersection avec une courbe donnée C du quatrième ordre coïncident quatre à quatre conduit à une équation X du degré 4^6.	1
p. 308	– L'équation du degré 3^{20} qui détermine les courbes du cinquième ordre dont les points 308 d'intersection avec une courbe donnée du sixième ordre coïncident trois à trois.	5
p. 308	– Celle du degré 4^2 dont dépendent les plans qui coupent une courbe gauche du quatrième ordre en quatre points consécutifs.	5
p. 308	– Celle du degré 3^8 qui détermine les courbes gauches du quatrième ordre qui coupe une courbe gauche du sixième ordre en douze points coïncidant trois à trois.	5
p. 309	– L'équation du cinquième degré qui donne les cônes.	3
p. 309	– Les cinq équations quadratiques qui servent à séparer les faisceaux de coniques.	3
p. 310	– L'équation aux seize droites.	1
p. 314	– L'équation du seizième degré dont dépendent les seize plans singuliers.	1
p. 317	– L'équation aux vingt-sept droites.	1

p. 319	– Prenons, par exemple, pour inconnue de la question le plan du triangle [...] : ces triangles étant au nombre de quarante-cinq, on aura une équation du quarante-cinquième degré.	3
p. 319	– Prenant pour inconnue ce système de trois doubles trièdres, on aura une équation de degré $45\cdot 32/(2\cdot 3\cdot 2\cdot 3) = 40$.	3
p. 319	– Les doubles-six dépendent donc d'une équation du degré $27 \cdot 16/(2 \cdot 6) = 36$.	3
p. 329	– La détermination des courbes de l'ordre $n-3$ qui touchent en $n(n-3)/2$ points une courbe donnée C d'ordre n dépend d'une équation de degré $2^{2p-1} - 2^{p-1}$, en posant pour abréger $(n-1)(n-2)/2 = p$.	1
p. 330	– L'équation aux vingt-huit tangentes doubles des courbes du quatrième ordre.	1
p. 330	– L'équation aux vingt-sept tangentes doubles.	3
p. 330	– L'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre.	3
p. 330	– L'équation aux doubles tangentes.	1
p. 331	– Les courbes cherchées de degré $n-3$ dépendent d'une équation X de degré 2^m.	1
p. 331	– L'équation qui donne les courbes cherchées.	1
p. 369	– L'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre.	3

[Klein 1870] – *Zur Theorie der Linienkomplexe des ersten und zweiten Grades*		
p. 210	– Die Gleichung 32^{ten} Grades, durch welche ein derartiges System von geraden Linien, wie das hier betrachtete, bestimmt wird.	2
p. 213	– Die Gleichung 16^{ten} Grades, welche die Ebenen des Systems bestimmt.	2
p. 215	– Zur Bestimmung der Tangentialebenen, welche sich an eine gegebene Kummer'sche Fläche durch eine gerade Linie [...] legen lassen, dient eine Gleichung des vierten Grades.	4
p. 215	– Es sind also die vier Tangentialebenen, welche durch eine beliebige der 32 geraden Linien [...] hindurchgehen, alle durch dieselbe biquadratische Gleichung bestimmt.	4
p. 215	– Nachdem die einer Kummer'sche Fläche zugehörigen Fundamentalcomplexe durch eine Gleichung des sechsten Grades bestimmnt worden sind.	2
p. 216	– Die Bestimmung der Singularitäten eine Kummer'schen Fläche hängt von der Auflösung einer sechsten Grades und mehrerer quadratischer Gleichungen ab.	2

[Clebsch 1871b] – *Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5^{ten} Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits*		
p. 284	– Ihre 27 Geraden werden mit Hilfe einer Gleichung 5^{ten} Grades gefunden.	3
p. 297	– Die [Gleichung $i = 0$] zerfällt nach dem Obigen in 2 Kegelschnitte, eine Zerlegung, welche mit Hülfe einer quadratischen Gleichung ausgeführt wird.	4
p. 297	– Dagegen zerfällt $j = 0$ mit Hülfe einer cubische Gleichung in 3 Kegelschnitte.	4
p. 297	– 4 harmonischen Punkten, zu deren Trennung dann nur noch quadratische Gleichungen erforderlich sind.	4
p. 303	– Die gemeinschaftlichen Tangenten [...] werden durch algebraisch lösbare Gleichungen gefunden.	2

p. 327	– Trennt man [diese zwei Punkten] mit Hilfe einer quadratischen Gleichung, so giebt [...] 3 Punkte der Curve, welche mittelst einer cubischen Gleichung getrennt werden können.	4+4
p. 327	– Da die 12 Doppelwendetangenten durch eine quadratische Gleichung in 2 Systeme von 6 zerlegt werden können.	4
p. 333	– Der Gleichung 27^{ten} Grades, von welcher die 27 Geraden der Fläche abhängen.	2
p. 336	– Die Gleichung 36^{ten} Grades, von welcher im Allgemeinen die Auffindung der Doppelsechsen abhängt.	2/4
p. 336	– Die Trennung der Fundamentalpunkte würde die Lösung einer Gleichung 6^{ten} Grades erfordern.	2/4
p. 341	– Dazu ist eine quadratische une eine cubische Gleichung zu lösen; erstere, um eine Erzeugende der Fläche 2^{ter} Ordnung zu finden; die andere, um die Durchschnitte derselben mit der Diagonalfläche zu bestimmen.	4+4
p. 341	– Die Gleichung 6^{ten} Grades [...], durch welche die 6 Doppeltangenten von $B_1 = 0$ [...] von einander getrennt werden.	4
p. 341	– Die Trennung der beiden Gruppen [von Geraden] selbst erfolgt durch eine quadratische Gleichung.	4
p. 341	– Eine quadratische Gleichung zu lösen, welche die beide Wendepunkte von C auf dieser Tangente trennt.	4
p. 344	– Eine Curve, bei welcher [...] unendlich viele Tripel von Punkten durch Lösung quadratischer Gleichungen gefunden werden können.	4
p. 344	– Da nun die Punkte eines Tripels durch eine cubische Gleichung getrennt werden, so kann man durch Lösung quadratischer und einer cubischen Gleichung unendlich viele Punkte der Ebene finden.	4+4
p. 345	– In der Ebene kann man durch Lösung quadratischer und cubischer Gleichungen beliebig viele Punkte einer Curve $A = 0$ finden.	2/4

[Klein 1871b] – *Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen*		
p. 348	– [Die] durch die n gegebenen Elemente vorgestellten Gleichung n-ten Grades.	1

p. 354	– Die Gleichung der Wendepunkte.	2
p. 354	– [Die] Wendepunktsgleichung.	2
p. 355	– [Die] Gleichung 2^{ten} Grades [sic], welche die Dreiecke bestimmt.	2
p. 355	– [Eine] Gleichung vom 4^{ten} Grade zur Bestimmung der Gruppen von je sechs zusammengehörigen Dreiecken.	3
p. 355	– [Die] Wendepunktsgleichung.	3
p. 356	– [Die] durch die sechs Complexe vorgestellten Gleichung 6^{ten} Grades.	2
p. 357	– Die 15 Directicenpaare sind das Bild einer Resolvente 15^{ten} Grades.	2
p. 357	– Diese 15 Tetraeder stellen eine zweite Resolvente 15^{ten} Grades dar.	3
p. 357	– Diese Gruppen von fünf Tetraedern repräsentieren eine Resolvente des 6^{ten} Grades.	3
p. 357	– Die Hyperboloide bilden eine Resolvente des 10^{ten} Grades.	3
p. 357	– Die Gleichung 16^{ten} Grades, von der die Bestimmung der Singularitäten der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten abhängt.	3
p. 357	– Diejenige [Gleichung], welche die 16 Geraden einer f_4 mit Doppelkegelschnitt bestimmt (oder auch die 16 Geraden einer f_3, die einen festen Kegelschnitt derselben treffen).	5

[Lie 1872] – *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen*		
p. 250	– Beide Flächen geben Anlass zu einer Gleichung sechzehnten Grades, die eine durch ihre Knotenpunkte, die andere durch die auf ihr gelegenen geraden Linien.	5+5

[Noether 1879] – *Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung*		
p. 89	– [Die] Gleichung 36^{ten} Grades [...], welche die 36 Schaaren von Berührungscurven dritter Odnung bestimmt.	3
p. 89	– Die Gleichung für die 28 Doppeltangenten.	1/2
p. 107	– [Die] Gleichung 36^{ten} Grades, welche die den 36 geraden Charakteristiken zugeordneten Systeme, z. B. die 36 Schaaren von Berührungscurven 3^{ter} Ordnung erster Art, bestimmt.	3
p. 107	– Die Gleichung für die Doppeltangenten.	1/2
p. 107	– Diejenige [Gleichung], welche die acht Aronhold'schen 7-Systeme von (0) bestimmt.	1/2
p. 109	– Die 4 Doppeltangenten eines Kegelschnitts von Σ werden [...] durch 2 quadratischen Gleichungen bestimmt.	4
p. 110	– Eine quadratische Gleichung zur Aufsuchung seiner Doppeltangenten.	4

[Netto 1882] – *Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra*		
p. 235	– Die Abscissen oder die Ordinaten der neun Inflexionspunkte sind demnach die Wurzeln einer Gleichung neunten Grades mit Tripelcharackter.	1

[Klein 1888] – *Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique*		
p. 169	– L'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique.	1
p. 169	– L'équation des 27 droites d'une surface cubique.	1
p. 173	– L'équation du vingt-septième degré des droites d'une surface cubique.	1

[Maschke 1889] – *Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternären Gruppe von 51840 linearen Substitutionen*		
p. 319	– [Die] Gleichung 27$^{\text{ten}}$ Grades, von der die 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung abhängen.	5

[Weber 1896] – *Lehrbuch der Algebra*		
p. 342	– Die Gleichung, von der die Wendepunkte abhängen. 351	1

Annexe E

Cinq lettres de Jordan à Klein

Cette annexe consiste en la transcription de cinq lettres écrites par Camille Jordan et adressées à Felix Klein, datées de 1886 et 1887. Ces lettres sont conservées aux archives de la *Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen* sous les références Cod. Ms. F. Klein 10. Je remercie le service des manuscrits de ces archives de m'avoir autorisé à présenter ici ces lettres.

[Cod. Ms. F. Klein 10 : 13]

Paris, le 26 juillet 1886

L'INGÉNIEUR EN CHEF DES MINES
CHARGÉ DU SERVICE DE LA 1^RE SECTION DU CONTRÔLE

Mon cher ami

Votre aimable lettre m'est arrivée pendant que j'étais en voyage et je ne l'ai trouvée qu'à mon retour il y a quelques jours, ce qui explique le retard que j'ai mis à vous répondre.

Je n'ai plus à ma disposition qu'un seul exemplaire de mon traité des substitutions, dont j'ai besoin pour mon usage personnel. Je me suis donc adressé à l'éditeur M. Gauthier Villars. Il me répond à l'instant que bien que le livre soit épuisé, il lui reste quelques exemplaires d'occasion et qu'il vient de vous en envoyer un. J'espère donc que vous allez le recevoir incessamment. Je suis d'autant plus heureux d'avoir pu vous satisfaire que je ne songe guère pour le moment à une seconde édition. Il me faudrait en effet refondre toute la première partie. Ce serait un énorme travail, devant lequel je dois reculer, absorbé comme je le suis par mes fonctions et par la publication de mon cours d'analyse.

Le journal de Liouville que je dirige depuis l'année dernière est en relation d'échange avec la plupart des autres journaux mathématiques. J'ai toutefois remarqué que les *Mathematische Annalen* ne figuraient pas sur cette liste. Je l'y ajouterais avec plaisir, si cet échange vous convenait.

Ce que vous m'écrivez sur les études de M. Witting m'intéresse vivement. Je suis persuadé que le rapprochement que j'ai signalé entre la trisection des fonctions elliptiques et les droites des surfaces cubiques n'est pas dû au hasard et que les deux problèmes doivent être identiques au fond, et j'aimerais fort qu'on me le montrât.

Je regrette bien que M. Study ait été malade à Paris, sans m'en rien dire ; car il ne me l'a fait connaître qu'au moment de son départ, et il était déjà en route lorsque je me suis présenté à son hôtel. Si je l'avais su plus tôt, j'aurais tâché de m'arranger pour qu'il fût moins abandonné, car il est bien triste d'être malade seul dans une ville étrangère.

Votre bien dévoué
C. Jordan

[Cod. Ms. F. Klein 10 : 14]

Mervans 2 7^{bre} 1886

Mon cher ami

Votre aimable lettre du 8 août m'arrive aujourd'hui seulement par suite d'un voyage que j'ai fait dans le Tyrol et le nord de l'Italie pendant tout le mois d'août. Je vous suis bien reconnaissant d'avoir si gracieusement accueilli ma proposition d'échange entre nos journaux et j'écris à M. Gauthier Villars pour le prier d'envoyer à Teubner les fascicules déjà parus du volume en cours de publication du journal de Liouville.

Je suis bien aise d'apprendre que vous avez reçu l'exemplaire de mon traité ; mais ne vous occupez pas du compte ; c'est une bagatelle et j'ai pensé que vous seriez bien aise de pouvoir offrir ce livre en cadeau à votre séminaire.

M. Schönflies m'a adressé une note sur les groupes de mouvements ; mais la lettre d'envoi m'est seule parvenue, la note ayant sans doute été conservée à mon domicile à Paris où elle est arrivée. C'est seulement à mon retour de vacances que je la retrouverai. L'étude des groupes de mouvements peut en effet être envisagée à un point de vue tout algébrique, et j'ai été sur le point de la traiter autrefois par cette voie, qui serait probablement plus courte que celle de la géométrie pure que j'ai adoptée.

Il est sans doute trop tard pour rendre à M. le D^{r} Kneser le service de l'avertir que son théorème sur les séries des sous-groupes maxima n'est pas exact, si toutefois l'énoncé que vous m'en donnez est bien fidèle. On s'en assure aisément sur le groupe des substitutions de 6 lettres, d'ordre $1 \cdot 2 \cdots 6$, où l'on peut prendre comme sous-groupe maximum celui des substitutions qui ne déplacent pas une lettre donnée. Le deuxième facteur de la suite est alors $\dfrac{1 \cdot 2 \cdots 6}{1 \cdot 2 \cdots 5} = 6$. On peut d'autre part diriger les opérations de telle sorte que le dernier sous-groupe considéré soit formé d'une substitution circulaire ternaire (abc) et le précédent de cette substitution jointe à une substitution analogue (def) faite sur les trois autres lettres. On a dans ce cas une série de facteurs dont les deux derniers sont 3 et 3, les autres étant manifestement premiers à 3.

L'erreur de D^r^ Kneser ne doit pas surprendre, s'il a admis comme point de départ le prétendu théorème sur les facteurs d'imprimitivité qui se trouve dans mon traité ; car il est manifestement faux ; je l'ai reconnu et rectifié depuis longtemps (dans le journal de M. Battaglini, si je m'en souviens bien).

Votre tout dévoué
C. Jordan

[Cod. Ms. F. Klein 10 : 15]

29 juin 87

Mon cher ami

Je vous suis bien reconnaissant de la bonne pensée que vous avez de m'envoyer pour mon Journal votre si intéressant Mémoire sur les 27 droites, et je serai très-heureux de lui donner l'hospitalité. Je me serais empressé de vous remercier plus tôt si je n'avais pas été en voyage lorsque votre lettre est arrivée à Paris où je ne l'ai trouvée qu'à mon retour.

Je viens d'entretenir M. Gauthier Villars de votre réclamation au sujet de l'envoi du Journal, dont les 2^e^ et 3^e^ cahiers (T. III) sont récemment parus. Il m'a promis de vous les faire parvenir promptement si toutefois la chose n'était déjà faite. Il vous enverra également le T. I comme vous le désirez ; mais il est inutile que vous m'adressiez en échange votre T. 27, que je possède déjà à titre d'ancien abonné, et qui pourra vous permettre de faire un heureux.

Votre bien dévoué
C. Jordan

[Cod. Ms. F. Klein 10 : 16]

28 août 87

Mon cher ami

Merci de l'envoi de votre lettre sur les 27 droites. Elle est non seulement très intéressante, mais admirablement claire, et quoi que vous en disiez, en très-bon style. À peine si j'ai eu à y faire ça et là quelques retouches tout à fait insignifiantes avant de l'adresser à Gauthier Villars.

L'impression du Journal est assez en avance en ce moment, par suite de l'abondance de matières, et des loisirs que les vacances donnent à l'imprimerie. On termine la composition du 1er cahier de 1888, et je crains qu'on ne puisse plus y trouver place pour votre lettre, auquel cas elle commencerait le second cahier. J'espère que vous m'excuserez de ce petit retard. Suivant votre désir, d'ailleurs conforme à l'usage du journal, on vous enverra les épreuves à corriger, et un tirage à part de 100 exemplaires.

Votre bien dévoué
C. Jordan

[Cod. Ms. F. Klein 10 : 17]

Mervans 9 7^{bre} 87

Mon cher ami

Je ne suis donc pas le seul à commettre de temps en temps quelques inadvertances et je prends d'autant plus gaiment mon parti de la vôtre qu'elle est aisée à réparer. J'écris à Gauthier Villars de vous renvoyer votre lettre pour la modifier. Vous me feriez d'ailleurs plaisir en me transmettant bientôt votre nouvelle rédaction, le second numéro du Journal pour 1888, où elle doit paraître, étant actuellement en cours d'impression.

Quant au cahier que vous avez en double, le plus simple me paraît être de les renvoyer à Gauthier Villars.

Votre bien dévoué
C. Jordan

Bibliographie

ABEL Niels Henrik

1829 « Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **4** (1829), p. 131–156.

1830 « Mathematische Bruchstücke aus Herrn N. H. Abel's Briefen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **5** (1830), p. 336–343.

1841 « Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes », *Mémoires présentés par divers davants à l'Académie royale des sciences* **7** (1841), p. 176–264.

AFFOLTER Gabriel Ferdinand

1874 « Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung », *Archiv der Mathematik und Physik* **56** (1874), p. 113–134.

ALFONSI Liliane

2008 « Étienne Bézout : Analyse algébrique au siècle des Lumières », *Revue d'histoire des mathématiques* **14** (2008), p. 211–287.

APPELL Paul & GOURSAT Edouard

1895 *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, Paris : Gauthier-Villars, 1895.

ARCHIBALD Tom

2011 « Differential Equations and Algebraic Transcendents: French Efforts at the Creation of a Galois Theory of Differential Equations 1880-1910 », *Revue d'histoire des mathématiques* **17** (2011), p. 373–401.

ARCHIBALD Tom, PEIFFER Jeanne & SCHAPPACHER Norbert (éds.)

2012 *Explicit Versus Tacit Knowledge in Mathematics*, report no. 04/2012, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 2012.

AUGUST Friedrich

1862 *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis*, thèse de doctorat, Universitate Friderica Guilelma Berolinensi, Berlin.

BAKER Henry Frederick

1911a « A Geometrical Proof of the Theorem of a Double-six of Straight Lines », *Proceedings of the Royal Society of London (A)* **84** (1911), p. 597–602.

1911b « Notes on the Theory of Cubic Surfaces », *Proceedings of the London Mathematical Society* 2e sér. **9** (1911), p. 145–149.

BARROW-GREEN June & GRAY Jeremy

2006 « Geometry at Cambridge, 1863-1940 », *Historia Mathematica* **33** (2006), p. 315–356.

BASTIDE Roger

1998 *Anthropologie appliquée*, Saint-Amand : Stock, 1998.

2007 « Problèmes de l'entrecroisement des civilisations et de leurs œuvres », dans *Traité de sociologie*, sous la dir. de George GURVITCH, première édition 1958, Paris : Presses Universitaires de France, 2007, p. 1245–1268.

BAUER Gustav

1883 « Von den gestaltlichen Verhältnissen der parabolischen Curve auf einer Fläche dritter Ordnung », *Sitzungsberichte der Königlichen bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München* (1883), p. 320–323.

BEAUVILLE Arnaud

1978 *Surfaces algébriques complexes*, 3e éd., Société mathématique de France, 1978.

2012 « De combien de paramètres dépend l'équation générale de degré n ? », *Gazette des Mathématiciens* **132** (2012), p. 5–15.

BENNETT Geoffrey Thomas

1911 « The Double-six », *Proceedings of the London Mathematical Society* 2e sér. **9** (1911), p. 336–351.

BENSON Dave

1989 « Projective Modules for the Group of Twenty-seven Lines on a Cubic Surface », *Communications in Algebra* **17** (1989), p. 1017–1068.

BERNARD Alain

2010 « The Significance of Ptolemy's *Almagest* for its early readers », *Revue de synthèse* **131** (4) (2010), p. 495–521.

Bertini Eugenio

1883-84 « Contribuzione alla teoria delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti di una superficie di 3º ordine », *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 2e sér. **12** (1883-84), p. 201–246.

1884 « Sulla superficie di 3° ordine », *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo* 2e sér. **17** (1884), p. 478–480, 712–715.

Bertrand Joseph

1884 « Éloge de M. Victor Puiseux, lu dans la séance publique annuelle de l'Académie des sciences du 5 mai 1884 », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* 2e sér. **8** (1884), p. 227–234.

Berzolari Luigi

1939-40 « Commemorazione di Ernesto Pascal », *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo* **73** (2) (1939-40), p. 162–170.

Betti Enrico

1853 « Sopra l'abbassamento delle equazioni modulari delle funzioni ellittiche », *Annali di scienze matematiche e fisiche* **4** (1853), p. 81–100.

Bioesmat-Martagon Lise

2011 *Éléments d'une biographie de l'Espace projectif*, Nancy : Presses Universitaires de Nancy, 2011.

Birkhoff Garett & Bennett Mary Katherine

1988 « Felix Klein and His "Erlanger Programm" », *History and Philosophy of Modern Mathematics* **11** (1988), p. 145–176.

Blythe Willian Henry

1898a « On the Construction of Models of Cubic Surfaces », *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* **29** (1898), p. 206–223.

1898b « On the Forms of Cubic Surfaces Containing 27 Real Straight Lines », *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **9** (1898), p. 6–11.

1901 « On Models of Cubic Surfaces », *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* **32** (1901), p. 266–270.

1902 « To Place "a Double-six" in Position », *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* **34** (1902), p. 73–74.

1904 « Notes on the Geometry of Cubic Surfaces », *Messenger of Mathematics* 2e sér. **34** (1904), p. 139–141.

1905 *On Models of Cubic Surfaces*, Cambridge : Cambridge University Press, 1905.

Boi Luciano, Flament Dominique & Salanskis Jean-Michel (éds.)

1992 *1830-1930: A Century of Geometry*, Berlin, Heidelberg : Springer, 1992.

Bolza Oskar

1908 « Heinrich Maschke: His Life and Work », *Bulletin of the American Mathematical Society* **15** (1908), p. 85–95.

Borchardt Carl Wilhelm

1877 « Ueber die Darstellung der Kummerschen Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten durch die Göpelsche biquadratische Relation zwischen vier Thetafunctionen mit zwei Variabeln. » *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **83** (1877), p. 234–244.

Bos Henk J. M., Kers Cees, Oort Frans & Diederick Raven

1987 « Poncelet's Closure Theorem », *Expositiones Mathematicae* **5** (1987), p. 289–364.

Boucard Jenny

2011 *Un « rapprochement curieux de l'algèbre et de la théorie des nombres » : études sur l'utilisation des congruences en France de 1801 à 1850*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

Brechenmacher Frédéric

2006 *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930)*, thèse de doctorat, École des hautes études en sciences sociales, Paris.

2007a « La Controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker », *Revue d'histoire des mathématiques* **13** (2) (2007), p. 187–257.

2007b « L'Identité algébrique d'une pratique portée par *la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes* (1766-1874) », *Sciences et techniques en perspective* **1** (2) (2007), p. 5–85.

201 ? « The Algebraic Cast of Poincaré's *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* », preprint.

2010 « Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques », *Revue de synthèse* **131** (4) (2010), p. 569–603.

2011 « Self-portraits with Évariste Galois (and the Shadow of Camille Jordan) », *Revue d'histoire des mathématiques* **17** (2011), p. 271–369.

BRECHENMACHER Frédéric & EHRHARDT Caroline

2010 « On the Identities of Algebra in the 19$^{\text{th}}$ Century », dans *Disciplines and Styles in Pure Mathematics, 1800-2000*, sous la dir. de Philippe NABONNAND, Volker REMMERT, David E. ROWE & Klaus VOLKERT, report no. 12/2010, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, p. 604–612.

BRILL Alexander

1923 « Max Noether », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **32** (1923), p. 211–233.

BRILL Alexander, GORDAN Paul, KLEIN Felix, LÜROTH Jacob, MAYER Adolph, NOETHER Max & VON DER MÜHLL Karl

1873 « Rudolf Friedrich Alfred Clebsch – Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen », *Mathematische Annalen* **7** (1873), p. 1–55.

BRILL Alexander & NOETHER Max

1892-93 « Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **3** (1892-93), p. 107–566.

BRIOSCHI Francesco

1855 « Intorno ad alcune proprieta delle superficie del terzo ordine », *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* **6** (1855), p. 374–379.

1876 « Sopra una proprietà dei piani tritangenti ad una superficie cubica », *Atti della Reale Accademia dei Lincei* 2$^{\text{e}}$ sér. **3** (1876), p. 257–259.

BRUCE James Williams & WALL Charles Terence Clegg

1979 « On the Classification of Cubic Surfaces », *Journal of the London Mathematical Society* **19** (2) (1979), p. 245–256.

BURKHARDT Heinrich

1890 « Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen. Erster Theil », *Mathematische Annalen* **36** (1890), p. 371–434.

1891 « Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen. Zweiter Theil », *Mathematische Annalen* **38** (1891), p. 161–224.

1893 « Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen. Dritter Theil », *Mathematische Annalen* **41** (1893), p. 313–343.

BURNSIDE William

1910 « On Double-sixes », *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **15** (1910), p. 428–430.

CAJORI Florian

1929 *A History of Mathematical Notations*, Chicago : The Open Court Publishing Company, 1929.

CARON Joseph

1880 « Sur l'épure des vingt-sept droites d'une surface du troisième degré, dans le cas où ces droites sont réelles », *Bulletin de la Société Mathématique de France* **8** (1880), p. 73–74.

CARTAN Élie

1896 « Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu », *American Journal of Mathematics* **18** (1896), p. 1–61.

1946 « Quelques remarques sur les 28 bitangentes d'une quartique plane et les 27 droites d'une surface cubique », *Bulletin des sciences mathématiques* 2^{e} sér. **70** (1946), p. 42–45.

CAYLEY Arthur

1844 « Mémoire sur les courbes du troisième ordre », *Journal de Mathématiques pures et appliquées* **9** (1844), p. 285–293, repr. dans [Cayley *Œuvres*, t. 1, p. 183-189].

1847 « Recherches sur l'élimination, et sur la théorie des courbes », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **34** (1847), p. 30–45, repr. dans [Cayley *Œuvres*, t. 1, p. 337-351].

1849 « On the Triple Tangent Planes of Surfaces of Third Order », *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* **4** (1849), p. 118–132, repr. dans [Cayley *Œuvres*, t. 1, p. 445-456].

1868a « A "Smith's Prize" Paper; Solutions », *The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics* **4** (1868), p. 201–226, repr. dans [Cayley *Œuvres*, t. 8, p. 414-435].

1868b « Note sur l'algorithme des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **68** (1868), p. 176–179, repr. dans [Cayley *Œuvres*, t. 7, p. 123-125].

1868c « On Pascal's Theorem », *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* **9** (1868), p. 348–353, repr. dans [Cayley *Œuvres*, t. 6, p. 129-134].

1869a « A Memoir on Cubic Surfaces », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **159** (1869), p. 231–326, repr. dans [Cayley *Œuvres*, t. 6, p. 359-455].

1869b « On the Six Co-ordinates of a Line », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **11** (1869), p. 290–323, repr. dans [Cayley *Œuvres*, t. 7, p. 66-98].

1870 « On the Double-sixers of a Cubic Surface », *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* **10** (1870), p. 58–71, repr. dans [Cayley *Œuvres*, t. 7, p. 316-329].

1873 « On Dr. Wiener's Model of a Cubic Surface with 27 Real Lines; and on the Construction of a Double-sixer », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **12** (1) (1873), p. 366–383, repr. dans [Cayley *Œuvres*, t. 8, p. 366-384].

1877 « On the Double Θ-functions in Connection with a 16-nodal Quartic Surface », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **83** (1877), p. 210–219, repr. dans [Cayley *Œuvres*, t. 10, p. 157-165].

Œuvres *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*, 13 vols., Cambridge : Cambridge University Press, 1889-1897.

CHEMLA Karine

2009 « Mathématiques et culture. Une approche appuyée sur les sources chinoises les plus anciennes », dans *La mathématique*, t. 1. Les lieux et les temps, Paris : Éditions du CNRS, 2009, p. 103–152.

CLEBSCH Alfred

1861 « Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **59** (1861), p. 1–62.

1864a « Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **63** (1864), p. 189–243.

1864b « Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **63** (1864), p. 94–121.

1865 « Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **64** (1865), p. 210–270.

1866 « Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **65** (1866), p. 359–380.

1868 « Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **69** (1868), p. 142–184.

CLEBSCH Alfred

1871a « Bemerkungen zu der Theorie der Gleichungen 5$^{\text{ten}}$ und 6$^{\text{ten}}$ Grades », *Nachricthen von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität* (1871), p. 103–108.

1871b « Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5$^{\text{ten}}$ Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits », *Mathematische Annalen* **4** (1871), p. 284–345.

1871c « Ueber die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binären Formen bei höheren Transformationen genügen », *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen* **15** (1871), p. 65–99.

1872a *Theorie der binären algebraischen Formen*, Leipzig : Teubner, 1872.

1872b « Zum Gedächtniss an Julius Plücker », *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen* **16** (1872), p. 1–40.

1876 *Vorlesungen über Geometrie*, sous la dir. de Ferdinand LINDEMANN, Leipzig : Teubner, 1876.

CLEBSCH Alfred & GORDAN Paul

1866 *Theorie der Abelschen Functionen*, Leipzig : Teubner, 1866.

1867 « Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie », *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 2e sér. **1** (1867), p. 23–79.

COLLINS Harry

2010 *Tacit and Explicit Knowledge*, Chicago, London : The University of Chicago Press, 2010.

CORRY Leo

2004 *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, 2e éd., Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 2004.

2007 « From *Algebra* (1895) to *Moderne Algebra* (1930): Changing Conceptions of a Discipline—A Guided Tour Using the *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* », dans *Episodes in the History of Modern Algebra (1800-1850)*, sous la dir. de Jeremy GRAY & Karen Hunger PARSHALL, Providence : American Mathematical Society – London Mathematical Society, 2007, p. 221–243.

CREMONA Luigi

1868 « Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **68** (1868), p. 1–133.

1870 « Sulle ventisette rette di una superficie del terzo ordine », *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo* **3** (2) (1870), p. 209–219.

1876-77 « Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal », *Atti della Reale Accademia dei Lincei. Memorie della Classa di Scienze fisiche, matematiche et naturali* 3e sér. **1** (1876-77), p. 854–874.

CRILLY Tony

2006 *Arthur Cayley: Mathematician Laureate of the Victorian Age*, Baltimore : The John Hopkins University Press, 2006.

CUCHE Denys

2010 *La notion de culture dans les sciences sociales*, 4e éd., Paris : La Découverte, 2010.

DE JONQUIÈRES Ernest

1859 « Solution de la question 376 », *Nouvelles annales de mathématiques* **18** (1859), p. 129–138.

DE SAINT-GERVAIS Henri Paul

2010 *Uniformisation des surfaces de Riemann*, Lyon : ENS Éditions, 2010.

DE VRIES J.

1901 « La Configuration formée par les vingt-sept droites d'une surface cubique », *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles* 2e sér. **6** (1901), p. 148–154.

DICKSON Leonard Eugene

1901a « Canonical Forms of Quaternary Abelian Substitutions in an Arbitrary Galois Field », *Transactions of the American Mathematical Society* **2** (1901), p. 103–138.

1901b *Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory*, Leipzig : Teubner, 1901.

1901c « The Configurations of the 27 Lines on a Cubic Surface and the 28 Bitangents to a Quartic Curve », *Bulletin of the American Mathematical Society* **8** (1901), p. 63–70.

1902 « A Class of Groups in an Arbitrary Realm Connected with the Configuration of the 27 Lines on a Cubic Surface », *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* **33** (1902), p. 145–173.

1915 « The Straight Lines on Modular Cubic Surfaces », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **1** (1915), p. 248–253.

DIEUDONNÉ Jean

1974 *Cours de géométrie algébrique*, t. 1. Aperçu historique sur le développement de la géométrie algébrique, Vendôme : Presses Universitaires de France, 1974.

DIXON Alfred Cardew

1908 « An Elementary Discussion of Schläfli's Double-six », *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* **40** (1908), p. 381–384.

1910 « Note on the Double-six », *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* **41** (1910), p. 203–209.

D'OCAGNE Maurice

1895 « Solution géométrique complète de la troisième partie du problème d'admission à l'École Polytechnique », *Nouvelles annales de mathématiques* 3e sér. **14** (1895), p. 339–344.

DUGAC Pierre

1976 *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris : Vrin, 1976.

DUMBAUGH FENSTER Della

1997 « Role Modeling in Mathematics: The Case of Leonard Eugene Dickson », *Historia Mathematica* **24** (1997), p. 7–24.

1999 « Why Dickson Left Quadratic Reciprocity out of His *History of the Theory of Numbers* », *The American Mathematical Monthly* **106** (7) (1999), p. 618–627.

2005 « Leonard Dickson, History of the Theory of Numbers », dans [Grattan-Guinness 2005], p. 833–843.

ECKES Christophe

2011 *Groupes, invariants et géométries dans l'œuvre de Weyl*, thèse de doctorat, Université Lyon III.

EDWARDS Harold M.

1989 « Kronecker's View on the Foundations of Mathematics », dans [McCleary & Rowe 1989], p. 67–77.

2005 *Essays on Constructive Mathematics*, New York : Springer, 2005.

2009 « Kronecker's Algorithmic Mathematics », *The Mathematical Intelligencer* **31** (2) (2009), p. 11–14.

EHRHARDT Caroline

2011 *Évariste Galois : La fabrication d'une icône mathématique*, Paris : Éditions de l'EHESS, 2011.

2012 *Itinéraires d'un texte mathématique : Les réélaborations des écrits d'Évariste Galois au* XIX^{e} *siècle*, Paris : Hermann, 2012.

2015 « Tactics: In Search of a Long-term Mathematical Project (1844-1896) », *Historia Mathematica* (2015), `http://dx.doi.org/10.1016/j.hm.2014.12.002`.

ELSENHANS Andreas-Stephan & JAHNEL Jörg

2011 « Cubic Surfaces with a Galois Invariant Pair of Steiner Trihedra », *International Journal of Number Theory* **4** (2011), p. 947–970.

EMCH Arnold

1938 « Carl Friedrich Geiser », *National Mathematics Magazine* **12** (1938), p. 286–289.

ENGEL Friedrich

1900 « Sophus Lie », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **8** (1900), p. 30–46.

ENGELMANN Gerhard

1982 « Kühnen, Friedrich », *Neue Deutsche Biographie* **13** (1982), p. 206.

FANO Gino

1907 « Gegensatz von analytischer und synthetischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im 19. Jahrhundert », dans *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, t. III. 1. 1, Teubner, 1907, chap. A, B, 4a, p. 221–288.

FEHR Henri

1933 « C.-F. Geiser », *L'enseignement mathématique* **32** (1) (1933), p. 410.

FISCHER Gerd

1986a *Mathematical Models: Commentary*, Braunschweig : Vieweg & Sohn, 1986.

1986b *Mathematische Modelle*, Braunschweig : Vieweg & Sohn, 1986.

FISHER Charles S.

1966 « The Death of a Mathematical Theory: a Study in the Sociology of Knowledge », *Archive for History of Exact Sciences* **3** (2) (1966), p. 137–159.

FOLIE François

1873 « Note sur l'extension des théorèmes de Pascal et de Brianchon aux courbes planes et aux surfaces du 3^{e} ordre ou de la 3^{e} classe », *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège* 2^{e} sér. **3** (1873), p. 663–671.

FOLTA Jaroslav & NOVÝ Luboš

1965 « Sur la question des méthodes quantitatives dans l'histoire des mathématiques », *Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum* **1** (1965), p. 3–35.

FRAME J. Sutherland

1951 « The Classes and Representations of the Groups of 27 lines and 28 bitangents », *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 4^e^ sér. **32** (1951), p. 83–119.

FRIEDELMEYER Jean-Pierre

2007 « Le théorème de clôture de Poncelet, une démonstration "imparfaite", qui fait toute une histoire... », dans *Histoire et enseignement des mathématiques – Rigeurs, erreurs, raisonnements*, sous la dir. de Évelyne BARBIN & Dominique BÉNARD, Institut National de Recherche Pédagogique – Université Blaise-Pascal de Clermont-Ferrand (IREM), 2007, p. 229–261.

FROST Percival

1882 « On the 27 Lines, the 45 Triple Tangent Planes, and the 36 Double-sixers of a Cubic Surface, with a Hint for the Construction of Models which Give the Position of the Lines when They Are All Real », *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* **18** (1882), p. 89–96.

FUNCK R.

1901 « Die Konfiguration $(15_6, 20_3)$, ihre analytische Darstellung und ihre Beziehungen zu gewissen algebraischen Flächen », *Archiv der Mathematik und Physik* 3^e^ sér. **2** (1901), p. 78–107.

G. E.

1894 « Sur les droites qu'on peut placer sur une surface de troisième classe ou de troisième ordre », *Nouvelles annales de mathématiques* 3^e^ sér. **13** (1894), p. 138–144.

GALOIS Évariste

1846 « Œuvres mathématiques », *Journal de Mathématiques pures et appliquées* **11** (1) (1846), p. 381–444.

GAUSS Carl Friedrich

1828 *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Göttingen : Dieterichianis, 1828.

GAUTHIER Sébastien

2007 *La géométrie des nombres comme discipline (1890-1945)*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

2009 « La géométrie dans la géométrie des nombres : histoire de disicpline ou histoire de pratiques à partir des exemples de Minkowski, Mordell et Davenport », *Revue d'histoire des mathématiques* **15** (2009), p. 183–230.

GEISER Carl Friedrich

1866 « Ueber eine geometrische Verwandtschaft des zweiten Grades », *Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern* **580-602** (1866), p. 97–107.

1869a *Einleitung in die synthetische Geometrie*, Leipzig : Teubner, 1869.

1869b « Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curven vierten Grades », *Mathematische Annalen* **1** (1869), p. 129–138.

1869c « Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **70** (1869), p. 249–257.

GILAIN Christian

1991 « Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral », *Archive for History of Exact Sciences* **42** (1991), p. 91–136.

GINZBURG Carlo

1980 « Signes, traces, pistes. Racines d'un paradigme de l'indice », *Le Débat* (1980), p. 3–44.

1989 *Mythes, emblèmes, traces : Morphologie et histoire*, Paris : Flammarion, 1989.

GISPERT Hélène

1999 « Les Débuts de l'histoire des mathématiques sur les scènes internationales et le cas de l'entreprise encyclopédique de Felix Klein et Jules Molk », *Historia Mathematica* **26** (1999), p. 344–360.

GLASER Fritz

1911 *Ueber die Galoissche Gruppe der Gleichung 16. Grades, von der die 16 Knotenpunkte der Kummerschen Fläche 4. O. abhängen*, thèse de doctorat, Kaiser Wilhelms Universität Straßburg, Strasbourg.

GOLDSTEIN Catherine

1995 *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis : Presses Universitaires de Vincennes, 1995.

GOLDSTEIN Catherine

1999 « Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914) », *Acta historiae rerum naturalium necnon technicarum* **3** (1999), p. 187–214.

2007 « The Hermitian Form of Reading the *Disquisitiones* », dans [Goldstein, Schappacher & Schwermer 2007], p. 377–410.

2011a « Charles Hermite's Stroll through the Galois Field », *Revue d'histoire des mathématiques* **17** (2011), p. 211–270.

2011b « Un arithméticien contre l'arithémtisation : les principes de Charles Hermite », dans *Justifier en mathématiques*, sous la dir. de Dominique FLAMENT & Philippe NABONNAND, Paris : Maison des Sciences de l'Homme, 2011, p. 129–165.

2012 « Les autres de l'un : deux enquêtes prosopographiques sur Charles Hermite », dans *Les uns et les autres... Biographies et prosopographies en histoire des sciences*, sous la dir. de Philippe NABONNAND & Laurent ROLLET, Nancy : Presses Universitaires de Nancy, 2012, p. 509–540.

GOLDSTEIN Catherine & SCHAPPACHER Norbert

2007 « A Book in Search of a Discipline », dans [Goldstein, Schappacher & Schwermer 2007], p. 3–65.

GOLDSTEIN Catherine, SCHAPPACHER Norbert & SCHWERMER Joachim (éds.)

2007 *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, 2007.

GORDAN Paul

1870 « Ueber die Invarianten binären Formen bei höheren Transformationen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **71** (1870), p. 164–194.

GOW Rod

1997 « George Salmon 1819-1904: His Mathematical Work and Influence », *Bulletin of the Irish Mathematical Society* **39** (1997), p. 26–76.

2006 « Life and Work of George Salmon (1819-1904) », *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics* **21** (2006), p. 212–218.

GRAF Johann Heinrich

1896 « Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli », *Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern* (1896), p. 61–264.

1905 *Briefwechsel von Ludwig Schläfli mit Arthur Cayley*, Bern : K. J. Wyss, 1905.

GRASSMANN Hermann

1855 « Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades, und die dadurch erzeugten Oberflächen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **49** (1855), p. 47–65.

GRATTAN-GUINNESS Ivor (éd.)

2005 *Landmark Writings in Western Mathematics, 1640-1940*, Amsterdam : Elsevier Press, 2005.

GRAY Jeremy

1989 « Algebraic Geometry in the Late Nineteenth Century », dans [McCleary & Rowe 1989], p. 361–385.

1992 « Poincaré and Klein: Groups and Geometries », dans [Boi, Flament & Salanskis 1992], p. 35–44.

1994 « Otto Hölder and Group Theory », *The Mathematical Intelligencer* **16** (1994), p. 59–61.

2000 *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*, 2e éd., première édition 1986, Boston : Birkhäuser, 2000.

2005 « Felix Klein's Erlangen Program, "Comparative Considerations of Recent Geometrical Researches" (1872) », dans [Grattan-Guinness 2005], p. 544–552.

2010 *Worlds out of Nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century*, London : Springer, 2010.

GRAY Jeremy & ROWE David E.

2000 « Episodes in the Berlin-Göttingen Rivalry, 1870-1930 », *The Mathematical Intelligencer* **22** (1) (2000), p. 60–69.

GUNTAU Martin & LAITKO Hubert

1987 « Entstehung und Wesen wissenschaftlicher Disziplinen », dans *Der Ursprung der modernen Wissenschaften. Studien zur Entstehung wissenschaftlicher Disziplinen*, sous la dir. de Martin GUNTAU & Hubert LAITKO, Berlin : Akademie-Verlag, 1987, p. 17–89.

HARTSHORNE Robin

1977 *Algebraic Geometry*, New York : Springer, 1977.

HAWKINS Thomas

1984 « The *Erlanger Programm* of Felix Klein: Reflexions on Its Place in the History of Mathematics », *Historia Mathematica* **11** (1984), p. 442–470.

Hawkins Thomas

2000 *Emergence of the Theory of Lie Groups: An Essay in the History of Mathematics 1869-1926*, New York : Springer, 2000.

Henderson Archibald

1901 « The Cone of the Normals and an Allied Cone for Surfaces of the Second Degree », *Journal of the Elisha Mitchell Scientific Society* **17** (1901), p. 32–60.

1903 « The Derivation of the Brianchon Configuration from Two Spatial Point-triads », *The American Mathematical Monthly* **10** (1903), p. 36–41.

1904 « On the Graphic Representation of the Projection of Two Triads of Planes into the Mystic Hexagram », *Journal of the Elisha Mitchell Scientific Society* **20** (1904), p. 124–133.

1905 « A Memoir on the Twenty-seven Lines on the Cubic Surface », *Journal of the Elisha Mitchell Scientific Society* **21** (1905), p. 76–87, 120–133.

1911 *The Twenty-Seven Lines upon the Cubic Surface*, New York : Hafner publishing Co., 1911.

1915 *The Twenty-Seven Lines upon the Cubic Surface*, thèse de doctorat, University of Chicago.

Hermite Charles

1844 « Sur la théorie des transcendantes à différentielles algébriques », *Journal de Mathématiques pures et appliquées* **9** (1844), p. 353–368, repr. dans [Hermite *Œuvres*, t. 1, p. 49-63].

1846 « Extraits de deux lettres de M. Charles Hermite à M. Jacobi », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **32** (1846), p. 277–299, repr. dans [Hermite *Œuvres*, t. 1, p. 10-37].

1855 « Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* **40** (1855), 249–254, 304–309, 365–369, 427–431, etc. repr. dans [Hermite *Œuvres*, t. 1, p. 444-478].

1858a « Sur la résolution de l'équation du cinquième degré », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* **46** (1858), p. 508–515, repr. dans [Hermite *Œuvres*, t. 2, p. 5-12].

1858b « Sur quelques théorèmes d'algèbre et la résolution de l'équation du quatrième degré », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* **46** (1858), p. 961–967, repr. dans [Hermite *Œuvres*, t. 2, p. 30-37].

1859 « Sur la théorie des équations modulaires », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* **48-49** (1859), p. 940–947, 1079–1084, 1095–1102, 16–24, 110–118, 141–144, repr. dans [Hermite *Œuvres*, t. 2, p. 38-82].

1865-66 « Sur l'équation du cinquième degré », *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* **61-62** (1865-66), p. 877–882, 965–972, 1073–1081, 65–72, 157–162, 245–252, 715–722, 919–924, 959–966, 1054–1059, 1161–1167, 1213–1215, repr. dans [Hermite *Œuvres*, t. 2, p. 347-424].

Œuvres *Œuvres de Charles Hermite*, sous la dir. de Émile Picard, 4 vols., Paris : Gauthier-Villars, 1905-1917.

Herreman Alain

2000 *La Topologie et ses signes : Éléments pour une histoire sémiotique des mathématiques*, Paris : L'Harmattan, 2000.

2012 « La Fonction inaugurale de *La Géométrie* de Descartes », *Revue d'histoire des mathématiques* **18** (2012), p. 67–156.

2013 « L'Inauguration des séries trigonométriques dans la *théorie analytique de la chaleur* de Fourier et dans la controverse des cordes vibrantes », *Revue d'histoire des mathématiques* **19** (2013), p. 151–243.

Herskovits Melville J.

1952 *Les Bases de l'anthropologie culturelle*, Paris : Payot, 1952.

Hesse Otto

1844a « Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen von zweiten Grade mit zwei Variabeln », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **28** (1844), p. 68–96.

1844b « Ueber die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **28** (1844), p. 97–107.

1847 « Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen 9^{ten} Grades, deren Wurzeln die Eigenschaft haben, dass eine gegebene rationale und symmetrische Function $\theta(x_\lambda, x_\mu)$ je zweier Wurzeln x_λ, x_μ eine dritte Wurzel x_k giebt, so dass gleichzeitig: $x_\chi = \theta(x_\lambda, x_\mu)$, $x_\lambda = \theta(x_\mu, x_\chi)$, $x_\mu = \theta(x_\chi, x_\lambda)$. » *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **34** (1847), p. 193–208.

1849 « Eigenschaften der Wendepuncte der Curven dritter Ordnung und der Rückkehrtangenten der Curven dritter Classe », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **38** (1849), p. 257–265.

1855a « Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie; insbesondere auf Curven vierter Ordnung », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **49** (1855), p. 243–264.

1855b « Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **49** (1855), p. 279–332.

Hesse Otto

Œuvres *Ludwig Otto Hesse's Gesammelte Werke*, München : Verlag der K. Akademie, 1897.

Hill John Ethan

1897 « Bibliography of Surfaces and Twisted Curves », *Bulletin of the American Mathematical Society* **3** (1897), p. 133–146.

1943 « Obituary Record of Graduates of Yale University Deceased During the Year 1941-1942 », *Bulletin of Yale University* (1943), p. 170.

Hölder Otto

1899 « Galois'sche Theorie mit Anwendungen », dans *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, t. I. 1, Leipzig : Teubner, 1899, chap. B. 3. c, d, p. 480–520.

Hoüel Jules

1871 « Revue bibliographique : Jordan (C.) Traité des substitutions et des équations algébriques », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* **2** (1871), p. 161–169.

Houzel Christian

1978 « Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes », dans *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, sous la dir. de Jean Dieudonne, t. 2, Paris : Hermann, 1978, p. 1–113.

2002 *La Géométrie algébrique: Recherches historiques*, Paris : Albert Blanchard, 2002.

Hunt Bruce

1994 *The Geomerty of some special Arithmetic Quotients*, Berlin, Heidelberg : Springer, 1994.

Jacobi Carl Gustav Jacob

1832 « Considerationes generales de transcendentibus Abelianis », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **9** (1832), p. 394–403.

1835 « De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **13** (1835), p. 55–78.

1850 « Beweis des Satzes dass eine Curve n^{ten} Grades im Allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten hat », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **40** (1850), p. 237–260.

JORDAN Camille

1869a « Sur la trisection des fonctions abéliennes et sur les vingt-sept droites des surfaces du troisième ordre », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* **68** (1869), p. 865–869, repr. dans [Jordan *Œuvres 1*, p. 203-206].

1869b « Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré », *Journal de Mathématiques pures et appliquées* **14** (2) (1869), p. 147–166, repr. dans [Jordan *Œuvres 1*, p. 249-268].

1869c « Sur les équations de la géométrie », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* **68** (1869), p. 656–659, repr. dans [Jordan *Œuvres 1*, p. 199-202].

1869d « Sur une équation du 16e degré », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **70** (1869), p. 182–184, repr. dans [Jordan *Œuvres 1*, p. 207-209].

1870a « Sur une nouvelle combinaison des vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* **70** (1870), p. 326–328, repr. dans [Jordan *Œuvres 1*, p. 269-271].

1870b *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris : Gauthier-Villars, 1870.

1881 *Notice sur les travaux de M. Camille Jordan*, repr. dans [Jordan *Œuvres 4*, p. 553-581], Paris : Gauthier-Villars, 1881.

1894 *Cours d'Analyse*, 2e éd., t. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1894.

Œuvres 1 *Œuvres de Camille Jordan*, sous la dir. de Gaston JULIA, par M. Jean DIEUDONNÉ, Paris : Gauthier-Villars, 1961.

Œuvres 4 *Œuvres de Camille Jordan*, sous la dir. de Gaston JULIA, par M. René GARNIER et M. Jean DIEUDONNÉ, Paris : Gauthier-Villars, 1964.

KASNER Edward

1903 « The Double-Six Configuration Connected with the Cubic Surface and a Related Group of Cremona Transformations », *American Journal of Mathematics* **25** (1903), p. 107–122.

KIERNAN B. Melvin

1971 « The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin », *Archive for History of Exact Sciences* **8** (1971), p. 40–154.

KLEIN Felix

1868 *Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Coordinaten auf eine canonische Form*, repr. dans [Klein *Œuvres 1*, p. 7-49], Bonn : Carl Georgi, 1868.

KLEIN Felix

1870 « Zur Theorie der Linienkomplexe des ersten und zweiten Grades », *Mathematische Annalen* **2** (1870), p. 198–226, repr. dans [Klein *Œuvres 1*, p. 53-80].

1871a « Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie », *Mathematische Annalen* **4** (1871), p. 573–625, repr. dans [Klein *Œuvres 1*, p. 254-305].

1871b « Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen », *Mathematische Annalen* **4** (1871), p. 346–358, repr. dans [Klein *Œuvres 2*, p. 262-274].

1872 *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, repr. dans [Klein *Œuvres 1*, p. 460-497], Erlangen : Andreas Deichert, 1872.

1873 « Ueber Flächen dritter Ordnung », *Mathematische Annalen* **6** (1873), p. 551–581, repr. dans [Klein *Œuvres 2*, p. 11-62].

1875 « Otto Hesse », *Bericht über die Königlichen Polytechnische Schule zu München* (1875), p. 46–50.

1884 *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Leipzig : Teubner, 1884.

1888 « Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique », *Journal de Mathématiques pures et appliquées* **4** (1888), p. 169–176, repr. dans [Klein *Œuvres 2*, p. 473-479].

1891 « Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* 3e sér. **8** (1891), p. 87–102, 173–199, traduction française par Henri PADÉ de [Klein 1872].

1894 *The Evanston Colloquium: Lectures on mathematics*, sous la dir. d'Alexander ZIWET, Boston : Macmillan & co., 1894.

Œuvres 1 *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, sous la dir. de Robert FRICKE & Alexander OSTROWSKI, t. 1, Berlin : Springer, 1921.

Œuvres 2 *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, sous la dir. de Robert FRICKE & Hermann VERMEIL, t. 2, Berlin : Springer, 1922.

1974 *Le Programme d'Erlangen*, French translation of [Klein 1872], preface of Jean DIEUDONNÉ, Paris, Bruxelles, Montréal : Jacques Gabay, 1974.

KLEIN Felix & LIE Sophus

1870 « Sur une certaine famille de courbes et surfaces », *Comptes Rendus des séances de l'Académie des sciences* **70** (1870), p. 1222–1226, 1275–1279, repr. dans [Klein *Œuvres 1*, p. 415-423].

1871 « Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen », *Mathematische Annalen* **4** (1871), p. 50–84, repr. dans [Klein *Œuvres 1*, p. 424-459].

KOHN Gustav

1891a « Beweis eines Satzes von Cayley », *Monatshefte für Mathematik und Physik* **2** (1891), p. 343–344.

1891b « Ueber die Sextupel von geraden Linien, welche von sämtlichen Punkten einer kubischen Fläche als sechs Tangenten eines Kegelschnitts gesehen werden », *Monatshefte für Mathematik und Physik* **2** (1891), p. 293–310.

1908 « Ebene Kurven dritter und vierter Ordnung », dans *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, t. III. 2. 1. Leipzig : Teubner, 1908, chap. C 5 a, p. 457–570.

KOLLROSS Louis

1934 « Prof. Dr. Carl Friedrich Geiser », *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft* **115** (1934), p. 521–528.

KORTEWEG Diderik Johannes

1893 « Over de Rodenberg'sche modellen van kubische oppervlakken, met historische inleiding », *Nieuw Archief voor Wiskunde* **20** (1893), p. 63–96.

KRAZER Adolf & WIRTINGER Wilhelm

1920 « Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen », dans *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, t. II, 2, Leipzig : Teubner, 1920, chap. II B 7, p. 604–873.

KROEBER Alfred Louis & KLUCKHOHN Clyde

1952 *Culture: A Critial Review of Concepts and Definitions*, Cambridge : Harvard University Press, 1952.

KRONECKER Leopold

1858a « Notiz um Gleichungen des siebenten Grades », *Monatsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1858), p. 287–289.

1858b « Sur la résolution de l'équation du cinquième degré ; extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* **46** (1858), p. 1150–1152.

KÜHNEN Friedrich

1888 *Ueber die Galois'sche Gruppe der Gleichung 27. Grades, von welcher die Geraden auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung abhängen*, thèse de doctorat, Universität Marburg.

KUMMER Ernst Eduard

1863 « Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen », *Monatsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1863), p. 324–336.

1864 « Ueber die Flächen vierten Grades, mit sechzehn singulären Punkten », *Monatsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1864), p. 246–259.

Œuvres *Collected Papers*, sous la dir. d'André WEIL, 2 vols., Berlin, New York : Springer, 1975.

KUNG Joseph P. S. & ROTA Gian-Carlo

1984 « The Invariant Theory of Binary Forms », *Bulletin of the American Mathematical Society* **10** (1) (1984), p. 27–85.

LAMPE Emil

1892-93 « Nachruf für Ernst Eduard Kummer », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **3** (1892-93), p. 13–28.

LARVOR Brendan P.

2012 « The Mathematical Cultures Network Project », *Journal of Humanistic Mathematics* **2** (2) (2012), p. 157–160.

LÊ François

2013 « Entre géométrie et théorie des substitutions : une étude de cas autour des vingt-sept droites d'une surface cubique », *Confluentes Mathematici* **5** (1) (2013), p. 23–71.

2014 « "Geometrical Equations": Forgotten Premises of Fleix Klein's *Erlanger Programm* », *Historia Mathematica* (2014), http://dx.doi.org/10.1016/j.hm.2014.11.002.

LEMMERMEYER Franz

2000 *Reciprocity Laws: From Euler to Eisenstein*, Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2000.

2007 « The Development of the Principal Genus Theorem », dans [Goldstein, Schappacher & Schwermer 2007], p. 527–561.

LIE Sophus

1872 « Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen », *Mathematische Annalen* **5** (1872), p. 145–256.

LONG Marjorie

1911 « On Geiser's Method on Generating a Plane Quartic », *Proceedings of the London Mathematical Society* 2e sér. **9** (1911), p. 205–230.

LORENAT Jemma

2015a *Die Freude an der Gestalt: Methods, Figures, and Practices in Early Nineteenth Centyru*, thèse de doctorat, Simon Fraser University (Burnaby) & Université Pierre et Marie Curie (Paris).

2015b « Figures Real, Imagined, and Missing in Poncelet, Plücker, and Gergonne », *Historia Mathematica* **42** (2015), p. 155–192, `http://dx.doi.org/10.1016/j.hm.2014.06.005`.

LOREY Wilhelm

1937 « Die Mathematik an der Universität Gießen vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis 1914 », *Nachrichten der Giessener Hochschulgesellschaft* **11** (2) (1937), p. 54–97.

LORIA Gino

1887 « Su le superficie di 4o ordine con conica doppia », *Annali di Matematica Pura ed Applicata* **14** (1) (1887), p. 31–70.

LUDWIG Walther

1926 « Rudolf Sturm », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **34** (1926), p. 41–51.

MASCHKE Heinrich

1887 « Ueber die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln », *Mathematische Annalen* **30** (1887), p. 496–515.

1888 « Ueber eine quaternäre Gruppe von 51 840 linearen Substitutionen, welche die ternäre Hesse'sche Gruppe als Untergruppe enthält », *Nachricthen von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* (1888), p. 78–86.

1889 « Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternären Gruppe von 51 840 linearen Substitutionen », *Mathematische Annalen* **33** (1889), p. 317–344.

1890 « Ueber eine merkwürdige Configuration gerader Linien im Raume », *Mathematische Annalen* **36** (1890), p. 190–215.

Mathieu Émile

1861 « Mémoire sur la résolution des équations dont le degré est une puissance d'un nombre premier », *Annali di Matematica Pura ed Applicata* **4** (1861), p. 113–132.

1867 « Mémoire sur les fonctions elliptiques », *Journal de l'École Polytechnique* **25** (1867), p. 265–295.

McCleary John & Rowe David E. (éds.)

1989 *The History of Modern Mathematics*, t. 1. Ideas and their Reception, Boston, San Diego, New York : Academic Press, 1989.

Meyer Wilhelm Franz

1930 « Flächen vierter und höherer Ordnung », dans *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, t. III. 2. 2. B, Leipzig : Teubner, 1930, chap. C 10 b, p. 1533–1779.

Miller George Abram, Blichfeld Hans Frederick & Dickson Leonard Eugene

1916 *Theory and Applications of Finite Groups*, New York : John Wiley & sons, 1916.

Milne James S.

2014 *Algebraic Geometry (v6.00)*, vu le 18 mars 2015, `www.jmilne.org/math/`.

Moore Eliakim Hastings

1900 « The Cross-ratio Group of $n!$ Cremona-transformations of Order $n-3$ in Flat Space of $n-3$ Dimensions », *American Journal of Mathematics* **22** (1900), p. 279–291.

Moore Walter

1989 *Schrödinger: Life and Thought*, New York : Cambridge University Press, 1989.

Mossbrugger Leopold

1841 « Untersuchungen über die geometrische Bedeutung der constanten Coefficienten in den allgemeinen Gleichungen der Flächen des zweiten und dritten Grades », *Archiv der Mathematik und Physik* **1** (1841), p. 337–360.

Mullins Nicholas C.

1972 « The Development of a Scientific Specialty: The Phage Group and the Origins of Molecular Biology », *Minerva* **10** (1) (1972), p. 51–82.

MUMFORD David

1995 *Algebraic Geometry I. Complex Projective Varieties*, réimpression de l'édition de 1976, Berlin, Heidelberg : Springer, 1995.

NABONNAND Philippe & ROLLET Laurent

2002 « Une bibliographie mathématique idéale ? Le Répertoire bibliographique des sciences mathématiques », *Gazette des Mathématiciens* **92** (2002), p. 11–26.

NETTO Eugen

1882 *Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra*, Leipzig : Teubner, 1882.

NEUMANN Carl

1872 « Zum Andenken an Rudolf Friedrich Alfred Clebsch », *Nachricthen von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität* (1872), p. 550–559.

NEUMANN Olaf

2007 « The *Disquisitiones Arithmeticae* and the Theory of Equations », dans [Goldstein, Schappacher & Schwermer 2007], p. 107–127.

NICHOLSON Julia

1993 « The Development and Understanding of the Concept of Quotient Group », *Historia Mathematica* **20** (1993), p. 68–88.

NOETHER Max

1875 « Otto Hesse », *Zeitschrift für Mathematik und Physik: Historisch-literarische Abtheilung* **20** (1875), p. 77–88.

1879 « Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung », *Mathematische Annalen* **15** (1879), p. 89–110.

OZHIGOVA Elena Petrovna

2001 « Problems of Number Theory », dans *Mathematics of the 19th Century*, sous la dir. d'Andrei Nikolaievitch KOLMOGOROV & Adolph-Andrei Pavlovich YUSHKEVICH, 2e éd., t. 1 : Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory, avec l'aide de A. P. YUSHKEVICH, Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 2001, chap. 3, p. 137–209.

PARSHALL Karen Hunger

1989 « Toward a History of Nineteenth-Century Invariant Theory », dans [McCleary & Rowe 1989], p. 157–206.

PARSHALL Karen Hunger

1998 *James Joseph Sylvester: Life and Work in Letters*, Oxford : Clarendon Press, 1998.

2004 « Defining a Mathematical Research School: The Case of Algebra at the University of Chicago, 1892-1945 », *Historia Mathematica* **31** (2004), p. 263–278.

2006 *James Joseph Sylvester: Jewish Mathematician in a Victorian World*, Baltimore : The John Hopkins University Press, 2006.

PARSHALL Karen Hunger & ROWE David E.

1994 *The Emergence of the American Mathematical Research Community, 1876-1900: J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore*, Providence : American Mathematical Society – London Mathematical Society, 1994.

PASCAL Ernesto

1892 « Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3° ordine, e sui gruppi ad esso isomorfi », *Annali di Matematica Pura ed Applicata* **20** (2) (1892), p. 269–332.

1893 « Continuazione del saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le rette della superficie cubica », *Annali di Matematica Pura ed Applicata* **21** (2) (1893), p. 85–137.

PERRIN Daniel

2002 « Eine Ergänzung zum Bericht über Geometrie der Kommision Kahane: das Beispiel der affinen Geometrie im Collège », *Mathematische Semesterberichte* **48** (2) (2002), p. 211–245.

PERRINEAU Pascal

1975 « Sur la notion de culture en anthropologie », *Revue française de science politique* **25** (5) (1975), p. 946–968.

PETERSEN Julius

1897 *Théorie des équations algébriques*, traduction en français par H. LAURENT, Paris : Gauthier-Villars, 1897.

PETOT Albert

1886 « Sur une extension du théorème de Pascal aux surfaces du troisième ordre », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* **102** (1886), p. 737–740.

PETRI Birgit & SCHAPPACHER Norbert

2004 « From Abel to Kronecker. Episodes from 19th Century Algebra », dans *The Legacy of Niels Henrick Abel*, sous la dir. d'Olav Arnfinn LAUDAL & Ragni PIENE, Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2004, p. 227–266.

2007 « On Arithmetization », dans [Goldstein, Schappacher & Schwermer 2007], p. 343–374.

PLÜCKER Julius

1835 *System der analytischen Geometrie*, Berlin : Duncker und Humbolt, 1835.

1839 *Theorie der algebraischen Curven*, Bonn : Adolph Marcus, 1839.

POLO-BLANCO Irene

2007 *Theory and History of Geometric Models*, thèse de doctorat, Rijksuniversiteit Groningen.

PONCELET Jean-Victor

1832 « Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et des surfaces géométriques », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **8** (1832), p. 117–137.

PUISEUX Victor

1850 « Recherches sur les fonctions algébriques », *Journal de Mathématiques pures et appliquées* 1re sér. **15** (1850), p. 365–480.

1851 « Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques », *Journal de Mathématiques pures et appliquées* 1re sér. **16** (1851), p. 228–240.

PUTZEL Rosamond

1988 « Archibald Henderson, 17 July 1877 – 6 Dec. 1963 », dans *Dictionary of North Carolina Biography*, sous la dir. de William S. POWELL, t. 3 (H-K), Dublin : The University of North Carolina Press, 1988.

REDFIELD Robert, LINTON Ralph & HERSKOVITS Melville J.

1936 « Memorandum for the Study of Acculturation », *American Anthopologist* **38** (1) (1936), p. 149–152.

REID Miles

1988 *Undergraduate Algebraic Geometry*, Cambridge : Cambridge University Press, 1988.

REYE Theodor

1876 *Die Geometrie der Lage*, Hannover : Carl Rümpler, 1876.

REYE Theodor

1882 *Leçons sur la géométrie de position*, traduction française par Octave CHEMIN, Paris : Dunod, 1882.

RICHARDSON R. G. D.

1936 « The Ph.D. Degree and Mathematical Research », *The American Mathematical Monthly* **43** (1936), p. 199–215.

RICHMOND Herbert William

1889 « A Symmetrical System of Equations of the Lines on a Cubic Surface which has a Conical Point », *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* **23** (1889), p. 170–179.

1902 « Concerning the Locus $\sum(x_r^3) = 0$; $\sum(x_r) = 0$ $(r = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ », *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* **34** (1902), p. 117–154.

1908 « On the Property of a Double-six of Lines, and its Meaning in Hypergeometry », *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **14** (1908), p. 475–477.

ROCHER Guy

1968 *Introduction à la sociologie générale*, t. 1. L'action sociale, Montréal : HMH, 1968.

RODENBERG Carl

1879 « Zur Classification der Flächen dritter Ordnung », *Mathematische Annalen* **14** (1879), p. 46–110.

ROHN Karl

1881 « Die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche », *Mathematische Annalen* **18** (1881), p. 99–159.

ROQUE Tatiana

2015 « L'originalité de Poincaré en mécanique céleste : un réseau de textes employant la pratique des solutions périodiques », *Revue d'histoire des mathématiques* **21** (2015), p. 37–105.

ROWE David E.

1983 « A Forgotten Chapter in the History of Felix Klein's *Erlanger Programm* », *Historia Mathematica* **10** (1983), p. 448–457.

1985 « Felix Klein's "*Erlanger Antrittsrede*": A Transcription with English Translation and Commentary », *Historia Mathematica* **12** (1985), p. 123–141.

1989a « Klein, Hilbert, and the Göttingen Mathematical Tradition », *Osiris* **5** (2) (1989), p. 186–213.

1989b « The Early Geometrical Works of Sophus Lie and Felix Klein », dans [McCleary & Rowe 1989], p. 209–273.

1992 « Klein, Lie, and the "Erlanger Programm" », dans [Boi, Flament & Salanskis 1992], p. 45–54.

1998 « Mathematics in Berlin, 1810-1933 », dans *Mathematics in Berlin*, sous la dir. d'Heinrich Begehr, Jürg Kramer, Helmut Koch, Norbert Schappacher & Ernst-Jochen Thiele, Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 1998, p. 9–26.

2004 « Making Mathematics in an Oral Culture: Göttingen in the Era of Klein and Hilbert », *Science in Context* **17** (1-2) (2004), p. 85–129.

2013 « Mathematical Models as Artefacts for Research: Felix Klein and the Case of Kummer Surfaces », *Mathematische Semesterberichte* **60** (2013), p. 1–24.

Salmon George

1847 « On the Degree of a Surface Reciprocal to a Given One », *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* **2** (1847), p. 65–73.

1849 « On the Triple Tangent Planes to a Surface of the Third Order », *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* **4** (1849), p. 252–260.

1850 « Lettre de Mr. G. Salmon à l'éditeur de ce journal », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **39** (1850), p. 365–366.

1852 *A Treatise on the Higher Plane Curves*, 1re éd., Dublin : Hodges & Smith, 1852.

1865 *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions*, 2e éd., Dublin : Hodges, Smith, & Co., 1865.

1882 *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions*, 4e éd., Dublin : Hodges, Figgis & Co., 1882.

Sapir Edward

1921 *Anthropologie*, t. 1 : Culture et personnalité, traduction française par Christian Baudelot et Pierre Clinquart, Paris : Éditions de Minuit, 1921.

Schappacher Norbert

1991 « Développement de la loi de groupe sur une cubique », dans *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988/89*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, **91**, p. 159–184.

SCHAPPACHER Norbert & VOLKERT Klaus

2005 « Heinrich Weber, un mathématicien à Strasbourg, 1895-1913 », dans *La science sous influence. L'université de Strasbourg, enjeu des conflits franco-allemands, 1872-1945*, sous la dir. d'Elisabeth CRAWFORD & Josiane OLFF-NATHAN, Strasbourg : La Nuée Bleue, 2005.

SCHLÄFLI Ludwig

1858 « An Attempt to Determine the Twenty-seven Lines upon a Surface of the Third Order and to Divide such Surfaces into Species in Reference to the Reality of the Lines upon the Surface », *The Quarterly Journal of Mathematics* **2** (1858), p. 55–65, 110–120.

1863 « On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species, in Reference to the Absence or Presence of Singular Points, and the Reality of Their Lines », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **153** (1863), p. 193–241.

1871 « Quand è che dalla superficie generale di terz'ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale ? », *Annali di Matematica Pura ed Applicata* **5** (1871), p. 289–295.

SCHOLZ Erhard

1980 *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Boston : Birkhäuser, 1980.

1989 *Symmetrie, Gruppe, Dualität: Zur Beziehung zwischen theorischer Mathematik und Anwendungen in Kristallographie und Baustatik des 19. Jahrhunderts*, Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser, 1989.

SCHOUTE Pieter Hendrik

1893 « Sur le moyen de déduire d'une représentation plane d'une surface cubique la position des 27 droites les unes par rapport aux autres », *Amsterdam Akademie Verslagen* **1** (1893), p. 141–144.

SCHRÖTER Heinrich

1863 « Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **62** (1863), p. 265–280.

SCHUBERT Hermann

1879 *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig : Teubner, 1879.

SCHUR Friedrich

1881 « Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen », *Mathematische Annalen* **18** (1881), p. 1–32.

SEGRE Beniamino

1942 *The Non-singular Cubic Surfaces: A New Method of Investigation with Special Reference to Questions of Reality*, Oxford : Clarendon Press, 1942.

SEGRE Corrado

1887 « Sulla varietà cubica con dieci punti dopii dello spazio a quattro dimensioni », *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino* **22** (1887), p. 547–557.

1889 « Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario », *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino* **39** (2) (1889), p. 3–48.

SERRE Jean-Pierre

1979-80 « Extensions icosaédriques », *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux* **9** (1979-80), exposé n° 19.

SERRET Joseph-Alfred

1854 *Cours d'algèbre supérieure*, 2e éd., Paris : Mallet-Bachelier, 1854.

1866 *Cours d'algèbre supérieure*, 3e éd., t. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1866.

1868 *Handbuch der höheren Algebra*, traduction de [Serret 1866], Leipzig : Teubner, 1868.

SHAFAREVICH Igor

1994 *Basic Algebraic Geometry*, 2e éd., t. 1. Varieties in Projective Space, Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1994.

SIEGMUND-SCHULTZE Reinhard

1993 *Mathematische Berichterstattung in Hitlerdeutschland: Der Niedergang des « Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik »*, Göttingen : Vanderhoeck & Ruprecht, 1993.

SINACEUR Hourya

1991 *Corps et modèles*, Paris : Vrin, 1991.

SLAUGHT Herbert Ellsworth

1900 « The Cross-ratio Group of 120 Quadratic Cremona-transformations of the Plane. Part First: Geometric Representation », *American Journal of Mathematics* **22** (1900), p. 343–380.

SMITH Henry John Stephen

1876 « Geometrical Intruments and Models », dans *Handbook to the Special Loan Collection of Scientific Apparatus (South Kensington Museum)*, Chapman & Hall, 1876, p. 34–54.

SPENCER-OATEY Helen

2012 *What is Culture? A Compilation of Quotations*, GlobalPAD Core Concepts, `http://www2.warwick.ac.uk/fac/soc/al/globalpad/openhouse/interculturalskills/`, consulté le 16 avril 2014.

SPOTTISWOODE William

1873 « Sur les plans tangents triples à une surface », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* **77** (1873), p. 1181–1183.

STEINER Jacob

1846a « Geometrische Lehrsätze », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **32** (1846), p. 182–184.

1846b « Théorèmes de géométrie », *Journal de Mathématiques pures et appliquées* **11** (1846), p. 468–470.

1855 « Eigenschaften der Curven vierten Grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **49** (1855), p. 265–272.

1856a « Ueber die Flächen dritten Grades », *Monatsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1856), p. 50–61.

1856b « Ueber die Flächen dritten Grades », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **53** (1856), p. 133–141.

STEINITZ Ernst

1910 « Konfigurationen der projektiven Geometrie », dans *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, t. III. 1. 1, Teubner, 1910, chap. 5a, p. 481–516.

STUBHAUG Arild

2005 *Sophus Lie. Une pensée audacieuse*, traduction française par Patricia CHWAT et Marie-José BEAUD, Paris, Berlin : Springer, 2005.

STURM Rudolf

1867 *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, Leipzig : Teubner, 1867.

1884 « Ueber die 27 Geraden der cubischen Flächen », *Mathematische Annalen* **23** (1884), p. 289–310.

SYLVESTER James Joseph

1851 « Sketch of a Memoir on Elimination, Transformation, and Canonical Forms », *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* **6** (1851), p. 186–200.

1861a « Note sur les 27 droites d'une surface du 3^e^ degré », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* **52** (1861), p. 977–980.

1861b « Note sur l'involution de six lignes dans l'espace », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* **52** (1861), p. 815–817.

1866-69 « Outline Trace of the Theory of Reducible Cyclodes, *i.e.* A Particular Family of Successive Involutes to a Circle whose Determination Depends on the Solutions of an Algebraico-Diophantine Equation, and of the Number and Classification of the Forms of such Family for any given Order of Succession », *Proceedings of the London Mathematical Society* **2** (1866-69), p. 137–160.

TAHTA Dick

2006 *The Fifteen Schoolgirls*, Black Apollo Press, 2006.

TAYLOR Henry Martyn

1894 « On a Special Form of the General Equation of a Cubic Surface and on a Diagram Representing the Twenty-seven Lines on the Surface », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **185** (1894), p. 37–69.

1900 « On the Construction of a Model showing the 27 Lines on a Cubic Surface », *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **18** (1900), p. 375–379.

TIMERDING Heinrich Emil

1900 « Ueber die Gruppierungen der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **122** (1900), p. 209–226.

TOBIES Renate

1981 *Felix Klein*, Leipzig : Teubner, 1981.

1994 « Mathematik als Bestandteil der Kultur: Zur Geschichte des Unternehmens *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* », *Mitteilungen der Österreichischen Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte* **14** (1994), p. 1–90.

VAN DER WAERDEN Bartel Leendert

1939 « Nachruf auf Otto Hölder », *Mathematische Annalen* **116** (1939), p. 157–165.

1985 *A History of Algebra*, Berlin, Heidelberg : Springer, 1985.

VERMEERSCH Étienne

1965 « Some Remarks on the Analysis of the Culture Concept », *Philosophica* **3** (1965), p. 161–213.

VOGT Henri

1895 *Leçons sur la résolution algébrique des équations*, Paris : Novy & cie, 1895.

WEBER Heinrich

1876 *Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht 3*, Berlin : Georg Reimer, 1876.

1878 « Ueber die Kummersche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit zwei Veränderlichen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **84** (1878), p. 332–354.

1884 « Ueber die Galois'sche Gruppe der Gleichung 28^{ten} Grades, von welcher die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung abhängen », *Mathematische Annalen* **23** (1884), p. 489–503.

1893 « Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie », *Mathematische Annalen* **43** (1893), p. 521–568.

1895 *Lehrbuch der Algebra*, t. 1, Braunschweig : Friedrich Vieweg und Sohn, 1895.

1896 *Lehrbuch der Algebra*, t. 2, Braunschweig : Friedrich Vieweg und Sohn, 1896.

WEIL André

1979 « Une lettre et un extrait de lettre à Simone Weil », dans *Œuvres scientifiques*, t. 1, New York : Springer, 1979, p. 244–255.

WITTING Alexander

1887a *Ueber eine der Hesse'schen Configuration der ebenen Curve dritter Ordnung analoge Configuration im Raume, auf welche die Transformationstheorie der hyperelliptischen Funktionen ($p = 2$) führt*, thèse de doctorat, Göttingen.

1887b « Ueber Jacobi'sche Functionen k^{ter} Ordnung zweier Variabler », *Mathematische Annalen* **29** (1887), p. 157–170.

WUSSING Hans

1969 *Die Genesis des abstrakten Gruppen Begriffes*, Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1969.

ZACHARIAS Max

1903 *Ueber die Beziehungen zwischen den 27 Geraden auf einer Fläche 3. Ordnung und den 28 Doppeltangenten einer ebenen Kurve 4. Ordnung*, thèse de doctorat, Philosophischen Fakultät zu Rostock, Göttingen.

ZEUTHEN Hieronymus

1874 « Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre », *Mathematische Annalen* **7** (410-432) (1874).

1875 « Études des propriétés de situation des surfaces cubiques », *Mathematische Annalen* **8** (1875), p. 1–30.

1879 « Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit », dans *Festschrift Kjöbenhavn*, 1879.